

# 浅海における不規則波浪の時系列モデルについて

篠田 成郎\*・安田 孝志\*\*・川口 智也\*\*\*  
石原 貴司\*\*\*・土屋 義人\*\*\*\*

## 1. 緒 言

近年、沿岸海域の開発・利用および保全の進展に伴い、海岸波浪の波群性を考慮した不規則波理論の確立が望まれてきており、弱非線形な不規則波浪に対する統計理論の展開はすでに木村<sup>1),2)</sup>や Longuet-Higgins<sup>3)</sup>によってなされている。特に、木村の研究は、確率過程論の立場から海岸波浪における個々の波の連なりを Markov 連鎖として捉えた時系列モデルであり、構造物に作用する繰返し波力を算定するなどの実際の問題に対してたいへん優れた研究といえる。ところが、このモデルでは、波浪の時系列は Markov 過程における遷移確率によって評価されるため、波の連なりを生起確率でしか捉えられず、具体的な波高の連なりを知ることは適さない。また、この遷移確率は線形スペクトル理論を基礎とした波高の2次元 Rayleigh 分布により求められるため、モデルの適用対象は非線形性の弱い波の場を前提としており、スペクトルのバンド幅についても考慮した扱いを余儀なくされるため、その適用には注意を要することになる。

そこで本研究では、浅海における波浪の基準モードをソリトンとする立場から、不規則なソリトンの連なり(不規則ソリトン列)に関する時系列モデルを確率過程論に基づいて定式化することにより上述の問題点が解消され、より簡単なモデルの構築が可能となることを示すと同時に、様々な波浪の現地観測記録を用いて本モデルの適用性を検証する。

## 2. 不規則ソリトン列に関する自己回帰モデル

深海においてのみならず、非線形性の卓越する浅海での不規則波浪にも顕著な波群性の存在することは今や周知の事実である。また、海岸波浪を不規則ソリトン列として表示した場合でもこの事実は変わらず、ソリトンの振幅の連なりにも同様な時系列特性が存在する<sup>4),5)</sup>。ここでは、このような観測事実を反映した不規則ソリトン

列の振幅に関する時系列モデルを提案する。モデルの構成に当たっては、現地波浪における振幅の自己回帰性に着目し、その確率過程として自己回帰過程を適用する。ただし、以下では、確率過程論の常に習い、‘自己回帰’を‘AR’と略して表記することにする。

### (1) ソリトンの振幅に関する自己回帰モデルの導入

まず、時間軸上におけるソリトンの振幅  $A$  の連なりを1次の AR 過程と考え、ソリトンの時系列に関するモデルとして次式を提案する。

$$X_j = \phi X_{j-1} + Y_j, \quad j=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$X_j = A_j - \mu_A, \quad j=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\phi$  は一般に AR 母数と呼ばれ、 $|\phi| < 1$  のときには式 (1) で表される1次 AR 過程は定常確率過程となる。また、確率変数  $Y$  は AR 過程における誤差項(以下では、これを AR 誤差項と呼ぶことにする)であり、通常の AR 過程と同様に、確率変数  $X$  とは独立でかつ系列相関を持たないものとする。さらに、 $\mu_A$  および  $N$  は、それぞれソリトンの振幅の平均およびソリトン数を表す。

ここで、式 (1) の確率過程  $X$  が定常であると仮定すれば、確率変数  $A$ 、 $X$  および  $Y$  に関する統計量は番号  $j$  とは独立であり、 $|\phi| < 1$  と考えられるため、次のような期待値演算が可能となる。

$$\left. \begin{aligned} E[A_j] &= \mu_A + \mu_Y / (1 - \phi), \\ \text{Var}[A_j] &= \sigma_Y^2 / (1 - \phi^2), \\ \text{Cor}[A_j, A_{j+1}] &= \text{Cov}[A_j, A_{j+1}] / \sqrt{\text{Var}[A_j] \cdot \text{Var}[A_{j+1}]} \\ &= \phi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $E[\cdot]$ 、 $\text{Var}[\cdot]$ 、 $\text{Cor}[\cdot]$  および  $\text{Cov}[\cdot]$  は、それぞれ期待値、分散、相関係数および共分散に関する演算を表し、 $\mu_Y$  および  $\sigma_Y$  はそれぞれ確率変数  $Y$  の平均および標準偏差を表す。これより、AR 母数  $\phi$  は、隣り合うソリトンの振幅相互の相関係数  $\gamma$  に一致することがわかる。また、 $l$  個離れたソリトンの振幅相互の自己相関は次式で与えられる。

