流れおよび水深変化による有限振幅波の屈折変形の数値モデル

山口正隆*・川原博満**・戸塚耕造***

1. 緒　　言

これまで水深変化および流れが同時に存在する場合の微小振幅波理論に基づく屈折変形や水深変化による有限振幅波の屈折変形に関し，種々の理論解[1),2),3)]や数値モデル[1),4)]の開発が行われているが，前者の場合の有限振幅波理論に基づく解析は行われていない．また，任意地形を対象とした有限振幅波理論に基づく屈折解析[5)]においても，微小振幅波理論の場合に成立する波向線間でエネルギーフラックスが一定という条件が使われており，その妥当性は疑わしい．

一方，著者ら[6)]は，有限振幅波理論に基づいて波特性を評価した場合の，任意汀線形状海岸に適用可能な海浜流モデルを開発した．この中で，波浪変形計算は波向線法によっているが，波浪変形に関する理論解との比較が行われていないために波浪変形モデルの妥当性の検討が十分でない．また，この海浜流モデルは波浪変形計算と海浜流計算を交互に行うことから，流れおよび水深の場が与えられた場合の屈折・砕波変形の計算モデルとして独立したものではない．そこで，本研究では著者らが開発した海浜流モデルから波向線法に基づく波浪変形モデルを取り出して，流れおよび水深変化による有限振幅波(Stokes 波およびクノイド波）の屈折・砕波変形モデルを新たに作成し，まず，単純な条件下での理論解との比較から数値モデルの妥当性を検討する．ついで，複雑な汀線形状をもつ任意海底地形に対して波浪変形計算を行い，線形理論に基づく計算結果[4)]との比較から，有限振幅波の変形特性を考察する．

2. 屈折・砕波変形の数値モデル

(1) 基礎方程式

波数および波向を計算するための基礎方程式は波数の保存則，波数の非回転条件および非線形分散関係式から導かれる波数成分方程式であり，次のように表される．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial k_x}{\partial t}+\left(\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\cos\theta+U\right)\frac{\partial k_x}{\partial x}+\left(\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\sin\theta+V\right)\frac{\partial k_x}{\partial y}\\
&\quad=-\frac{\partial \sigma_m}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial x}-\frac{\partial \sigma_m}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial x}-k_x\frac{\partial U}{\partial x}-k_y\frac{\partial V}{\partial x}\\
&\frac{\partial k_y}{\partial t}+\left(\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\cos\theta+U\right)\frac{\partial k_y}{\partial x}+\left(\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\sin\theta+V\right)\frac{\partial k_y}{\partial y}\\
&\quad=-\frac{\partial \sigma_m}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial y}-\frac{\partial \sigma_m}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial y}-k_x\frac{\partial U}{\partial y}-k_y\frac{\partial V}{\partial y}
\end{aligned}
\right\}
\qquad\cdots\cdots(1)
$$

ここに，$k_x(=k\cos\theta)$，$k_y(=k\sin\theta)$：波数成分，$\partial\sigma_m/\partial k$：微小振幅波理論の場合の群速度に相当する伝播速度，k：波数，θ：波向，U, V：流れ成分，D：水深，H：波高，である．

一方，波と流れの共存場において，砕波に伴うエネルギー減衰を考慮した波に関するエネルギー平衡方程式は，波数成分方程式と同一の特性曲線（波向線）をもつように変形すると，次のようになる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_s}{\partial t}+\left(\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\cos\theta+U\right)\frac{\partial E_s}{\partial x}+\left(\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\sin\theta+V\right)\frac{\partial E_s}{\partial y}\\
&\quad=-E_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\cos\theta\frac{\partial E_s}{\partial x}\\
&\qquad+\frac{\partial \sigma_m}{\partial k}\sin\theta\frac{\partial E_s}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_x-\frac{M_x^2+M_y^2}{2\rho D}\frac{M_x}{\rho D}\right\}\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial y}\left\{F_y-\frac{M_x^2+M_y^2}{2\rho D}\frac{M_y}{\rho D}\right\}\\
&\qquad-S_{xx}\frac{\partial U}{\partial x}-S_{xy}\frac{\partial V}{\partial x}-S_{yx}\frac{\partial U}{\partial y}-S_{yy}\frac{\partial V}{\partial y}\\
&\qquad+\frac{M_x}{\rho D}\frac{\partial S_{xx}}{\partial x}+\frac{M_y}{\rho D}\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}+\frac{M_x}{\rho D}\frac{\partial S_{yx}}{\partial y}\\
&\qquad+\frac{M_y}{\rho D}\frac{\partial S_{yy}}{\partial y}-E_{bw}
\end{aligned}
\right\}
\qquad\cdots\cdots(2)
$$

