

現地波浪の波群の空間変化とそのモデル方程式による記述

安田孝志*・田中光宏**・鵜飼亮行***・土屋義人****

1. 緒 言

現地波浪に見られる波群については、主として統計的観点から、連長や GF(Groupiness Factor) などの波群統計量による評価が試みられ、時系列としての波群の特性はかなり明らかにされてきた。しかし、大水深海域から浅海域に至る過程での波群の空間変化については、観測記録が十分に得られていないこともあって、その実態は余り明らかになっていない。

一方、こうした波群を変調不安定として力学的観点から理解する試みもなされているが、波群を伴う現地波浪を波動方程式の下で取り扱い、その空間変化まで含めて力学的に記述する試みは余り進んでいない。これについては、観測記録による実態の解明が遅れていることに加え、KdV 方程式のような優れた性質を持つモデル方程式が深海域から浅海域にかけての現地波浪に対しては確立されていないことが大きな理由と考えられる。原理的には Zakharov 方程式によって記述できるが、実際にこれを現地波浪に適用してその空間変化を記述することは極めて困難である。また、Dommermuth および Yue の手法¹⁾は計算上の労力をかなり軽減しているが、初期条件として空間波形と同時に自由表面に沿った速度ポテンシャルを必要とするため、時間波形しか得られない現地波浪への適用には困難がある。

そこで、本研究では、日本海において得られた観測記録を基に波群の空間変化について検討する一方、深海域から浅海域にかけての現地波浪に適用できる簡便なモデル方程式を提案し、これによって従来不明な点の多かった深海域から浅海域に至る現地波浪の波群の空間変化の解明が可能となることを示す。

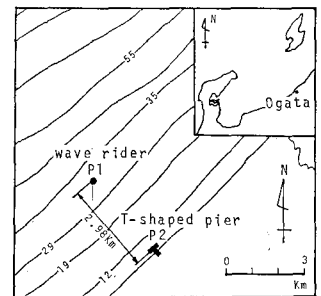
2. 現地波浪の波群とその空間変化

ここで用いる観測記録は、図-1 に示す大湊海岸の沖合 2.98 km (水深 32.8 m) 地点に投入された wave rider および同海岸に設置されている T 型栈橋の先端 (水深

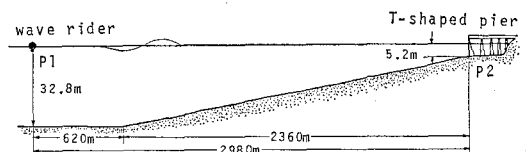
5.2 m) に固定されている容量式波高計によって得られたものである。wave rider は、現地波浪の 1 次元的空間変化を観測するため、栈橋から沖合に逆屈折図を作成し、これを基に決定した観測点に投入された。沖側測点 (P1) から 620 m 一定水深が続き、そこから岸側測点 (P2) まで勾配が約 0.012 の一様傾斜面となっており、 kph の値を 1 としても P1 から P2 に至る海底地形の変化は非常に緩やかと言うことができる。両測点間の水平距離は約 2,980 m であり、この間を周期 8 秒の波の群速度で進むとして位相差を計算すると約 455 秒となることから、この時間差だけずらしたものが同一の波列集団に属するものとして扱うことにした。

ここでは、波群の 1 次元的空間変化の実態を明らかにするため、目視観測結果および方向スペクトル図を基に長波峯線を有し、両測点を結ぶ線上をほぼ真直ぐに入射して来た無風時の波を選んで解析した。表-1 はその結果であり、観測波の分散性に関わる kph 、非線形性に関わる Ursell 数 $Ur(=\bar{H}L^2/h^3)$ 、Skewness, $S(2f_p)/S(f_p)$ および波形勾配 $H_{1/3}/L_{1/3}$ 、スペクトルのバンド幅に関するスペクトル尖鋭パラメータ Q_p および波群特性に関する平均連長 $\bar{j}_1$ ($\bar{H}$

および $H_{1/3}$ を設定値としてそれぞれ計算), 繰返し長さ $\bar{j}_2$ (同様に $\bar{H}$ および $H_{1/3}$ を設定値として計算), GF (Groupiness Factor) および前後のゼロアップ波



