

多方向不規則波浪における波高・周波数・波向の結合確率分布

赤井 鈴子*・水口 優**

1. はじめに

現地波浪のように多方向不規則波浪を定義する一つの方法は、波別解析法によって得られる波高、周期、波向の結合確率分布であろう。理論的には、これまでに線形で、周波数スペクトルの幅が狭いという仮定の元に、Longuet-Higgins (1975, 1983) によって波高と周期 (周波数)、磯部 (1987) によって波高と波向の結合確率分布が導かれている。本論文では、同様の仮定の元に、波高、周波数、波向という三者の結合確率分布を解析的に求めた。さらに、その結果をシミュレートした波浪の波別解析結果と比較した。

2. 包絡線関数の結合確率分布

線形多方向不規則波浪の水面変動 η と、 x, y 方向の水平水粒子速度 u, v は、周波数と波向の異なる無数の独立な成分波の重ね合わせとして表現できる。さらに線形で、周波数スペクトルの幅が狭いと仮定すると、

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= \eta_c \cos 2\pi \bar{f}t + \eta_s \sin 2\pi \bar{f}t \\ u(t) &= u_c \cos 2\pi \bar{f}t + u_s \sin 2\pi \bar{f}t \\ v(t) &= v_c \cos 2\pi \bar{f}t + v_s \sin 2\pi \bar{f}t \\ \dot{\eta}(t) &= (\dot{\eta}_c + 2\pi \bar{f} \eta_s) \cos 2\pi \bar{f}t \\ &\quad + (\dot{\eta}_s - 2\pi \bar{f} \eta_c) \sin 2\pi \bar{f}t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで、 $\dot{\eta}$ は水面変動の時間微分である。(1)式において、Longuet-Higgins (1975) は、 $\eta, \dot{\eta}$ という2つの組合せを用いて、単一方向不規則波浪における波高 H と周期 T の結合確率分布を求めている。磯部 (1987) は、 η, u, v という3つの組合せを用いて、多方向不規則波浪における波高 H と波向 α の結合確率分布を求めている。ここでは、上記の4つの組合せを用いて、波高 H ・周波数 f ・波向 α の結合確率分布を求める。(1)式中の $\eta_c, \eta_s, u_c, u_s, v_c, v_s, \dot{\eta}_c, \dot{\eta}_s$ という8種類の包絡線関数のある時間における値は、それが独立な成分の多数重ね合わせと見なせるために、中心極限定理によりすべて

正規分布する。その結果、それらの結合確率分布は、次のような2次までのモーメント (分散及び共分散) を用いて決定される。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \langle \eta_c^2 \rangle &= \langle \eta_s^2 \rangle = \langle \eta^2 \rangle = m_{00} \\ \langle u_c^2 \rangle &= \langle u_s^2 \rangle = \langle u^2 \rangle = m_{20} \\ \langle v_c^2 \rangle &= \langle v_s^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = m_{02} \\ \langle \dot{\eta}_c^2 \rangle &= \langle \dot{\eta}_s^2 \rangle = \langle \dot{\eta}^2 \rangle = m_{00}^* \\ \langle \eta_c u_c \rangle &= \langle \eta_s u_s \rangle = \langle \eta u \rangle = m_{10} \\ \langle \eta_c v_c \rangle &= \langle \eta_s v_s \rangle = \langle \eta v \rangle = m_{01} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

である。ただし、上記以外の組合せのものは0である。なお、 x 軸を主波向の方向にとるので、 $m_{11} (= \langle uv \rangle) = 0$ である。また個々の包絡線関数の平均値は、全て0となる。従って、これら8種類の量の結合確率分布は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} p(\eta_c, u_c, v_c, \dot{\eta}_c, \eta_s, u_s, v_s, \dot{\eta}_s) \\ = \frac{1}{(2\pi)^4 m_{00} m_{20} m_{02} m_{00}^* \Delta} \exp \left[-\frac{1}{2\Delta} \{ a(\eta_c^2 + \eta_s^2) \right. \\ + d(u_c^2 + u_s^2) + h(v_c^2 + v_s^2) + l(\dot{\eta}_c^2 + \dot{\eta}_s^2) \\ - 2b(\eta_c u_c + \eta_s u_s) + 2c(\eta_c v_c + \eta_s v_s) \\ \left. - 2e(u_c v_c + u_s v_s) \} \right] \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a &= 1/m_{00} \\ b &= r_{10}/\sqrt{m_{00}m_{20}} \\ c &= -r_{01}/\sqrt{m_{00}m_{02}} \\ d &= (1-r_{01}^2)/m_{20} \\ e &= -r_{10}r_{01}/\sqrt{m_{02}m_{20}} \\ h &= (1-r_{10}^2)/m_{02} \\ l &= \Delta/m_{00}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

