

摩擦のある緩斜面上のソリトン解による海岸波浪の表示

安田孝志*・西本光伸**

1. 緒言

長い伝播過程を経て浅海域に進入して来た海岸波浪は、一般に一次元的取り扱いが可能となるが、海底地形の影響を受けるため、その記述には非線形性および不規則性に加えて水深変化や海底摩擦などのせつ動の影響を考慮した波動理論が要求される。しかしながら、従来の扱いでは海底勾配や海底摩擦の影響は無視されるか、あるいは波別解析法に実験式を併用する半経験的手法が用いられ、海底地形の影響を受けた海岸波浪の挙動を力学的に記述する試みは見るべき成果を得るに至っていない。

ここでは、摩擦のある斜面上のソリトン解を導き、これを傾斜海浜上の海岸波浪の基準モードとして扱い、その浅水変形やそれに伴う巨視量の空間変化を理論的に記述する手法を提案し、その現地波浪への適用性を併せて明らかにする。

2. 摩擦のある斜面上のソリトン解

2.1 近似解の誘導

対象としている浅海域に入射して来る海岸波浪の波向線を計算出来れば、海岸波浪を2本の隣接した波向線にはさまれた波向線路を進む不規則ソリトン列と扱うことにより、3次元波動場の支配方程式を次式のkdV型方程式に帰着させることが出来る¹⁾。

$$\eta_X + \eta\eta_\xi + \eta_{\xi\xi} + \frac{9h_s^*}{4h^*}\eta + \frac{b_s^*}{b^*}\eta + \frac{2C'A'}{h^{*3/2}}\eta - \frac{2C'}{3h^{*1/2}}\eta_{\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{1/2} \left(\int ds^* / h^{*1/2} - t^* \right), & X &= \int h^{*1/2} d\tau / 6, \\ \tau &= \varepsilon^{3/2} s^*, & s^* &= s / h_0, & t^* &= t \sqrt{g / h_0}, \\ \eta &= 9(z' / h_0) / \varepsilon h^{*2}, & h^* &= h / h_0, & b^* &= b / b_0, \\ C' &= C / \varepsilon^{1/2}, & A' &= A / \varepsilon, & \varepsilon &= (h_0 / L)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

であり、 s ；波向線に沿った座標、 t ；時間、 z' ；平均水面周りの水位変動、 h および b ； τ に依存して緩やかに変化する水深および波向線路の幅、 h_0 および b_0 ；原点での水深および幅、 L ；海岸波浪の代表波長、 C ；海底摩擦係数、 A ； h_0 で無次元化したソリトンの振幅、および g ；重力の加速度である。

Yajimaの方法²⁾を基にすれば、式(1)よりせつ動を受けたソリトン解を近似的に導くことが出来る³⁾。それを h_0 による無次元波形 $\bar{\eta} (=z' / h_0)$ として表示すれば、次式のようなになる。

$$\bar{\eta} = A [\operatorname{sech}^2 \phi + (2\alpha\phi + 3\beta) \operatorname{sech}^2 \phi - \beta(1 - \tanh \phi) + f] \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$f = \beta \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sigma^{-1} \sin(\sigma \xi / X^{1/3} + 3\sigma^3) d\sigma \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 / h^* b^{*2/3} \Omega, \\ \Omega &= 1 + (8A_0 / 15) \int_0^\tau (G / h^{*3} b^{*2/3}) d\tau', \\ \phi &= \vartheta + (1/2)(\alpha \vartheta^2 + 3\beta h), \\ \vartheta &= (\sqrt{3A/2h^*}) \left\{ \left[h^{*1/2} (1 + A/2h^*) \right]^{-1} ds^* - t^* \right\}, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\Omega^{3/2} \left[\sqrt{3} h^{*3} b \lambda_h + (2\sqrt{3}/9) h^{*4} \lambda_b \right] \\ &\quad + (8\sqrt{3}/45) \lambda_0 h^* b^{*1/3} \Omega^{1/2}, \\ \beta &= \alpha - (4\sqrt{3}/45) \lambda_0 h^* b^{*1/3} \Omega^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