(a) 平面形状



(b) 断面形状

図-1 大湊海岸の地形と観測点

* 正 会 員 工 博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

** 理 博 岐阜大学助手 工学部共通講座

*** 学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科

**** 正 会 員 工 博 京都大学教授 防災研究所

表-1 測点 P1 および P2 での観測波の諸量

No.	observed	$H_{1/3}$	$T_{1/3}$	$k_p h$	U_r	$(H/L)_{1/3}$	skewness	$S(2f_p)/S(f_p)$	Q_p	$\bar{J}_1(\bar{H}/H_{1/3})$	$\bar{J}_2(\bar{H}/H_{1/3})$	GF	ρ	observed time
1	P 1	1.63	7.38	1.54	0.17	0.019	-0.09	0.106	1.50	2.47/1.44	4.88/4.88	0.328	0.248	1987.11.30 11:30~
	P 2	1.86	6.73	0.53	12.7	0.042	0.72	0.082	2.30	2.58/1.80	5.56/5.56	0.365	0.433	
2	P 1	1.56	7.29	1.72	0.16	0.020	-0.02	0.041	1.94	2.58/1.55	5.29/5.29	0.342	0.418	1987.11.30 14:30~
	P 2	1.85	6.77	0.53	12.8	0.041	0.69	0.077	2.78	2.97/1.65	6.42/6.42	0.358	0.493	
3	P 1	1.38	7.38	1.92	0.15	0.017	-0.08	0.018	2.73	3.16/1.69	6.36/6.36	0.355	0.506	1987.11.30 20:30~
	P 2	1.38	6.59	0.57	10.3	0.045	0.48	0.046	3.69	2.86/2.19	6.61/6.61	0.382	0.557	
4	P 1	1.10	6.96	1.92	0.10	0.015	-0.13	0.025	1.64	2.67/1.69	5.65/5.65	0.366	0.357	1987.11.30 23:30~
	P 2	0.96	5.99	0.57	1.92	0.042	0.51	0.049	3.51	2.36/1.98	6.24/6.24	0.412	0.476	
5	P 1	1.18	7.39	1.92	0.11	0.014	0.01	0.014	2.38	3.20/1.96	7.01/7.01	0.368	0.586	1987.12.1 2:30~
	P 2	1.05	6.30	0.61	5.94	0.024	0.43	0.040	3.94	3.82/2.09	8.02/8.02	0.399	0.613	

高の相関係数 ρ の両測点での値を示している。ここで、 f_p はスペクトルのピーク周波数、 k_p はそれに対応した波数および h は水深であり、 Q_p は次式で定義している。

$$Q_p = 2 \int_0^\infty f S^2(f) df / \int_0^\infty S(f) df \quad \dots\dots\dots (1)$$

測点 P1 での $k_p h$ が 2 に近い値であるのに対し、測点 P2 では $k_p h$ が 1 以下となっており、表に示した観測記録が大水深海域から浅海域に至る波群の空間変化の解明に有効であることがわかる。P1 から P2 に至る過程での skewness, $H_{1/3}/L_{1/3}$, U_r , および $S(2f_p)/S(f_p)$ の変化から、この間に非線形性がかなり強化されており、非線形の影響が無視できないことがわかる。図-2 は、No. 2 の波のパワースペクトルの空間変化を示したものであり、浅水化における非線形性の影響がスペクトルに明確に顕れている。その一方で、スペクトルの集中度を示す Q_p は増大しており、P1 から P2 に至る過程で周波数分散がかなり進んでいることがわかる。このような非線形性の強化とスペクトルの狭帯域化は、変調不安定による波群の発達を促がすものと考えられる。そこで、波群統計量の P1 と P2 の間での変化に着目すると、 $\bar{J}_1(\bar{H})$ では必ずしも増大傾向は認められないが、 $\bar{J}_2(\bar{H})$ および GF についてはいずれも増大しており、これらに関する限り、波群は必ずしも一様に偏平化に向うもので