である。ただし、

$$\left. \begin{aligned} r_{01} &= m_{01}/\sqrt{m_{00}m_{02}} \\ r_{10} &= m_{10}/\sqrt{m_{00}m_{20}} \\ \Delta &= 1-r_{01}^2-r_{10}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

とする。

水面変動の包絡線の振幅を η_p 、位相を χ とし、流速については、磯部 (1987) に倣って、水面変動と同位相の成分 (u_p, v_p) と、 $\pi/2$ ずれた成分 (u_q, v_q) に分離し

* 正会員 工修 大成建設(株) 技術研究所 (前中央大学大学院生 理工学研究科土木工学専攻)

** 正会員 工博 中央大学 理工学部土木工学科

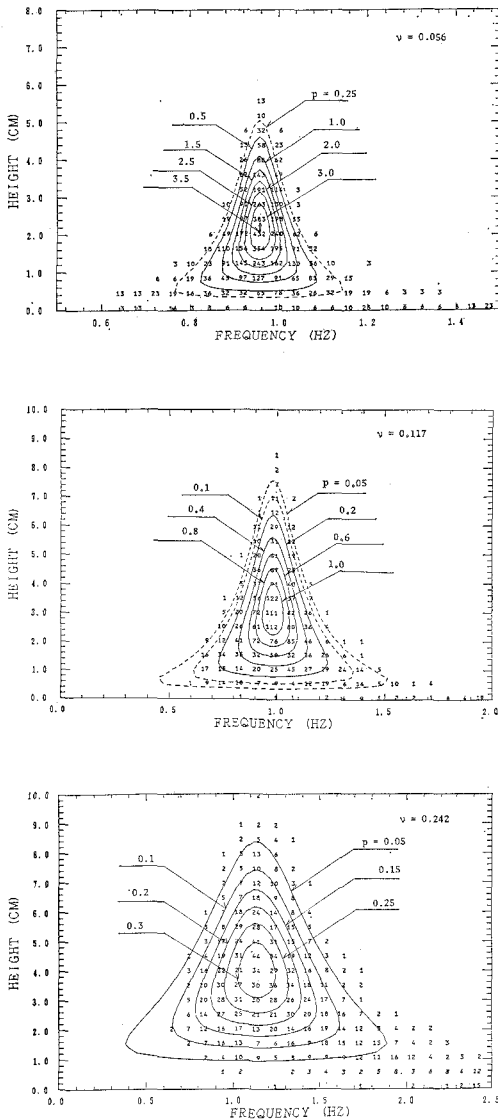


図-1 波高と周波数の結合確率分布

て、水面変動の位相を基準とする次のような変数変換を行う。

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_0 &= \eta_p \cos \chi \\
 \eta_s &= \eta_p \sin \chi \\
 u_0 &= u_p \cos \chi - u_q \sin \chi \\
 u_s &= u_p \sin \chi + u_q \cos \chi \\
 v_0 &= v_p \cos \chi - v_q \sin \chi \\
 v_s &= v_p \sin \chi + v_q \cos \chi \\
 \dot{\eta}_0 &= \dot{\eta}_p \cos \chi - \dot{\chi} \eta_p \sin \chi \\
 \dot{\eta}_s &= \dot{\eta}_p \sin \chi + \dot{\chi} \eta_p \cos \chi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

この結果、 η_p , χ , u_p , u_q , v_p , v_q , $\dot{\eta}_p$, $\dot{\chi}$ を変数とする結合確率分布は、