α および β に含まれる λ_h 、 λ_b および λ_0 は、それぞれ斜面勾配 h_s 、水路幅変化率 b_s および海底摩擦の影響を表すパラメタであり、次式のように表される。

$$\lambda_h = -h_s / A_0^{3/2}, \quad \lambda_b = -b_s / A_0^{3/2}, \quad \lambda_0 = C / A_0^{1/2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 A_0 は h_0 で無次元化した原点での初期振幅を示している。

ところで、式(4)の表示は $\phi=0$ 近傍を除けば十分な精度を有しているが、ソリトンの峯高評価に重要な $\phi=0$ 近傍では、その精度が保証されていないため、 $X=0$

* 正会員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 (株)日本情報サービス サイエンス事業部

でせつ動が加わるインパルス応答問題として f の支配方程式である次式を直接数値的に解き、それを用いる必要がある¹⁾。

$$[\mathcal{D}_X + \mathcal{L}]f = F(\phi, X)\delta(X - X_0) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\mathcal{L} = (\sqrt{3A^*/2h^*})^3 [\mathcal{D}_\phi^3 - 4(1 - 3\operatorname{sech}^2 \phi)\mathcal{D}_\phi - 24 \tanh \phi \operatorname{sech}^2 \phi] \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$F(\phi, X) = \beta[1 - \tanh \phi + 3(\phi \tanh \phi - 1)\operatorname{sech}^2 \phi + \alpha\phi(\phi \tanh \phi - 2)\operatorname{sech}^2 \phi] \quad \dots\dots\dots (11)$$

であり、 $\mathcal{D}_X$ および $\mathcal{D}_\phi$ は不連続点での微分を含む広義の微分演算子、 $\delta(X - X_0)$ は Dirac のデルタ関数、および X_0 は水深変化などのせつ動の開始点を示す。

2.2 せつ動下のソリトンの波形

上述の式(3)より、水深変化などのせつ動が加わると、右辺第1項のソリトンの定常解成分 η_0 の振幅が式(5)に従って変化するだけでなく、第2項のせつ動による形波の歪みを与える成分 η_d 、第3項の plateau η_p および第4項の tail と呼ばれる線形分散波 η_t が励起され、これら的高次成分を加えた総体をせつ動下のソリトンとして捉える必要のあることがわかる。

図-1 は、 $\lambda_0 = \lambda_c = 0$ および $\lambda_h = 0.1$ としたときの η_p 、 η_t およびこれらを重ね合わせた shelf η_s の浅水変化を $h^* = 1, 0.9$ および 0.6 の各水深で示したものである。また、図-2 は同じ条件下での η_0 、 η_d 、 η_s およびこれらを合成した $\bar{\eta}$ の浅水変化を示す。これらの図から、せつ動の加わる $h^* = 1$ において既に高次成分が励起されているが、 $h^* = 1$ ではこれらの位相が一致しているために互いに打ち消し合い、せつ動の影響はソリトンの変形としては顕われないことがわかる。しかし、浅水化が進むと高次成分の位相が互いにずれるようになり、その結果としてソリトンの波形変化が生じることになる。さらに浅水化が進むと、 β の値が小さくなって高次成分の振幅が減少し、shelf の影響を除けばソリトンの波形は定常解のものに良く一致するようになることがわかる。

2.3 せつ動ソリトン解の精度

式(3)に示した近似解の理論上の適用領域は、漸近条件

$$O(\eta_0) > O(\eta_d, \eta_s) \quad \dots\dots\dots (12)$$

より定まり、概略 $|\beta| < 1/3$ となる。 β の絶対値はせつ動の開始点で最大となるから、 $h^* = b^* = Q = 1$ としてせつ動パラメタに関してその範囲を示せば次式となる。

$$\lambda_h + 2\lambda_b/9 - 4\lambda_c/45 < \sqrt{3}/9 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)の条件下であれば式(3)の近似解は漸近性を有しているが、近似解の誘導は非線形性および分散性に比べてせつ動の影響は1桁低いという仮定の下になされており、精度自体は何ら保証されていない。そこで、その精