はないものと判断される。このことは、No. 2 の観測波形 $\eta(t)$ と SIWEH $E(t)$ の空間変化を示した図-3 から

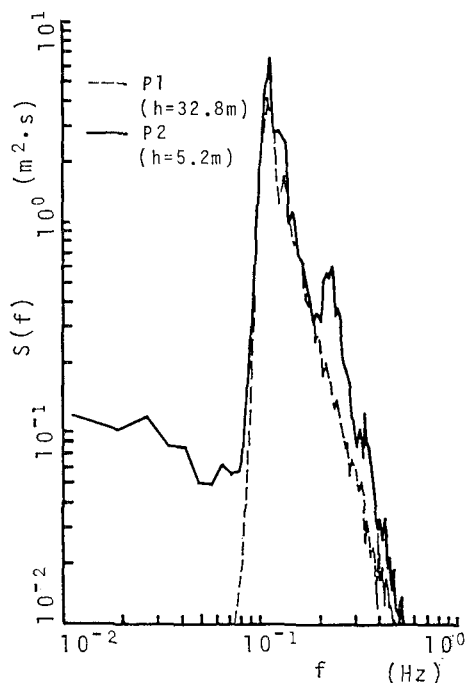


図-2 観測波 (No. 2) のスペクトルの空間変化

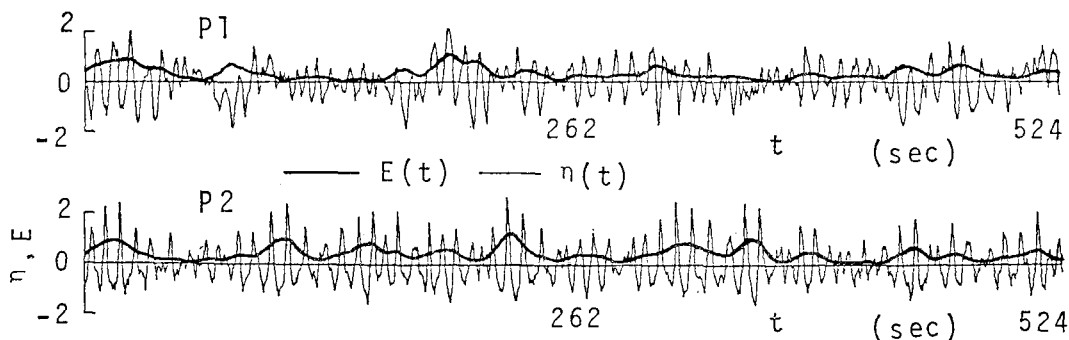


図-3 観測波 (No. 2) の波形および SIWEH の空間変化

も首肯されよう。このような事実は $kh < 1.36$ では波群の偏平化が進むとする NLS 方程式に基づく描像に必ずしも一致しないが、最低次の変調 Stokes 波の波動方程式とも言うべき NLS 方程式によって現地波波浪を直接理解しようとすることに無理があると考えらるべきだろう。このような波群の空間変化の機構を解明し、その記述を行うには、非線形性および分散性の評価に十分な精度を有し、バンド幅の制約を受けない簡便なモデル方程式が不可欠と言えよう。

3. モデル方程式

3.1 モデル方程式の考え方

KdV 方程式は浅海域の波のモデル方程式としては優れた性質を有し、強い非線形性を持つ碎波直前の波にまで適用出来るが、分散性が卓越した大水深海域での波には使えない。その原因は分散を最低次でしか評価していないことにあり、式中の分散項の精度を改善すれば、その適用領域は深海域まで拡張出来るものと考えられる。したがって、線形分散関係を満足した KdV 型方程式をモデル方程式として導けば、これを用いることによって大水深海域から浅海域に至る過程での波群の空間変化を明らかに出来よう。

いま、 x 方向に進む線形分散波の波動方程式を考えれば、それは次式で与えられる。

$$\partial_t \eta + \sqrt{gh} [\partial_x \eta + (h^2/6) \partial_x^3 \eta] + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n C_{2n} (\partial_x)^{2n+1} \eta = 0 \quad (2)$$

ここに、 ∂_t および ∂_x はそれぞれ t および x に関する偏微分記号、 C_{2n} は波速 c を次式のように波数 k のべき級数として展開したときの係数である。

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(g/k) \tanh kh} \\ &= \sqrt{gh} [1 - (kh)^2/6 + \dots] \\ &= \sqrt{gh} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} k^{2n} \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 g は重力の加速度である。一方、KdV 方程式は

$$\eta_t + \sqrt{gh} [\eta_x + (h^2/6) \eta_{xxx}] + (3/2) \sqrt{gh} \eta \eta_x = 0 \quad (4)$$

で与えられ、非線形項を含むものの分散項については最低次でしかない。しかし、分散項を式 (2) のものに置き換えれば、線形分散関係を厳密に満足した非線形波動方程式が次式のように仮定できる。

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \sqrt{gh} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{2n} \partial_x^{2n+1} \eta \\ + (3/4) \sqrt{gh} \partial_x \eta^2 = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

これは分散項として無限階の導関数を含むため、このままでは実際に解くことができず、KdV 方程式に対して分散項を厳密にしたことの意義が生かされない。そこで、式 (5) を波数空間上で扱うことにし、波動解を

$$\eta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(t) \exp(ik_m x) \quad (6)$$