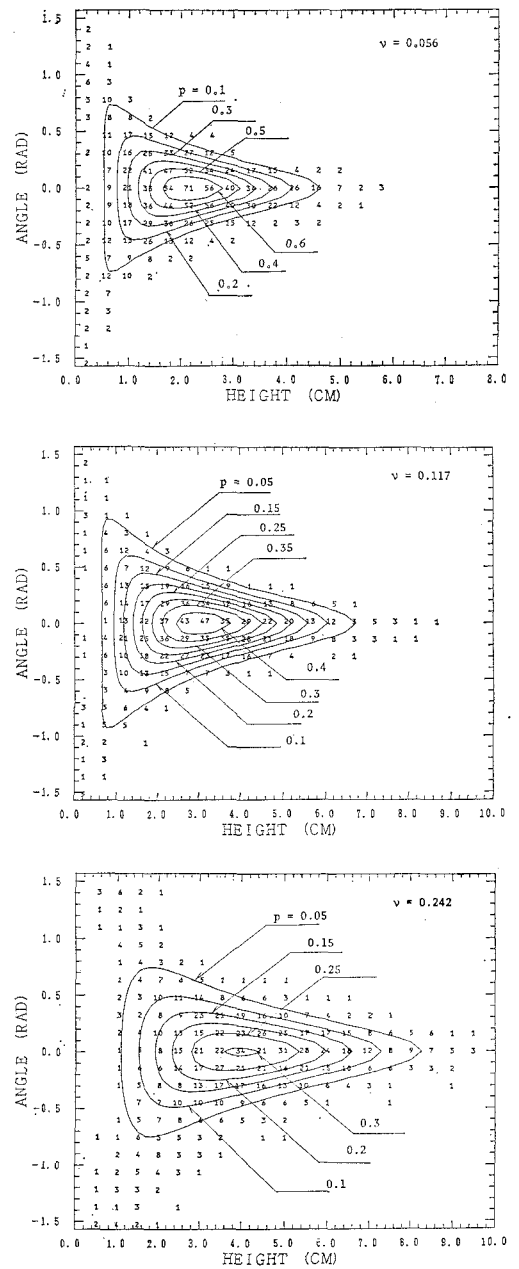


図-2 波高と波向の結合確率分布

$$\begin{aligned}
 & p(\eta_p, u_p, u_q, v_p, v_q, \dot{\eta}_p, \dot{\chi}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 m_{00} m_{20} m_{02} m_{00}^* \Delta} \exp \left[-\frac{1}{2\Delta} \{ a \eta_p^2 \right. \\
 & \quad + d(u_p^2 + u_q^2) + h(v_p^2 + v_q^2) + l(\dot{\eta}_p^2 + \dot{\chi}^2 \eta_p^2) \\
 & \quad \left. - 2b \eta_p u_p + 2c \eta_p v_p - 2e(u_p v_p + u_q v_q) \} \right] \\
 & \dots\dots\dots (7)
 \end{aligned}$$

となる。今、必要とする量は、 η_p , u_p , v_p , $\dot{\chi}$ なので、それ以外の変数については積分すると、

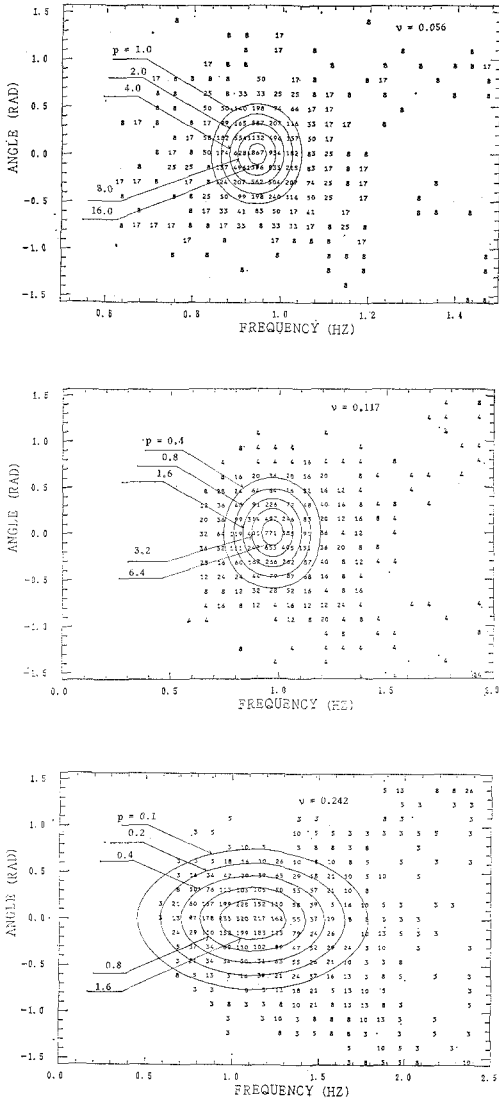


図-3 波向と周波数の結合確率分布

$$p(\eta_p, u_p, v_p, \chi) = \frac{4\eta_p}{(2\pi)^{3/2} m_{00} m_{20} m_{02} m_{00}^* \sqrt{d n}} \exp \left[-\frac{1}{2d} \{ a\eta_p^2 + du_p^2 + hv_p^2 + l\chi^2 \eta_p^2 - 2b\eta_p u_p + 2c\eta_p v_p - 2e u_p v_p \} \right] \quad (8)$$