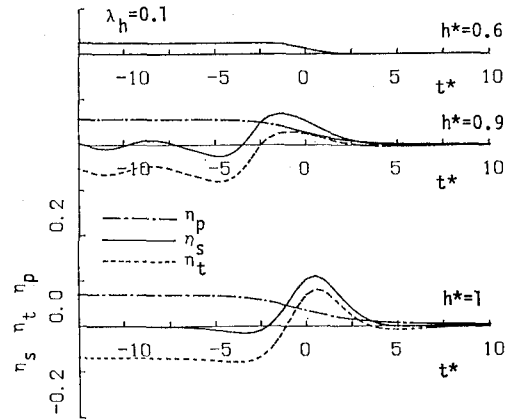


図-1 plateau および tail の浅水変形

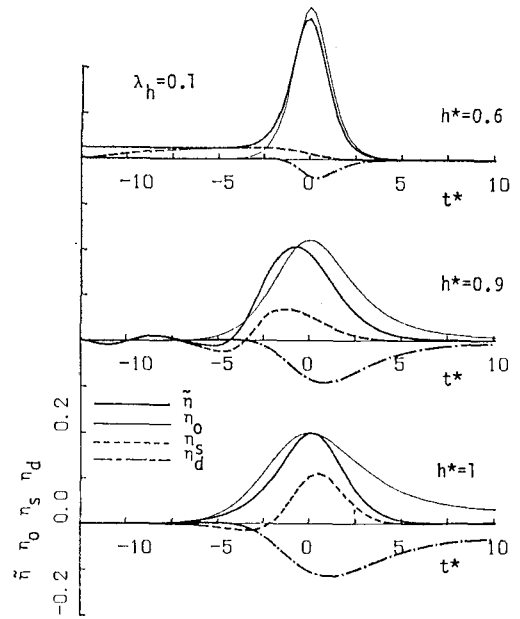


図-2 せつ動下のソリトンと成分波の浅水変形

度を式(1)の数値解との比較によって明らかにするため、まず、比較の基準となる数値解自体の精度について検討を行う。

$\lambda_b = \lambda_c = 0$ としたとき、式(1)は次式の保存量

$$\left. \begin{aligned} I_1(\tau) &= I_1(0)h^{*-1/4} \\ I_2(\tau) &= I_2(0)h^{*-1/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta d\xi, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 d\xi \quad \dots\dots\dots (15)$$

を持つので、数値解によるこれらの積分量を I_1^* および I_2^* と表して式(14)に対する誤差

$$\varepsilon_1 = (I_1 - I_1^*)/I_1, \quad \varepsilon_2 = (I_2 - I_2^*)/I_2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

を定義すれば、これらの誤差評価によって数値解の精度

表—1 数値解の保存量に対する誤差

λ_h	h^*	ϵ_1	ϵ_2
0.15	0.9	-5.93×10^{-5}	1.43×10^{-4}
	0.8	-2.36×10^{-4}	5.19×10^{-4}
	0.6	-2.64×10^{-3}	5.60×10^{-3}
0.1	0.9	-1.35×10^{-4}	3.26×10^{-4}
	0.8	-5.53×10^{-4}	1.22×10^{-3}
	0.6	-7.25×10^{-3}	1.50×10^{-2}

を検証出来る。表—1 はその結果を $\lambda_h=0.15$ および 0.1 の場合について示したものであり、数値解のこれら保存量に対する誤差が $h^*=1$ から 0.6 の範囲でほぼ 1.5% 以下に留まっていることから、数値解はほぼ厳密と判断される。図—3 は $\lambda_h=0.15$ のとき数値解による各水深ごとの波形を近似解と比較したものである。両者の間に若干の相違は認められるものの全体的にはほぼ対応していることから、 $\lambda_h \leq 0.15$ が近似解の精度を含めた適用領域と判断出来る。これを基に式(13)を修正すれば、近似解の精度を保証するせつ動パラメタの範囲が次のように導かれる。