$$\text{Cor}[A_j, A_{j+l}] = \phi^l = \gamma^l \quad \dots\dots\dots (4)$$

\* 正会員 工修 岐阜大学助手 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

\*\*\* 学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科

\*\*\*\* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

## (2) AR 誤差項の確率密度関数

次に, AR 誤差項  $Y$  の確率密度関数を求めるために, ソリトン振幅  $A$  に関する確率密度関数  $f_A(A)$  を次式で定義する.

$$f_A(A) = \sum_k p(k) \delta(A - \alpha_k) \dots\dots\dots (5)$$

これにより, 確率変数  $X$  の確率密度関数  $f_X(X)$  は次のように表される.

$$f_X(X) = \sum_k p(k) \delta(X - \beta_k), \beta_k = \alpha_k - \mu_A \dots\dots\dots (6)$$

式 (5) および (6) において,  $p(k)$ ; ソリトンの振幅分布,  $\delta$ ; Dirac のデルタ関数および  $\alpha_k$ ;  $p(k)$  における  $k$  番目の階級値を表す. さて, 式 (1) に従い式 (6) の分布を作り出す確率変数  $Y$  の確率密度関数を理論的に求めるためには, 高次の積分方程式を解くことが必要になる. しかしながら, これを解析的に行うことは非常に困難であるため, ここでは次式を仮定する.

$$f_X(X) \propto f_Y(Y) \dots\dots\dots (7)$$

すなわち, 確率変数  $X$  あるいは  $A$  と  $Y$  の分布形が互いに相似の関係にあるとすれば, AR 誤差項  $Y$  の確率密度関数  $f_Y(Y)$  は次式で与えられる.

$$f_Y(Y) = \sum_k p(k) \delta(Y - \sqrt{1-\gamma^2} \beta_k) \dots\dots\dots (8)$$

上式は, 式 (7) の仮定の下で導かれる分布であるため, この仮定の妥当性について検討を行なっておく必要がある. ここでは, モンテカルロ法を用いてその検討を行なった. 図-1 は, 式 (8) に従う確率変数  $Y$  を乱数により生成し, これを式 (1) および (2) に代入して得られる確率変数  $A$  の分布形と期待分布としての式 (5) を比較したものであり, (a) および (b) はそれぞれ Weibull 分布および標本分布を期待分布として与えた場合を示す. なお, このとき発生させた乱数の個数は 1000 個である. 式 (7) の仮定が妥当なものであるならば, 乱数の発生個数の増大に伴い, モンテカルロシミュレーションによる分布形は期待分布に収束していくはずである. い

ずれのケースにおいても期待分布とシミュレーション結果とはほぼ一致しており, 式 (7) の仮定により得られる式 (8) が AR 誤差項の良い近似分布となっていると判断できる.

以上より, 式 (1) で表されるソリトンの振幅に関する AR モデルは, その確率分布  $p(k)$  と前後の振幅の相関係数  $\gamma$  によって一意的に決定されることがわかる.

## (3) Markov 過程と自己回帰過程との関係

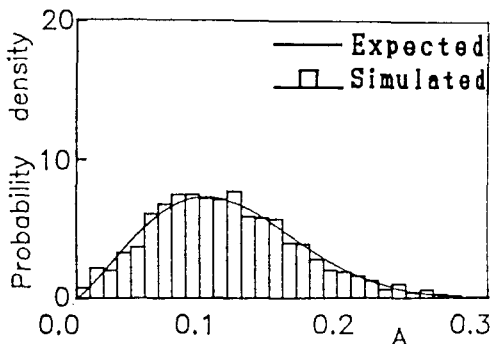
不規則波浪における波高の時系列を Markov 過程として扱う試みが木村<sup>1),2)</sup> によって提案されており, その理論は一般に広く認められている. このため, 以下では, Markov 過程と本モデルにおいて用いた AR 過程とを比較し, 若干の考察を行なう.