と仮定すれば、式 (5) は次式のモード発展方程式に書き換えられ、式 (5) におけるような問題は解消される。

$$\begin{aligned} dA_m/dt + ik_m \sqrt{gh} \left[\sqrt{(1/k_m h)} \tanh k_m h A_m \right. \\ \left. + (3/2) h^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{m-j} \cdot A_j \right] = 0, \\ m: -\infty \sim \infty \quad (7) \end{aligned}$$

式 (4) の KdV 方程式に対しても同様に式 (6) を代入すれば、次式のモード発展方程式に書きかえられる。

$$\begin{aligned} dA_m/dt + ik_m \sqrt{gh} \left[1 - (1/6)(k_m h)^2 A_m \right. \\ \left. + (3/2) h^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{m-j} \cdot A_j \right] = 0, \\ m: -\infty \sim \infty \quad (8) \end{aligned}$$

式 (7) を KdV 方程式に対応する式 (8) と比較すれば、波数空間上で扱うことによって、単に式 (5) の困難が解消されるというだけでなく、分散項の精度を改善したことの意味が生かされるようになったことがわかる。すなわち、式 (8) では A_m の変化が k_m^3 に依存し、高波数成分に対して不安定であると同時に $(k_m h)^2 < 6$ の適用上の限界が存在するのに対し、式 (7) では高々 k_m^2 に依存するだけであるために高波数成分に対しても比較的安定である上、 $k_m h$ に適用上の限界が存在しないため、任意のスペクトルを持つ波に適用が可能となっている。

モデル方程式のもうひとつの注目すべき特徴として変調不安定性が挙げられる。即ちこの方程式の Stokes 波解は $kh > 1.15$ においては変調不安定を示す。一方、KdV 方程式はすべての kh の値に対して変調不安定性を持たない。この事実よりモデル方程式は波群特性の発展を記述する上で KdV 方程式より優れた性質を有していると思われる。

3.2 現地波浪に対するモデル方程式

上述の式 (7) は、時間発展型であるため、固定観測点での時間軸上の水位変動として観測される現地波浪にそのまま適用することは出来ない。また、現地波浪が 1 次元的に扱えたとしても、大水深から浅海域に至る過程での水深変化の影響も評価しておく必要がある。そこで、まず、現地波浪の長距離伝播の記述に都合の良いように $\sqrt{gh}$ で進む移動座標上で考えることにすれば、空間発展型の線形分散波の波動方程式は次のように書かれる。

$$\partial_x \eta + \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau - \sigma) \partial_\sigma \eta d\sigma = 0 \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} F(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega) - \sqrt{gh}}{c(\omega)} e^{-i\omega(\tau - \sigma)} d\omega \\ \tau &= \int dx / \sqrt{gh} - t, \quad \omega = 2\pi f \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、波動解を

$$\eta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(x) \exp(i\omega_m \tau) \quad \dots\dots\dots (11)$$

と仮定して式(9)を周波数空間上で扱い、モード発展方程式に書き換えれば、次のように簡単な表示となる。

$$\frac{dA_m}{dx} + ik(\omega_m)[C(\omega)/\sqrt{gh}-1]A_m = 0,$$

$$m: -\infty \sim \infty \quad \dots\dots\dots (12)$$

ついで、式(7)を導出した上記の例にならい、水深変化の影響を取り込んだ動座標上の空間発展モデル方程式を周波数空間上での無次元モード発展方程式として導けば次のようになる。

$$\begin{aligned} d\tilde{A}_m/dx^* + ik_m^*(c^* - h^{*1/2})\tilde{A}_m \\ + \sum_{j=-\infty}^{\infty} i\frac{3}{2}k_m^*h^{*-7/4}\tilde{A}_{m-j}\tilde{A}_j = 0, \\ m: -\infty \sim \infty \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x/h_0, \quad k_m^* = k(\omega_m)h_0, \quad h^* = h/h_0, \\ c^* &= c(\omega_m)/\sqrt{gh_0}, \quad A_m/h_0 = \tilde{A}_m h^{*-1/4} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

であり、 h_0 は原点での水深を示す。

式(13)を各モードごとに解いて振幅 A_m の空間発展を計算すれば、式(11)によって深海域から浅海域に至る不規則波の時間波形の空間変化を知ることが出来、さらにそれを基に波群統計量の空間変化も計算できる。