ここに，$E_s=E_n-(M_x^2+M_y^2)/2\rho D$，$E_n$：波の平均エネルギー，$F_x, F_y$：波によるエネルギーフラックス成分，$S_{xx}, S_{xy}, S_{yx}, S_{yy}$：radiation stress，$M_x, M_y$：波による質量フラックス成分，$\rho$：流体の密度，$E_{bw}$：砕波による平均エネルギー逸散量，である．ここで，エネルギー減衰項の評価は岩垣・間瀬ら[7)]により実験的に決定された係数 B をもつ Battjes の段波モデルに基づくものとする

* 正会員　工博　愛媛大学教授　工学部海洋工学科
** 　工修　富士通エフ・アイ・ピー株式会社
*** 学生員　愛媛大学大学院工学研究科

と，E_{bw} は次式で表される．

$$E_{bw}=\frac{B}{4\gamma^3}\frac{\rho g H^2\sqrt{gD}}{L}\left(\frac{H}{D}\right)^4, \quad \gamma=0.7+5i \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここに，L: 波長，$\gamma=H/D$ および i: 海底勾配，である．上式は計算過程で算出される波高が砕波高 ($H_b=\gamma D_b$) を越える場合に作用するものとする．ここに，添字 'b' は砕波を意味する．なお，第 2 定義の波動理論では $M_x=M_y=0$ である．

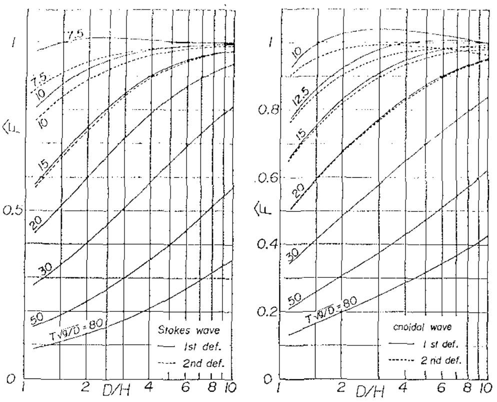
(2) 数値計算法

(a) 有限振幅波理論に基づく波特性の内挿

本研究において使用した有限振幅波理論は Chappelear [8),9)] によるクノイド波の第 2 次近似解および Tsuchiya ら [9),10)] の Stokes 波の第 4 次近似解であるが，その表示式は複雑であるので，波特性を評価するためにこれらを直接プログラムに組み込むことは計算時間の面で著しく不利である．そこで，著者らの海浜流モデル [6),11)] と同様にあらかじめ波特性を数表の形で作成し，中間値に対して 2 次元 4 点補間式を使用する方法を採用する．

波浪変形計算に必要な波特性は $\partial\sigma_m/\partial k$, $\partial\sigma_m/\partial D$, $\partial\sigma_m/\partial H$, M, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}, E_n, E_s および F であるので，L/D および H/D の広範囲な値に対し，これらの無次元量の数表を作成する．一方，計算で直接得られるのは L および E_s であるから，E_s から波高を推定するため，L/D と $E_s/(\rho g D^2/8)$ の広範囲な値に対して H/D の数表をも用意する．そして，数値計算の各過程で得られる L および E_s を入力値として，H/D の数表に対し 2 次元 4 点補間式を適用すれば，容易に H/D が求められる．ついで，H/D および L/D を入力値として前述の波特性の数表に対し同様の内挿を行なえば，波特性が評価される．

図―1 は一例として微小振幅波理論により無次元化した場合の，Stokes 波理論とクノイド波理論に基づくエネルギーフラックス $\hat{F}$ と D/H の関係を $T\sqrt{g/D}$ をパラメータとして示したものである．