確率過程論によれば,  $p$  重 Markov 過程と  $p$  次 AR 過程とが厳密に同値関係を満足するためには, 確率過程の純非決定性, 定常性および正規性が条件として必要となるが, 一般に, 波高は Rayleigh 分布のような左右非対称の分布形に従うため, これら両者の同値関係は保証されない. すなわち, 前後の波高を結びつける AR 過程における AR 母数と Markov 過程における遷移確率とは一意的な関係を持たないために, これら両者は厳密には一致しなくなる. しかしながら, 実用的には 1 次 AR 過程は 1 重 Markov 連鎖として近似的に扱うことが可能であることも指摘されており, 本モデルは, 定性的には, ゼロアップクロス波高の時系列に対して Markov 過程を適用した木村のモデルと同じものであると言える. ただし, モデルとしての扱い易さおよび理解の容易さからすれば, AR モデルの方がより直接的であると思われる.

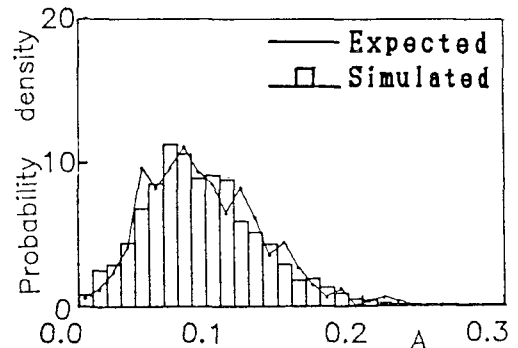
## 3. 時系列モデルの適用性

## (1) 観測記録

2. において提案したソリトンの振幅に関する時系列モデルの適用性に用いた波浪の観測記録は, 次の 3 種類のデータであるが, これらの観測記録については, 既に



(a) Weibull 分布を期待分布とした場合 (CR 20)



(b) 離散分布を期待分布とした場合 (TP 20, P 10)

図-1 1 次の AR モデルに基づく振幅分布と期待分布との比較

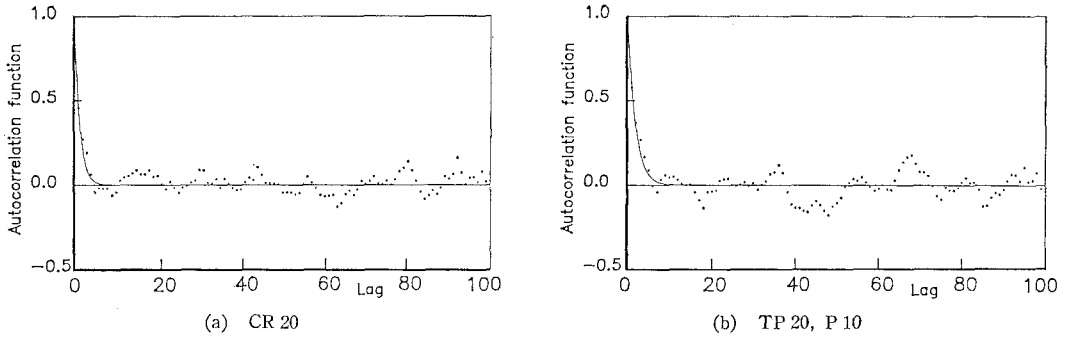


図-2 ソリトンの振幅の連りに関するオートコレログラム

多くの研究者により詳細な解析結果が報告されているので、ここでは、参考文献を挙げるにとどめる。

データ番号 DNO. 7: 1981 年 3 月 7 日に京都大学防災研究所附属大湊波浪観測所において得られたものの一部<sup>4)</sup>。

データ番号 CR 20: 1981 年 5 月 21 日に Costa Rica 国の Cardera 港において得られたものの一部<sup>5), 7)</sup>。

データ番号 TP10 および TP20: 1978 年 11 月 10 日および 20 日にアメリカ合衆国西海岸の Torrey Pines Beach において得られたものの一部<sup>5), 8)</sup>。