となる。ただし、

$$n = h - e^2/d \quad (9)$$

である。

3. 波高・周波数・波向の結合確率分布

Longuet-Higgins (1983) によれば、スペクトルの幅が狭いということは、 $\nu^2 \ll 1$ (ただし、 $\nu^2 = m_{02} m_{20} / m_{11}^2 - 1$) に

対応する。その場合、波高 H としては、 $H = 2\eta_p$ 、周波数 f としては、 $f = \chi/2\pi + \bar{f}$ ととる事ができる。波向の定義としては、水面変動が最大となる時の流速ベクトルの方向 α を採用する。すなわち、 $\alpha = \tan^{-1}(v_p/u_p)$ である。そこで、 u_p, v_p を極座標表示すると、

$$\left. \begin{aligned} u_p &= \sqrt{m_{20}} W \cos \alpha \\ v_p &= \sqrt{m_{20}} W \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。それを (8) 式に代入し、さらに不要な量である W については $0 \sim \infty$ で積分すると、

$$p(\eta_p, \alpha, \chi) = \frac{C_0 \sqrt{m_{20}} \eta_p^2}{(2\pi)^{3/2} m_{00} \sqrt{m_{02} m_{00}^*}} \exp \left(-\frac{1}{2d} l \chi^2 \eta_p^2 \right) \times \left[\frac{\sqrt{d}}{A} \exp \left(-\frac{1}{2d} a \eta_p^2 \right) + \frac{B}{A^{3/2}} \eta_p \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{B \eta_p}{\sqrt{d} A} \right) \right\} \times \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{C}{A} \eta_p^2 \right) \right] \quad (11)$$

となる。なお、この結果は、流速計の設置水深から独立になる。ただし、

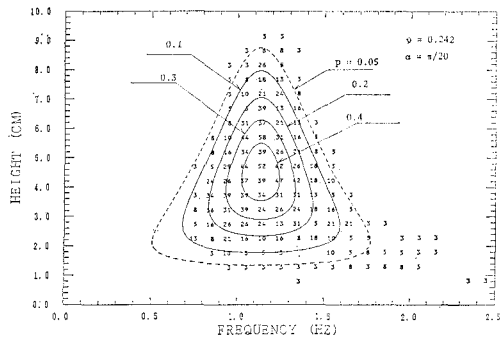
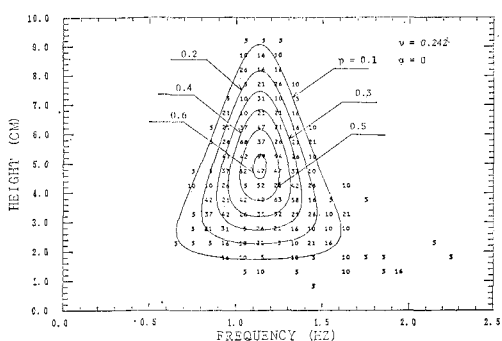
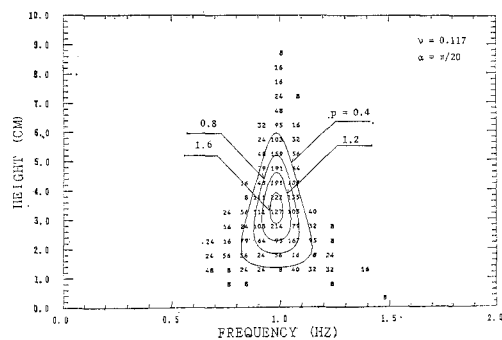
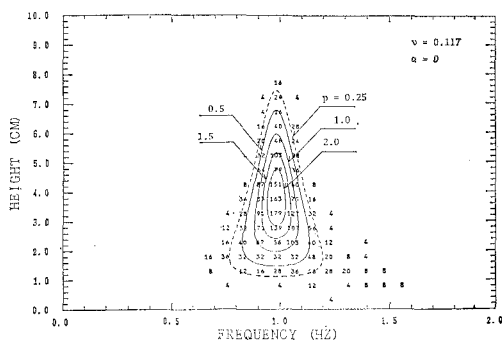
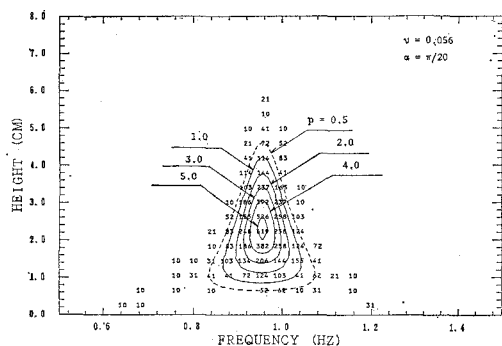
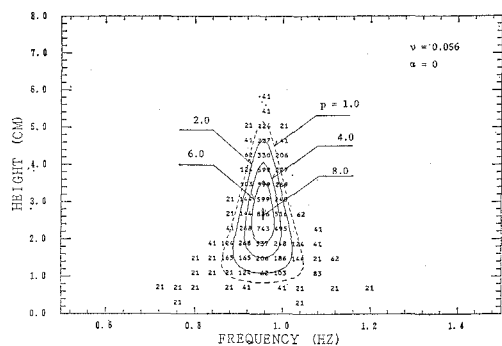
$$\left. \begin{aligned} A &= d m_{20} \cos^2 \alpha + h m_{20} \sin^2 \alpha - 2 e m_{20} \sin \alpha \cos \alpha \\ B &= b \sqrt{m_{20}} \cos \alpha - c \sqrt{m_{20}} \sin \alpha \\ C &= \cos^2 \alpha / m_{00} + \sin^2 \alpha m_{20} / (m_{00} m_{20}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。ここで、 C_0 は、負の周波数は物理的に存在しないとしたために生じた正規化係数である。