$$\lambda_h + 2\lambda_b/9 - 4\lambda_c/45 < 0.15 \quad \dots\dots\dots (17)$$

3. 海岸波浪のソリトン解表示

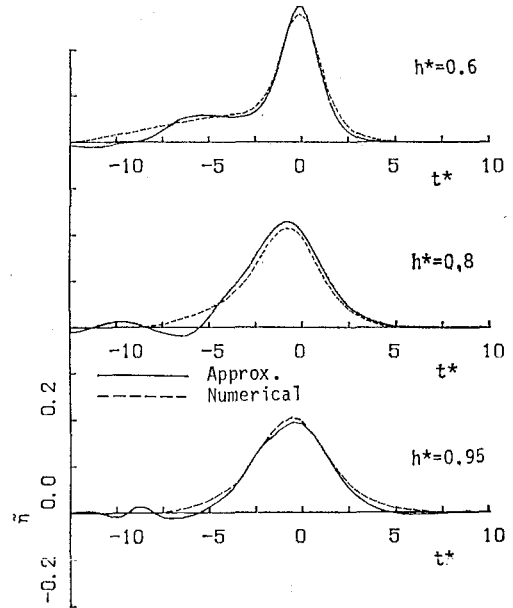
3.1 観測波形の表示

ここでは、図—4 に示すような断面形状を持つアメリカ西海岸の San Diego 近郊の Torrey Pines Beach での観測データ³⁾(1978年11月20日)に式(3)の近似解を適用し、その表示を試みる。この場合、現地波浪ではせつ動の開始点が不明のため、近似解による表示に必要な A_0 などを任意観測点での諸量から求める必要がある。そこで、任意観測点での水深で無次元化した波形および振幅を $\bar{\eta}$ および A_1 とそれぞれ表せば、これらは $\bar{\eta}$, A および A_0 と

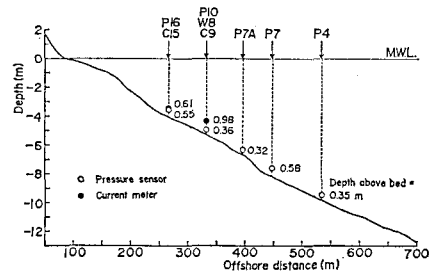
$$\bar{\eta} = h^* \bar{\eta}_1, \quad A = h^* A_1, \quad A_0 = h^{*2} b^{*2/3} \Omega A_1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

の関係にあるから、これを用いて式中の $\bar{\eta}$, A および A_0 を A_1 および $\bar{\eta}_1$ に置き換えることにより、任意観測点での波形表示を行うことが出来る。

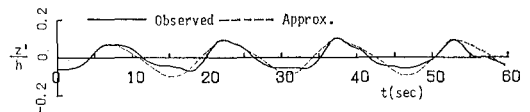
図—5 は、測点 P10 での上述の観測波形を式(3)のせつ動ソリトン解によって表示したものである。なお、この海岸は一様勾配の続く単調な直線海岸であり、このときの方向スペクトルからも波は汀線に直角に入射していたと判断されることから、 $b_s=0$ とした。また、摩擦係数 C については簡単のため、ゼロとして計算した。これより、定常ソリトン解表示したもの³⁾に比べ、shelf の発生に伴うと考えられる波形の前後非対称性がある程度



図—3 $\lambda_h=0.15$ のときのソリトンの浅水変形に関する数値解と近似解の比較



図—4 海浜断面と測点



図—5 観測波形のせつ動ソリトン解表示

評価され、対応は若干改善されていることがわかる。

3.2 海底摩擦係数の推定

式(3)によって現地波浪の伝播を含めた記述を行うには、海底摩擦係数の値を知る必要がある。ここで用いる現地波浪については、図—4 に示したように汀線に直角方向に5点で波形の同時観測が行われているため、これらの測点での振幅を知ることによって摩擦係数を推定出来る。水深 h_1 の測点で無次元振幅 $(A_1)_I$ を持つソリトンが $\lambda_b=0$ の条件下で水深 h_{II} の測点 II まで伝播して振

幅が $(A_1)_{II}$ になったとすれば、この変化を与えた摩擦係数は、式(5)より次式のように与えられる。

$$C = [(A_1)_{II}(h_I/h_{II})^2 - (A_1)_I] / \gamma(A_1)_{II} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、

$$\gamma = -(4/15)(A_1)_I [1 - (h_{II}/h_I)^2] (h_I/h_{II})^2 / h_s \quad \dots\dots\dots (20)$$