## (2) 自己回帰モデルの同定

本モデルでは、時間軸上におけるソリトンの振幅の連なりが自己回帰的性質を有することに着目してその理論展開を行なっているため、現地データにおいてもこのような性質が存在することを確認しておく必要がある。図-2 は、ソリトンの振幅の連りに関するオートコレログラムの一例を示したものであり、図中の実線は式 (4) で与えられる振幅の自己相関関数を表す。なお、横軸のラグとしては、ソリトンの番号の差を用いている。これより、ラグが 10 以上の大きな値となる範囲において、ゼロ周りの大きな変動が見られるものの、ラグの増大に伴う相関係数の低下傾向は式 (4) の自己相関関数とほぼ一致している。この点を詳細に検討するために自己回帰モデルの同定を行なった結果を表-1 に示す。表中の  $p$  は FPE 法<sup>9)</sup> によって推定された AR 次数および  $\Phi(n)$  は Yule-Walker 推定により得られた  $n$  次の AR 母数を表す。これより、必ずしも低次の AR モデルによって振幅の時系列を表現することはできないと判断されるものの、推定された高次の AR 母数は 1 次のそれに比べてかなり小さく、実用的には 1 次の AR モデルによって波浪の時系列を十分評価できるものと思われる。

## (3) AR 誤差項の標本分布

前述の AR 誤差項の理論分布を与える式 (8) は、式 (7) の仮定の下で得られたものであるため、現地データを用いてその適用性を検証しておく必要がある。

表-1 AR 過程のパラメータ同定の結果

| Data No.<br>(Location) | $\gamma$ | $p$ | $\Phi(n)$                                                       |
|------------------------|----------|-----|-----------------------------------------------------------------|
| DNO.7 (P. 1)           | 0.025    | 3   | 0.029 (1)<br>0.131 (2)<br>-0.059 (3)                            |
| CR 20                  | 0.456    | 5   | 0.413 (1)<br>0.067 (2)<br>0.086 (3)<br>-0.032 (4)<br>-0.088 (5) |
| TP 10 (P 7 A)          | 0.141    | 1   | 0.141 (1)                                                       |
| TP 20 (P 4)            | 0.693    | 2   | 0.771 (1)<br>-0.116 (2)                                         |
| TP 20 (P 10)           | 0.571    | 1   | 0.571 (1)                                                       |

図-3 は、各測点におけるソリトンの振幅  $A$  の連なりを式 (1) および (2) に適用して得られる AR 誤差項  $Y$  の標本分布と式 (8) で与えられる理論分布を比較したものであり、参考として正規分布も併せて示してある。これらより、理論結果と標本統計量が良く一致しており、ここでの理論展開の妥当性が検証される。

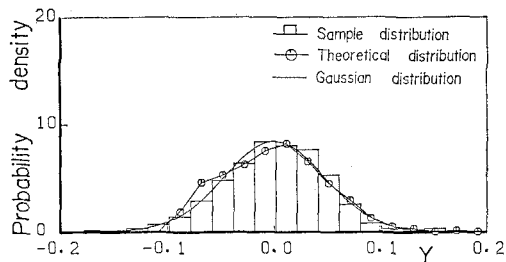
## (4) 自己回帰モデルと波群との関係

一般に波群統計量として用いられているものとしては、i) 平均連長・平均トータルラン、ii) groupiness factor および iii) 前後の波高の相関係数が挙げられる。i) は連特性、ii) は包絡波形の顕在性、iii) は AR 性 (Markov 性) を表す代表値である。木村の理論では、iii) をパラメータとして与え、これを用いて i) を理論的に表すことができ、ii) についても、narrow-band の条件の下で厳密に評価することが可能となっている。これに対して、1 次 AR 過程を決定するパラメータは前後の振幅の相関係数だけであるため、AR モデルでは iii) しか考慮できないことになる。そこで以下では、AR モデルに基づくモンテカルロシミュレーションを行い、その結果と観測結果とを比較することにより、AR モデルと波群との関係を

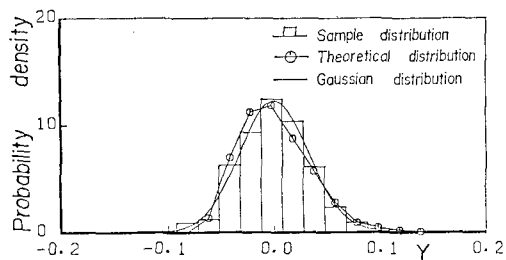
明らかにする。

a) 連特性 表-2 は、観測波形とシミュレーション波形に関する波群統計量を比較したものである。平均連長およびトータルランについて見てみると、多少のばらつきはあるものの、シミュレーション結果は観測結果にはほぼ一致しており、AR モデルによる連特性の評価の可能性が伺われる。また、このことから、相関係数のもたらす波群に関する情報と連長・トータルランのそれとは同値なものであり、AR 性 (Markov 性) と連特性とは表裏一体の関係にあると考えられる。