(11) 式は χ について積分すると磯部 (1987) が導いた η_p と α の結合確率分布に等しいことが、解析的に確かめられた。また、 α で積分すると、Longuet-Higgins (1975) が導いた η_p と χ の結合確率分布に等しいことについては、数値的に確かめた。Longuet-Higgins (1983) は波高 H と周期 T の相関を取り込むために、 $T = 2\pi / (2\pi \bar{f} + \chi)$ という変換式を用いて $p(H, T)$ を求めている。その結果、平均周期は無限大となる。一方、周波数 f の平均値 $\bar{f}$ は存在する。また、時系列を解析する上で、時間を代表する量として周期の代わりに、単位時間内に 0 点を切る回数である周波数をとっても良いはずである。さらに、波動を数式で表現するには、周波数を採用する方が自然なことも多く、あえて周期に変換せず、波高 H ・周波数 f ・波向 α の結合確率分布のままとした。(11) 式の形から、波高と周波数の結合確率分布の分布形状は、波向に関わらず平均周波数に関して対称形であることがわかる。また、方向スペクトルが対称な場合は結合確率分布も波向に関して対称となる。

4. 結合確率分布の具体的な形状と数値シミュレーション結果との比較

(11) 式は、線形でかつスペクトルの幅が狭いと言う仮

図—4 $\alpha=0$ での波高と周波数の結合確率分布図—5 $\alpha=\pi/20$ での波高と周波数の結合確率分布

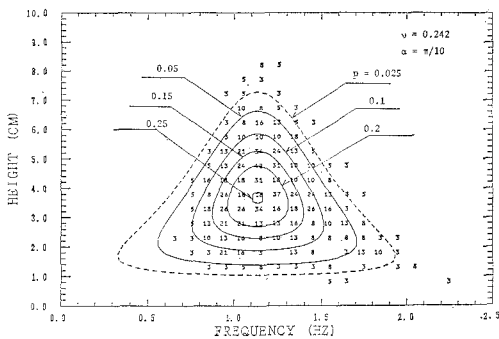
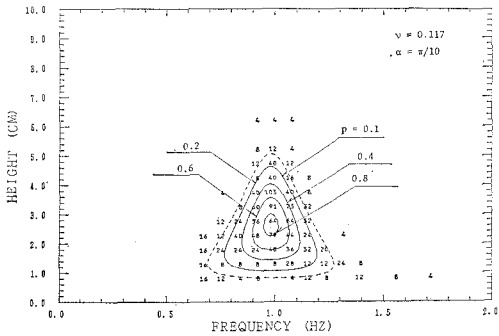
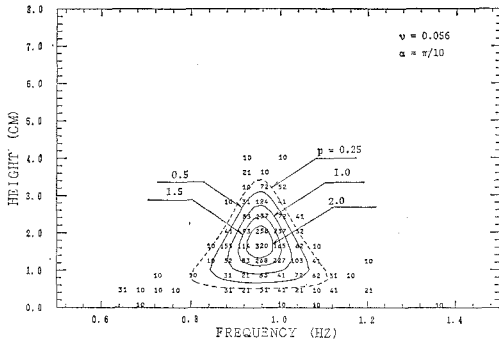
定をしているので、方向性を考慮した線形なシミュレーション波浪の波別解析結果と比較した。比較は、波高と周波数、波高と波向、周波数と波向と言う3種類の2次元周辺分布、波向別の波高と周波数の結合確率分布について行った。シミュレート波浪は、周波数スペクトルとしては、Bretschneider-光易型 ($H_{1/3}=6\text{ cm}$, $T_{1/3}=1\text{ s}$)、方向分布関数としては、 $\cos^{2S}(\theta/2)$ 型を与えた。ただし、 S は、ピーク周波数 f_p から外れるに従い方向集中度係数が低下する形(合用, 1977)を用いた。ただし、 $S_{\max}=32$ とした。