図―1　有限振幅波の波特性の一例

(b) 数値計算手順

波数成分方程式およびエネルギー平衡方程式はいずれも，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\sigma_m}{\partial k}\cos\theta+U, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial\sigma_m}{\partial k}\sin\theta+V \qquad \cdots\cdots(4)$$

で与えられる特性曲線をもち，この特性曲線上ではそれぞれの方程式の左辺は時間に関する常微分項になる．従って，常微分方程式の数値解法を利用してこれらの方程式を解くことができるが，波特性が未知数である波高などに依存することから，繰返し計算が必要である．そこで，あらかじめ沖側境界での周期，波向および波高から微小振幅波理論に基づく波高変化式と Snell の法則により全格子点での波数，波数成分および波高を第 1 段階として与える．つぎに，沖側領域での周期，Stokes 波あるいはクノイド波理論による波数成分および波高を出発値として式 (1) および (2) を 3 次の精度をもつ Runge-Kutta 法で解いて特性曲線上での波数成分（波数，波向）および平均エネルギーを算出したのち，格子点に内挿する．この場合，特性曲線上の水深，流れおよび波特性は xy 平面での 4 点補間式を使用して格子点におけるこれらの値から推定される．砕波減衰項は計算波高に相当するエネルギーより大きい場合に作用するものとする．また，各格子点での波数，波向および平均エネルギーの算定は波の伝播方向および沿岸方向に関する 2 回の線形内挿を通して行われるが，内挿の不可能な格子点では線形外挿される．このようにして，全格子点における波数，波向，平均エネルギー，さらに波高が算出されるので，これらの値に対する波特性を L/D および H/D に関する 2 次元 4 点補間から推定し，再び沖側境界から特性曲線を出発させ，同様の計算を解が収束するまで繰り返す．この回数は通常 5 回程度で十分であるし，また，特性曲線の出発間隔および時間のステップはそれぞれ正方格子網間隔の 1/2 およびこれを伝播する時間程度とする．

3. 平行等深線地形における屈折変形

(1) 理論解の誘導

平行等深線地形 $D=D(x)$ に 1 次元流れ ($U(x)$, $V(x)$) が存在し，砕波を考慮しない場合，定常状態での有限振幅波の屈折変形に関する理論解を導くことができる．ただし，この場合，$U(x)$ は波の質量フラックスを相殺するもどり流れを表し，任意に与えられる $U(x)$ とは異なることおよび流れ $V(x)$ は波の影響を受けず，平均水位も変化しないことが仮定される．

上述の仮定のもとで連続方程式および汀線での境界条件 ($\tilde{U}=0$) から $U=-M_x/\rho D$ であり，式 (2) は次式になる．

$$\frac{d}{dx}\left\{F_x-\frac{M_x}{\rho D}(E_n+S_{xx})\right\}+S_{xy}\frac{dV}{dx}-\frac{M_y}{\rho D}\frac{dS_{xy}}{dx}=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

さらに，$\theta\neq0$ の場合，式 (5) の積分は困難であるが，第2定義の有限振幅波理論 ($M_x=M_y=0$) を使用する場合には積分特性量間の関係式，

$$\left.\begin{aligned}F_x&=(3\bar{E}_k-2\bar{E}_p+\rho D\overline{u_b^2}/2)c\cos\theta=F\cos\theta\\ S_{xy}&=(3E_k-2E_p+\rho D\overline{u_b^2}/2)\cos\theta\sin\theta\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

と波数の非回転条件および波数の保存則を利用すれば，次式のようになる．

$$k\sin\theta=\mathrm{const} \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$\sigma_m+k\sin\theta V=\mathrm{const} \qquad \cdots\cdots(8)$$

$$S_{xy}=(F/c)\cos\theta\sin\theta=\mathrm{const} \qquad \cdots\cdots(9)$$

ここに，c は波速である．これらの式を無次元化し，const を流れが存在しない深海域での値として Stokes 波の第4次近似解により評価する．そして水深および流れを与え，第2定義の有限振幅波理論により波特性を評価して解くと，水深変化および流れによる有限振幅波の屈折変形の理論解を得ることができる．なお，第1定義の理論の場合でも式 (9) は $O(\varepsilon^3)$ (ε: 微小パラメータ) で成立する．そこで，式 (8) に対して質量フラックスによるもどり流れ ($U=-M_x/\rho D$) を考慮すると，本研究で使用する第1定義のクノイド波の第2次近似解の場合にも第2定義の理論と同様に理論解を得ることができる．しかし，Stokes 波の第4次近似解の場合には $O(\varepsilon^4)$ で計算が行われるので，式 (9) の使用は不適切である．