モード発展方程式は、時間あるいは空間の刻みを一定値以下にすれば4次のRunge-Kutta-Gill法によって精度良く安定して解ける。また、式(7)および式(13)は共に η に関する1次および2次の積分量を保存量として持つため、この点に着目して数値解の方程式に対する精度評価を行うことができる。ここでは、保存則に対する誤差が0.1%以下に留まるようにして数値計算を実施しており、方程式に対する数値解の精度はほぼ厳密といえる。

3.3 モデル方程式の精度

モデル方程式(7)および(13)は共に流体力学の基礎式から理論的に導びかれたものではないため、その精度を理論的に評価することは出来ない。そこで、一様水深場での完全流体の基礎方程式をDoldおよびPeregrine²⁾のBIMによって厳密に解き、式(7)の数値解をこれと比較することによってモデル方程式(7)の基礎式に対する精度について検討を行う。図-4(a)は初期波形として不安定な孤立波

$$\eta/h_0 = 0.1 \operatorname{sech}^2 x^* \quad \dots\dots\dots (15)$$

を与えたときの波形の時間発展について比較したものである。なお、BIMにおいて必要となる $t=0$ での水面における速度ポテンシャル ϕ_s については、計算開始直後の式(7)による波形変化量より計算している。また、図-4(b)は参考のためにKdV方程式(8)の数値解に対して同様な比較を行ったものである。同一の初期波形から

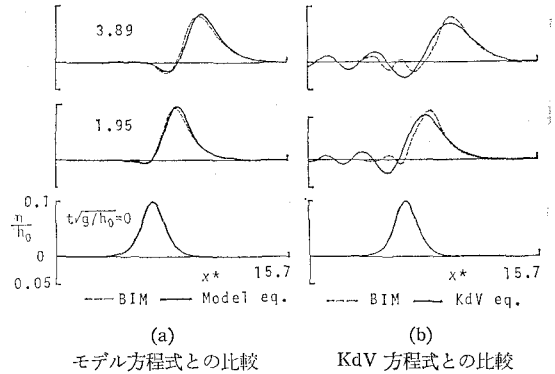


図-4 孤立波の波形変化に関する基礎式のBIMによる数値解との比較

出発しながらこれら両図でBIMによる $t>0$ での波形も異なっているのは ϕ_s をそれぞれ式(7)および(8)で計算しているためである。これから、式(15)に与えたような振幅に比べて鋭い波形を持つ波の場合、高波数成分の分散効果の評価が重要となり、KdV方程式の解とBIMによる解との相違が増大しているが、モデル方程式によるものはBIMによる解とほとんど一致しており、モデル方程式がKdV方程式よりも精度的に優れているだけでなく、流体力学の基礎式に対しても何ら遜色のない精度を有していることがわかる。

3.4 現地波浪への適用性

モデル方程式の現地波浪への適用性について検討する

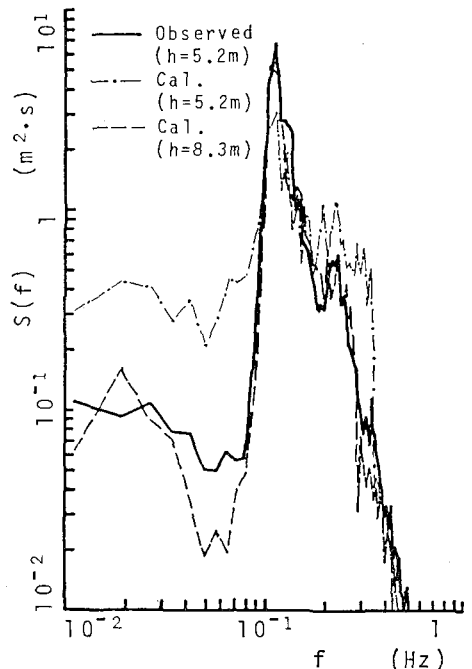


図-5 モデル方程式によるスペクトルと観測結果との比較

表—2 モデル方程式による波群統計量と観測結果との比較

DATA	Q_b	$\bar{f}_1(\bar{H}/H_{1/3})$	$\bar{f}_2(\bar{H}/H_{1/3})$	GF	ρ
observed	2.78	2.97/1.65	6.42/6.42	0.356	0.493
model eq.	2.57	2.56/1.88	5.28/5.28	0.357	0.393