図-6 は、上述の現地波浪を不規則ソリトン列と扱い、各ソリトンについて測点ごとの振幅を求め、これを基に式(19)より計算した摩擦係数を示す。なお、横軸の A は $(A_1)_I$ を示し、図中の実線は無次元粗度 k_s/h を 0.06 としたときの Jonsson の実験式を示す。これから、摩擦係数にバラツキはあるものの Jonsson の実験式に対応した一定の傾向が傾向が認められ、ここで用いる摩擦係数としては 0.2 程度が妥当と判断される。

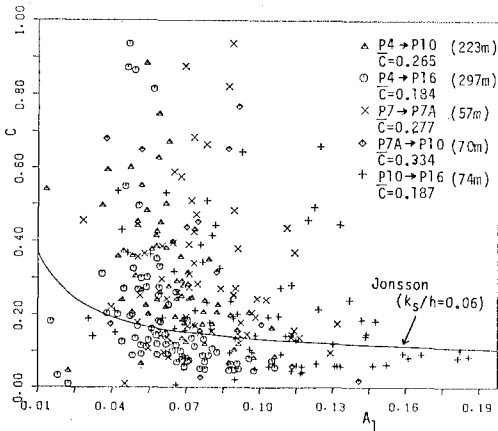


図-6 近似解に基づく現地波浪の海底摩擦係数

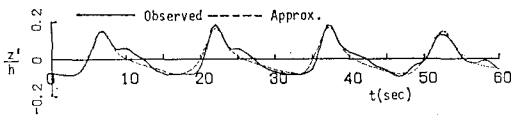


図-7 伝播波形のせつ動ソリトン解表示

図-7 は、 $C=0.2$ として図-5 に示した測点 P10 での波形を式(3)によって測点 P16 まで進ませ、そこでの観測波形と比較したものである。浅水化に伴う shelf の発達が式(3)によって表現されており、せつ動下の海岸波浪の伝播を含めた表示にここで示したせつ動ソリトン解が有効であることがわかる。

3.3 巨視的記述

前述の式(3)は、非線形性および分散性に加え、水深、波向線路幅および入射角の変化率と海底摩擦の影響を最低次であるがすべて取り込んだ波動方程式の解であり、海岸波浪が不規則ソリトン列として扱えるならば、式(3)の波動解を成分波とした集団現象として海岸波浪は力学

的に捉えられることになる。既に表示したように、個々の波峯、すなわち海岸波浪の微視的状态は式(3)を基にして記述出来ることから、その巨視的状态は成分波であるソリトンの振幅 A の分布関数 $P(A)$ を基に記述されることになる。

海岸波浪を不規則ソリトン列として扱い、その振幅分布が最大生起確率条件によって決定されるとすれば、一様水深場での海岸波浪の振幅分布は次式で表される⁴⁾。

$$p(A_0) = \frac{\nu}{\mu} A_0^{1/2} (A_0 + 2) \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}}{15} \nu A_0^{5/2}\right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、

$$\mu = \sqrt{3} [1 + \Gamma(3/5) \nu^{2/5} (128/75)^{1/5}] \quad \dots\dots\dots (22)$$

であり、 Γ はガンマ関数、 ν は平均振幅 $\bar{A}_0$ の関数として次式によって与えられる。

$$\bar{A}_0 (2/45)^{2/5} [\nu^{2/3} + \Gamma(3/5) \nu^{1/3} (128/75)^{1/3}] - [\Gamma(7/5) + 2(2\sqrt{3}/15)^{1/2} \nu^{1/2}] = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

既にせつ動が加わっている任意測点での海岸波浪への適用や伝播過程での巨視量の変化の計算には、式(21)を水深や波向線路幅をパラメタとして含む振幅 A_1 に関する分布 $p(A_1)$ に書き換える必要がある。式(5)より A_0 と A_1 の関係を導けば、

$$A_0 = f(A_1) \simeq h^{*2} b^{*2/3} A_1 (1 - \rho A_1) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\rho = (8/15) C h^{*2} b^{*2/3} \int ds^* / h^{*3} b^{*2/3} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となり、これを基に式(21)に対して変数交換を行えば、次式によって任意水深での振幅分布 $p(A_1)$ が与えられる。

$$\begin{aligned} p(A_1) &= p[f^{-1}(A_0)] dA_0 / dA_1 \\ &\simeq (\nu/\mu) h^{*2} b^{*2/3} A_1^{1/2} [h^{*2} b^{*2/3} A_1 (1 + 7\rho A_1/2) \\ &\quad + 5\rho A_1 + 2] \exp\left[-(2\sqrt{3}/15) \nu h^{*5} b^{*5/3} \right. \\ &\quad \left. \cdot A_1^{5/2} (1 + 5\rho A_1/2) \right] \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