b) 波群の顕在性 表-2 の groupiness factor について見ると、TP20 (P10) を除く全てのケースにおいて、シミュレーション結果は観測結果に近い値を示している。図-4 は、TP20 (P10) の観測波形とシミュレーション波形の一例であり、groupiness factor に多少の相違はあるものの、波群のようすはよく対応しており、AR モデルによって包絡波形までも表現することはある程度まで可能であることがわかる。図-5 は、シミュレーションにより得られたソリトンの振幅に関するオートコログラムを示したものの一例である。前述の図-2 において、ラグの大きな範囲での変動の存在が確認されたが、式 (4) の自己相関関数に一致するはずのシミュレーション結果においてさえも同様な変動が見られる。このシミュレーションでは、式 (1) における AR 誤差項  $Y$  は Lehmer の乗算型合同法による擬似一様乱数を用いて生成されているが、生成された  $Y$  の系列相関が全く存在しない場合に振幅の自己相関関数は式 (4) に厳密に一致する。ところが、これについて若干の検討を行なった結果、生成された  $Y$  の自己相関係数は  $10^{-1}$  から  $10^{-2}$  のオーダーを有しており、これが図-5 における変動の原因となっていることが判明した。このことは、この変動が乱数の精度に起因した統計的変動性に依るものであることを示す結果と思われる。また、図-4 に示した観測波形の包絡波に含まれる搬送波の平均個数は 9 個であるが、図-5 において、そのほぼ定数倍の位置に変動のピークが存在していることがわかる。つまり、ラグと時間とを直接結び付けることは難しいため、正確な議論を行なうこと



(a) CR 20



(b) TP 20, P 10

図-3 AR 誤差項  $Y$  の分布

表-2 観測波形とシミュレーション波形の波群統計量の比較

| Data No.<br>(Location) | Mean of run length |           | Mean of total run |           | Groupiness factor |           |
|------------------------|--------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|
|                        | Observed           | Simulated | Observed          | Simulated | Observed          | Simulated |
| DN0.7(P,1)             | 1.87               | 1.98      | 4.09              | 4.27      | 0.570             | 0.562     |
| CR 20                  | 3.05               | 2.65      | 6.13              | 5.68      | 0.792             | 0.738     |
| TP10(P7A)              | 2.26               | 2.15      | 4.53              | 4.74      | 0.595             | 0.600     |
| TP20(P4)               | 4.88               | 3.52      | 9.21              | 7.30      | 0.830             | 0.888     |
| TP20(P10)              | 3.04               | 3.10      | 6.73              | 6.54      | 0.770             | 0.635     |

はできないものの、平均周期を用いて換算すると、包絡波形の周期の定数倍に対応したラグにおいてコログラムの変動のピークが存在することになる。さらに、図-2 と図-5 における変動のピーク位置はほとんど一致しており、包絡波形の周期は AR モデルによって決定され得ることが予想される。これらのことにより、モデルと

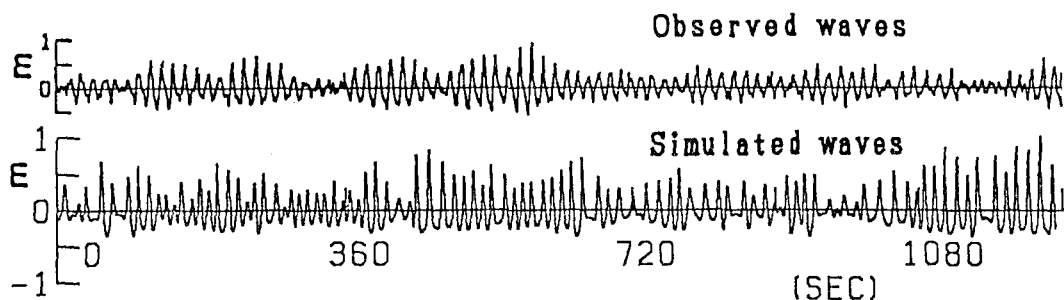


図-4 観測波形とシミュレーション波形との比較 (TP 20, P 10)