周波数スペクトルにおいて、周波数の範囲を変えてスペクトル幅の異なる3種類のケースを作り、比較検討した。それぞれのケースの詳しい条件と(11)式の計算に必

要な諸量のスペクトル形状から求めた値および、時系列において定義された波の総数は、表—1に示す通りである。

(1) 2次元周辺分布

図—1は、波高と周波数、図—2は、波高と波向、図—3は、波向と周波数の2次元周辺分布である。なお図中にプロットされた数字はシミュレート波浪の確率密度を百分率で表したものである。(図—4～図—6についても同じ)。図—2では、どのケースもシミュレート波浪の波別解析結果と計算結果の一致は良好である。また、理論的にも、波高と波向の組合せは、狭帯域の制限を受けずに扱うことができる。図—1と図—3において、スペクトル幅の狭い case I では、両者の一致は非常に良く、



図—6 $\alpha=\pi/10$ での波高と周波数の結合確率分布

表—1 シミュレーションの条件

case	f/f_p	m_{00}	m_{20}	m_{02}	m_{00}^*	m_{10}	ν	波の総数
I	0.9~1.1	0.598	15.1	1.12	0.068	2.99	0.056	1926
II	0.8~1.25	1.20	28.8	2.67	0.623	5.80	0.117	2003
III	0.7~2.0	2.00	37.8	4.25	7.79	8.26	0.242	2430

高い波は、波高が小さく波向に関しては広い範囲に分布するという傾向を持つこともわかる。

(2) 波向別の波高と周波数の結合確率分布

図—4 は、主波向方向 ($\alpha=0$)、図—5 は、 $\alpha=\pi/20$ 、図—6 は、 $\alpha=\pi/10$ での波高と周波数の結合確率分布である。case I ではどの波向でも、シミュレート波浪の波別解析結果と計算結果の一致は良好である。シミュレート波浪においては、case II では $|\alpha|=\pi/20$ より大きいと、case III では $\alpha=0$ ですでに、波高の小さい部分で、周波数の低い所で密度が低くそれに見合うように、周波数の高い所で密度が高いという傾向がみられる。この非対称性は、波向の増加と共に著しくなる。

5. おわりに

多方向不規則波浪において、狭帯域周波数スペクトルという仮定の元に、水面変動と水面変動の時間微分、水平二成分水粒子速度の包絡線関数を用いて、波高・周波数・波向の結合確率分布を求め、シミュレート波浪と比較した。スペクトル幅が狭い (ν が小さい) 時は、確かに両者の一致は良好であった。 ν が大きくなるとシミュレート波浪には周波数の高い波が出現して理論からはずれていく。

今後、狭帯域スペクトルの定量的な基準について検討してみると共に、狭帯域でない場合の結合確率分布の理論的な研究が望まれる。

参 考 文 献

- 磯部雅彦: 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 111~115, 1987.
- 合田良実: 港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会, 237 p., 1977.
- Longuet-Higgins, M. S.: J. G. R., 80, 2688~2694, 1975.
- Longuet-Higgins, M. S.: Proc. R. Soc. Lond., A389, 241~258, 1983.

case II, case III となるに従って、周波数の高い領域で両者は合わなくなっていることが解る。この事は、シミュレートされた波浪では、スペクトル幅が広がるにつれて、周波数の高い部分で密度が高くなり、その分布が理論からずれるためである。また、そのような周波数の