さて，数値計算に用いる沿岸方向流れは次式である．

$$V/c_{0A}=V_0/c_{0A}\exp\{-6D/L_{0A}\} \qquad \cdots\cdots(10)$$

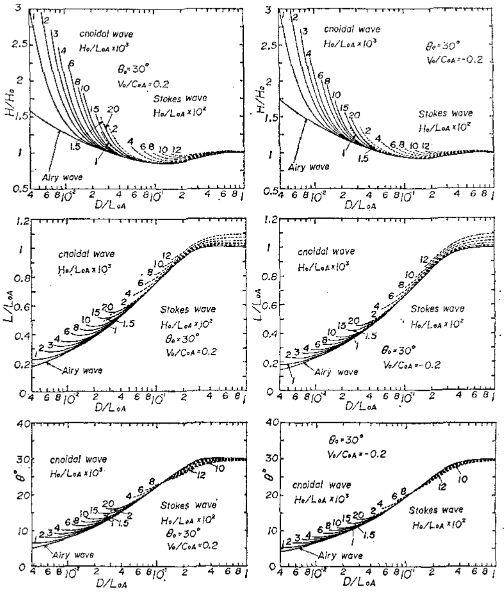
ここに，c_{0A} および L_{0A} は微小振幅波理論による深海波速および深海波長であり，添字 '$_0$' は深海を意味する．

図—2 は入射角 $\theta_0=30°$ で $V_0/c_{0A}=0.2$ (順流) および -0.2 (逆流) の場合の波高，波長および波向変化を第2定義の Stokes 波およびクノイド波理論について同時に示したものであり，微小振幅波理論に基づく理論解[1),4)],

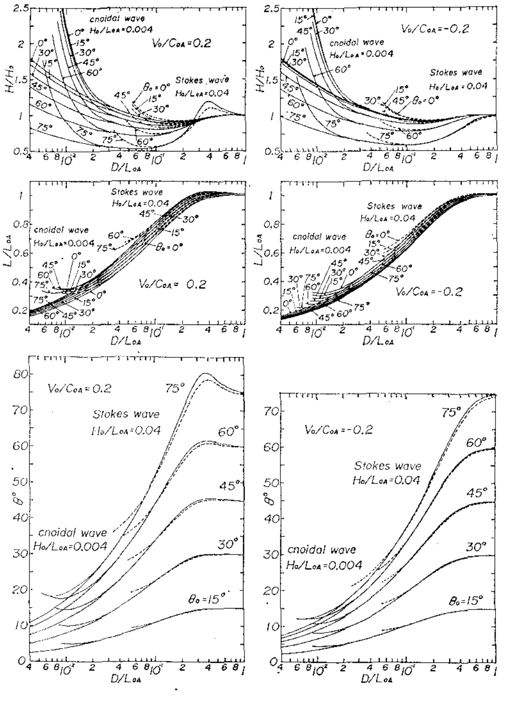
$$\left.\begin{aligned}\frac{H}{H_0}&=\sqrt{\frac{\sin2\theta_0}{\sin2\theta}}\sqrt{\frac{1}{2n}}\\ \frac{L_A}{L_{0A}}&=\frac{\tanh k_Ah}{\{1-(V/c_{0A})\sin\theta_0\}^2}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(11)$$

も与えられている．従来，有限振幅波の shoaling の計算結果の表示には D/L_0 や H_0/L_0 が使用されていたが，今回の研究では実用的観点から微小振幅波理論に基づく D/L_{0A} や H_0/L_{0A} が採用された．これらの図によると，shoaling に伴う波高の急激な増加に加えて，逆流状態では順流状態より H/H_0 は大きく，L/L_{0A} は小さい．また，順流が屈折を妨げ，逆流が屈折を促進させるから，逆流状態の波向変化は順流状態のそれより大きいこと，さらに，深海域では波形勾配が大きいほど屈折するのに対し，浅海域では逆に屈折しにくいことが見いだされる．