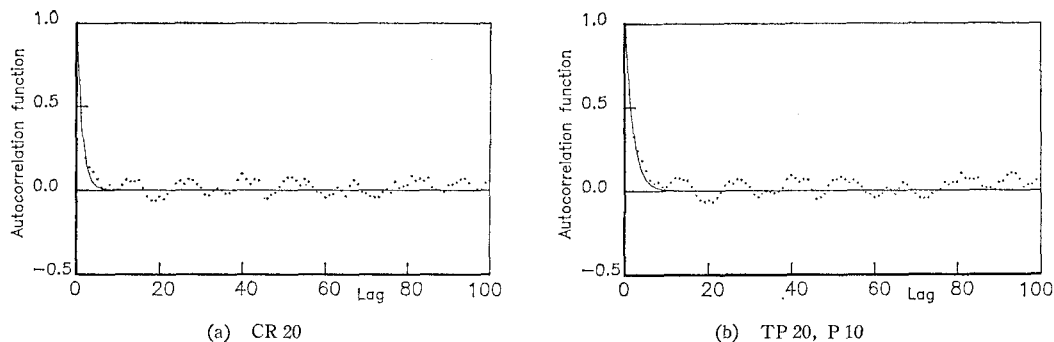


図-5 モンテカルロシミュレーションにより得られるソリトンの振幅に関するオートコレログラム

しての自己相関関数は式 (4) で与えられるものの、その実現の結果として、AR 誤差項の極めて微小な系列相関に起因した統計的変動性が図-2 および 5 に見られるような変動を生みだし、これが包絡波形としての振幅の周期的な変動を現出する一因になっているとも考えられる。

以上より、理論的ではないものの、実用的には、木村の理論と同様に、AR モデルによっても上述の i) および ii) の性質を評価することは十分可能であると判断できる。

#### 4. 結 語

以上、波高の時系列における自己回帰性（いわゆる Markov 性）に着目して、不規則ソリトン列の振幅の連なりに対して自己回帰過程を適用したモデルを提案し、これが現実の不規則波浪の時系列特性を反映したものになり得ることを明らかにした。しかしながら、前後の振幅の結合確率密度関数や AR 母数としての相関係数と連および groupiness factor の関係などを理論的に示すまでには至っておらず、本モデルは、木村の理論に比べまだまだ未熟なモデルと言わざるを得ない。今後は、これらの点を理論的に明らかにすることにより、本モデルの実用性を高めていきたいと考えている。また、紙面の都合で割愛したが、本モデルを単に時系列モデルとして位置付けた場合には、個々波としてゼロクロス波を用いることも可能であり、AR モデルは木村の理論と同様に海の波の時系列を表す普遍的なモデルになり得ると思われる。

る。

なお、本研究で用いた Cardera Port および Torrey Pines Beach のデータは、それぞれ横浜国立大学の合田良実教授（運輸省港湾技術研究所前所長）および Univ. of Delaware の Robert A. Dalrymple 教授に提供して頂いたものであり、ここに記して謝意を表す。

#### 参 考 文 献

- 1) Kimura, A.: Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th Conf. on Coast. Eng., A. S. C. E., pp. 2955~2973, 1980.
- 2) 木村 晃: 不規則波浪の隣り合う波高の相関性について, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 136~140, 1987.
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: Statistical properties of wave groups in a random sea state, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Vol. A312, pp. 219~250, 1984.
- 4) 土屋義人・安田孝志・篠田成郎: 波浪ソリトン群とその統計理論, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号 B-2, pp. 691~716, 1986.
- 5) 篠田成郎・安田孝志・川口智也・土屋義人: 海岸波浪の時系列特性とソリトンモード, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 141~145, 1987.
- 6) Goda, Y.: Analysis of wave grouping and spectra of long-travelled swell, Rep. Port and Harb. Res. Inst., Vol. 22, No. 1, pp. 3~41, 1983.
- 7) 土屋義人・安田孝志・篠田成郎: うねりのソリトンモードと波群構造, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 188~192, 1984.
- 8) Guza, R. T. and E. B. Thornton: Velocity moments in nearshore, Jour. Geophys. Res., Vol. 79, pp. 1524~1530, 1980.
- 9) Akaike, H.: Statistical prediction identification, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 22, No. 2, pp. 203~217, 1970.