なお、この場合は、式(23)の $\bar{A}_0$ を

$$\bar{A}_0 = h^{*2} b^{*2/3} (\bar{A}_1 + \rho \bar{A}_1^2) \quad \dots\dots\dots (27)$$

に置き換えることによって、任意測点での平均量 $\bar{A}_1$ および $\bar{A}_1^2$ の関数として ν が計算される。また、式中にパラメタとして含まれる h^* 、 b^* および ρ については、これらは波形表示の段階で決定されているため、巨視的記述においては観測波形から $\bar{A}_1$ および $\bar{A}_1^2$ を決定すればよいだけとなる。そして、伝播過程での分布関数の変化は、伝播過程での h^* 、 b^* および ρ の変化を与えることによって容易に行われる。

図-8 は、測点 P4 をせつ動開始点として式(26)によって計算した振幅分布を測点 P4 および P10 での観測結果と比較したものである。これから、両測点とも計算

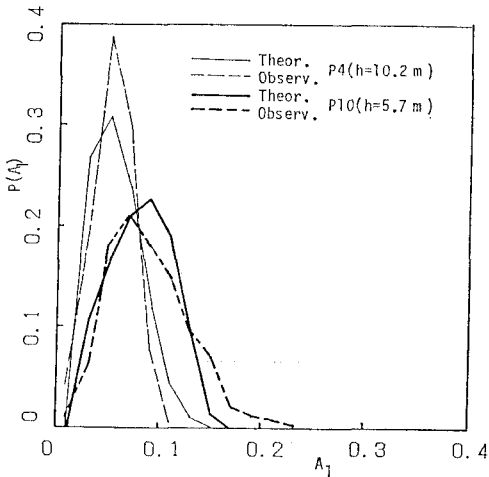


図-8 振幅分布の浅水変化に関する理論結果と観測結果の比較

結果は観測結果と良く対応しており、式(26)によってせつ動下の海岸波浪の巨視的状态を支配する振幅分布の浅水変化が理論的に説明出来ることがわかる。

4. 結 語

浅海域を伝播するせつ動下の海岸波浪を力学的に、しかし、出来るだけ簡単に記述する立場から、波向線路内を進むせつ動ソリトンを基準モードとする微視的および巨視的記述法を提案し、その現地波浪への適用を試みた。

その結果、浅水化に伴う波形の前後非対称性が shelf の発達として説明出来、せつ動下の海岸波浪の表示にここで示したせつ動ソリトンが有効であることがわかった。また、このときの測点間での観測波形の変化をソリトンの振幅変化と捉えることによって海底摩擦係数の推定を行い、それが0.2程度の値になることを示した。さらに、せつ動の影響を取り込んだ振幅の理論分布を導き、これによって現地波浪の振幅分布の浅水変化が理論的に記述可能となることを示すことが出来た。

最後に、本研究の開始段階で御協力頂いた京都大学大学院博士課程三島豊秋君に深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Yasuda, T. and M. Nishimoto: A perturbed soliton in a ray channel with dissipation and its application (in Preparation).
- 2) Yajima, N.: Application of Hirota's method to a perturbed system, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 51, pp. 1298~1302, 1982.
- 3) Yasuda, T., S. Shinoda and R. Dalrymple: Soliton mode representation for kinematics of shallow water swell, in Coastal Hydro. (Ed. R. Dalrymple, ASCE), pp. 751~764, 1987.
- 4) Yasuda, T., T. Mishima and Y. Tsuchiya: Energy distribution of shallow water swell under the maximum probability condition, in Nonlinear Water Waves (Eds. K. Horikawa and H. Maruo, Springer-Verlag), pp. 93~100, 1988.