図—3 は波の屈折変形に及ぼす入射角 θ_0 の影響を $V_0/c_{0A}=\pm0.2$, Stokes 波では $H_0/L_{0A}=0.04$, クノイド波では $H_0/L_{0A}=0.004$, の場合について示したものであり，図中の実線はクノイド波および微小振幅波，点線は Stokes 波を表す．これによると，θ_0 が増加するほど H/H_0 の値が小さいことや有限振幅波，微小振幅波を問わず，



図—2　有限振幅波の屈折変形



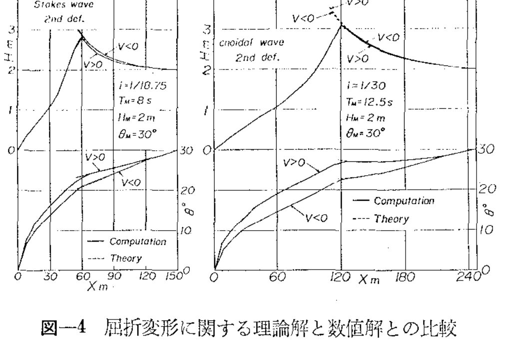
図—3　屈折変形に及ぼす入射角の影響

θ_0 が小さい場合の H/H_0 に及ぼす θ_0 の影響は小さいことがわかる．たとえば，$\theta_0=0°$ と 30° の場合では H/H_0 の値にそれほどの差がないのに対し，$\theta_0=30°$ と 60° ではその差がより大きくなる．また，$V_0/c_{0A}<0$ (逆流) の場合，L/L_{0A} は θ_0 の増加とともに減少するのに対し，$V_0/c_{0A}>0$ (順流) の場合には，θ_0 が大きいときほど L/L_{0A} の値は大きい．つまり，θ_0 が大きいときほど流れの影響を強く受け，波長は減少しないことになる．この波長変化の特性は有限振幅波および微小振幅波の場合にも同様であるが，有限振幅波では砕波点近くで各 θ_0 に対する L/L_{0A} の曲線が交差することもある．さらに，波向変化図によると，Stokes 波は $D/L_{0A}<0.1$ では微小振幅波より屈折しやすく，$D/L_{0A}>0.1$ での Stokes 波やクノイド波は微小振幅波より屈折しにくいことがうかがわれる．また，$V_0/c_{0A}=0.2$，$\theta_0=75°$ の場合，Stokes 波領域では流れの影響を強く受けて一度波高および波向が増大した後に減少する．そして，$\theta_0=85°$ (理論曲線省略) では解が存在しない D/L_{0A} の領域が存在し，D/L_{0A} が減少すれば再び解が得られる．これは計算結果が深海域と計算対象地点のみに依存し，途中の伝播過程に関係しない理論の性質による．なお，流れが存在せず，入射角が非常に大きくなる場合には水深減少とともに，波向がかえって増大するという Peregrine ら[12] により明らかにされた anomalous refraction (異常屈折) は今回の研究では得られなかった．

(2)　数値モデルの妥当性の検討

まず，Stokes 波理論に基づく数値計算では格子間隔 $\Delta x=\Delta y=7.5$ m で 23×25 に分割した海底勾配 $i=1/18.75$，最大水深 $D_{max}=8$ m をもつ領域に，沖側での入射波条件として $H_M=2$ m，$T_M=8$ s および $\theta_M=30°$ を与え，波向線計算の時間ステップおよび計算の繰返し回数をそれぞれ $\Delta t=0.4$ s および $N=20$ とした．また，流れ V を考慮した計算では V として $\partial|V|/\partial x=1/75$ の一様勾配流 ($D=0.4$ m で $|V|=1.5$ m/s，$D=6$ m で $|V|=0.1$ m/s) を与えた．一方，クノイド波理論に基づく数値計算で使用された条件は 39×25 の計算領域，$\Delta x=\Delta y=7.5$ m，$i\fallingdotseq 1/30$，$D_{max}=8$ m，$H_M=2$ m，$T_M=12.5$ s，$\theta_M=30°$，$\Delta t=0.4$ s，$N=20$ であり，流れ V に対しては $\partial|V|/\partial x=1/75$ の一様勾配流 ($D=0.891$ m で $|V|=2.5$ m/s，$D=6.683$ m で $|V|=0.1$ m/s) が与えられた．なお，数値計算では (1) とは異なり，全領域において同一の波理論が使用されるのはいうまでもない．