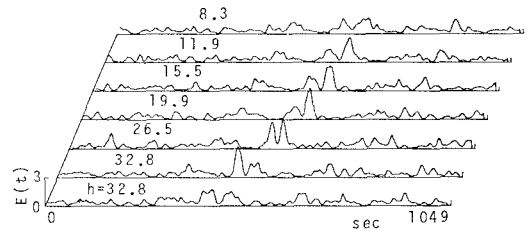
ため、測点 P1 での観測波形 (No. 2) を式 (13) に与え、測点 P2 に至る時間波形の空間変化を計算した。図—5 はこうして計算された水深 5.2 m (測点 P2) および 8.3 m 地点での波形より求めたパワースペクトルを測点 P2 での観測結果 (No. 2) と比較したものである。モデル方程式には減衰項や各モードの飽和条件が含まれていないことなどもあって、高周波成分が過大に増幅され、その影響が水深 5.2 m でのスペクトルの広帯域化として顕れ、水深 5.2 m での計算結果と観測結果との対応は良くない。しかし、水深 8.3 m のものを観測結果と比較すると、両者の対応は極めて良好であることがわかる。そこで、減衰項や各モードのパワーの飽和条件の導入は今後の課題として、ここでは、水深 8.3 m での計算結果を測点 P2 におけるものと扱い、波形および波群統計量に関して観測結果との比較を行う。表—2 はその比較を示したものであり、計算結果は水深 8.3 m のものであるが、両者はほぼ対応しているものと見ることができる。以上より、測点 P1 から水深 8.3 m 地点までの式 (13) による計算結果は信頼できるものと判断し、次章においてその結果を基に波群の空間変化について考察する。

4. モデル方程式による波群の空間変化

大水深海域から浅海域に至る過程での波群の空間変化を明らかにするため、上述のモデル方程式による計算結果を基に測点 P1 から水深 8.3 m 地点に至る波群統計量の空間変化について検討する。表—3 および図—6 はそれぞれ各水深での統計量および SIWEH の空間変化を示したものである。これらから、水深 32.8 m の一定水深部では伝播の過程で GF や $\bar{f}_1$ が一様に増大し、波群が発達を続けていることがわかる。しかし、波が斜面上を進むようになると、GF や $\bar{f}_1$ に一様の増加が見られなくなり、GF は $k_p h = 1.46$ において最大となった後、若干の変動を繰り返しながら減少に向かい、また $\bar{f}_1$ も $k_p h = 1.18$ において最大となった後は同様な傾向を示す。これらの結果は、 $k_p h = 1.15$ 付近で波群の性質に何らかの変化が生じることを示唆するものであるが、 $k_p h < 1.36$ では、波群の偏平化が一様に進むという NLS 方程式に基づく描像を支持するものではない。ともあれ、大水深域から浅海域に向う過程で波群の発達減衰のあることは明らかになったように思われる。

表—3 モデル方程式による波群の統計量の空間的变化

DEPTH (cm)	$k_p h$	GF	$\bar{f}_1$	ρ
32.8	1.72	0.375	2.38	0.474
32.8	1.72	0.400	2.48	0.523
32.8	1.72	0.434	2.68	0.510
31.2	1.65	0.453	2.73	0.533
28.7	1.55	0.426	2.69	0.474
26.5	1.46	0.456	2.69	0.493
24.4	1.37	0.440	2.54	0.514
22.1	1.27	0.449	2.67	0.489
19.9	1.18	0.431	3.00	0.504
18.5	1.13	0.426	2.32	0.479
17.0	1.06	0.417	2.92	0.530
15.5	1.00	0.421	2.35	0.369
14.0	0.93	0.422	2.35	0.369
12.6	0.88	0.413	2.52	0.459
11.9	0.85	0.397	2.70	0.467
9.8	0.76	0.385	2.63	0.415
9.1	0.67	0.367	3.00	0.592
8.3	0.63	0.357	2.57	0.393



図—6 モデル方程式による SIWEH の空間的变化

5. 結 語

大水深および浅海域での観測記録を比較することにより、浅海域の波群に格別偏平化の傾向は見られず、むしろ波群が発達している傾向が見られることを明らかにした。ついで、この間の波群の空間変化について検討するため、うねりのモデル方程式を提案し、それによって波群の力学的取り扱いが可能となることを示した。

最後に本研究は総合研究 (A) (代表者 土屋義人 京大教授) による成果であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Dommermuth, D. and D. Yue: A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, J. Fluid Mech., Vol. 184, pp. 267~283, 1987.
- 2) Dold, J. W. & Peregrine D. H.: An efficient boundary-integral method for steep unsteady water waves. In Numerical Methods for Fluid Dynamics II (ed. K. W. Morten & M. J. Baines, Clarendon), pp. 671~679, 1986.