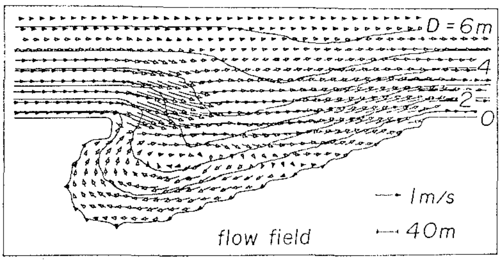
図—4 はそれぞれ第 2 定義の Stokes 波理論とクノイド波理論に基づく屈折変形の理論解および数値解を $V>0$ および $V<0$ の場合について示したものであり，砕波点近傍のわずかな相違を除き両者はいずれの場合もよく一致する．このわずかな相違は，数値モデルでは離散格子点で計算が行われ，しかも砕波の影響が考慮されるのに対し，理論ではこれらが考慮されないという両者の前提条件の違いに起因する．また，屈折変形に及ぼす流れ V の影響をみると，砕波前の波高は逆流の場合にわずかに大きいだけであるが，波向にはかなりの差が生じ，逆流の場合の波向変化が大きい．



図—4　屈折変形に関する理論解と数値解との比較

4.　2 次元モデル地形に対する屈折・砕波変形計算

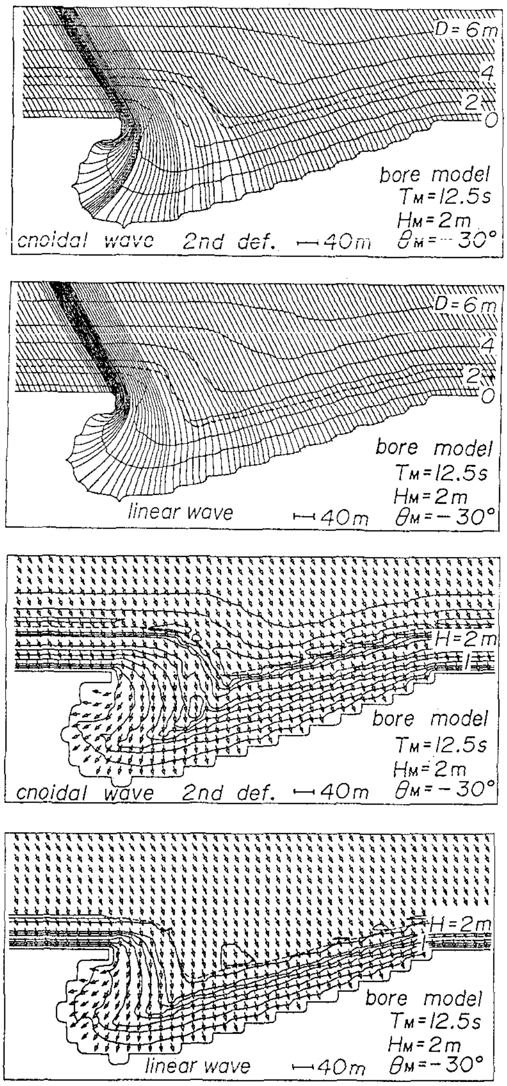
計算領域は中央部に大きく入り込んだ湾入部をもち，両端で平行等深線となる地形であり，これを $\Delta x=\Delta y=20$ m で 20×73 に分割した．入射波条件は $T_M=12.5$ s，$H_M=2$ m，$\theta_M=-30°$ であり，$\Delta t=1$ s のもとに 20 回の繰返し計算を行った．



図—5　湾入海岸地形および入力流速場

図—5 は入力流速場，図—6 は第 2 定義のクノイド波理論および微小振幅波理論[4] に基づく数値モデル (砕波減衰項の評価に段波モデルを使用) により得られた波向線図および波高・波向分布図を示したものである．まず，波向線図をみると，両者とも領域両端の平行等深線部では滑らかな変化をもつ分布を示しているのに対し，湾入部における波向線は複雑な流れの影響により沖側から蛇行しながら汀線に到達している．また，砕波帯内においてクノイド波理論による波向線は微小振幅波理論によるものより大きく屈折しているため，湾入部左側に回り込む波向線の本数はクノイド波理論によるもののほうが多い．つぎに，波高・波向分布図によると，両者ともほぼ

等深線に沿うような波高の分布形状を示す．しかし，有限振幅波のより急激な波高増加と砕波後の波高の急減に対応して，クノイド波理論による等値線は砕波線近傍において微小振幅波理論によるものより密な分布になる．また，湾内部における有限振幅波理論による波高の等値線の形は微小振幅波理論によるものより屈曲に富むが，砕波点を離れた砕波帯内では，有限振幅波の波高変化が小さいので，波高の沿岸方向変化にはそれほど差を生じない．



図—6　湾入海岸地形上の波向線図と波高・波向分布図

5. 結　　語

本研究では任意汀線・海底地形を対象とした，流れおよび水深変化による有限振幅波の屈折・砕波変形の実用的な数値モデルを作成するとともに，新たに平行等深線上の1次元流れに対する Stokes 波およびクノイド波の屈折変形の理論解を誘導し，両者の比較から有限振幅波の屈折変形特性と数値モデルの妥当性を検討した．その結果，屈折変形に及ぼす沿岸方向流れの影響は波高変化より波長および波向変化に強く現れることや有限振幅波は微小振幅波より準深海域では屈折しやすく，逆に浅海域では屈折しにくいこと，また，理論解と数値解は砕波点近傍のわずかな相違を除き，よく一致することなどがわかった．また，複雑な汀線形状をもつモデル海岸における有限振幅波の屈折・砕波変形を微小振幅波のそれと比べると，shoaling 特性や屈折特性の相違により岸沖方向変化は著しくなるが，沿岸方向変化にはそれほど差を生じないことも見いだされた．

最後に，数値計算および図の作成に助力戴いた愛媛大学工学部海洋工学科大 福　学技官および同大学院工学研究科　飯野剛弘君に謝意を表するとともに，数値計算は愛媛大学情報処理センターの FACOM M-360AP を使用して行ったことを付記する．

参 考 文 献

1) 岩垣雄一・酒井哲郎・岡　幸雄：流れによる波の屈折と波高変化，第24回海岸工学講演会論文集，pp. 25〜29, 1977.
2) Ryrie, S. and D. H. Peregrine: Refraction of finite-amplitude water waves obliquely incident on a uniform beach, J. Fluid Mech., Vol. 115, pp. 91〜104, 1982.
3) Skovgaard, O. and M. H. Petersen: Refraction of cnoidal waves, Coastal. Eng., Vol. 1, pp. 43〜61, 1977.
4) 山口正隆・畑田佳男・日野幹雄・細野浩司：流れおよび海底地形による波浪の変形計算法，土木学会論文集，第357号/II-3, pp. 187〜195, 1985.
5) たとえば，Oh, I. S. and C. E. Grosch: Numerical study of finite amplitude wave refraction, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 111, No. 1, pp. 78〜95, 1985.
6) 山口正隆・川原博満・戸塚耕造：任意汀線形状海岸を対象としたクノイド波理論に基づく海浜流の数値モデル，自然災害科学，7-2, pp. 12〜20, 1988.
7) 岩垣雄一・間瀬　肇・田中　剛：不規則波の浅海変形モデルについて，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 104〜108, 1981.
8) Chappelear, J. E.: Shallow-water waves, J. Geophys. Res., Vol. 67, No. 12, pp. 4693〜4704, 1962.
9) 山口正隆：有限振幅波の二,三の特性について，愛媛大学工学部紀要第III部工学，第8巻第4号，pp. 191〜202, 1977.
10) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi: Some considerations on water particle velocities of finite amplitude wave theories, Coastal Eng. in Japan, Vol. 15, pp. 43〜57, 1972.
11) 山口正隆・細野浩司・川原博満：波の非線形性を考慮した海浜流の数値モデル，土木学会論文集，第369号/II-5, pp. 185〜194, 1986.
12) Peregrine, D. H. and S. C. Ryrie: Anomalous refraction and conjugate solutions of finite-amplitude water waves, J. Fluid Mech., Vol. 134, pp. 91〜101, 1983.