

砂漣近傍の流れと渦のモデル化

池田 駿介*・木崎 茂**・栗林 俊一***

1. 序 論

波動下の砂漣の周辺に発生する渦は土砂の浮遊や波のエネルギー逸散等に重要な役割を果している。本研究ではこのような砂漣をモデル化し、ポテンシャル理論に境界層を組み合わせて発生する渦の循環を予測し、実験によってこれを検証する。

2. 砂漣近傍の流れ

シャープエッジを持つ砂漣近傍のポテンシャル流れについては Longuet-Higgins¹⁾ によって既に解が得られているので、本論文でもその結果を用いる。後の理論展開に必要な程度にその概略について述べる。

図-1(a) のような砂漣の列を考え、砂漣の頂角を $(\pi - 2\pi/P_r)$ とする。この面の砂漣は次式により ζ 面の P_r 多角形に写像される。

$$\zeta = e^{-ik_r z}, \quad k_r P_r L_r = 2\pi \quad (1)$$

ここに k_r は波数、 L_r は波長である。 z 面と ζ 面の境界を対応させることにより、 z 面における砂漣の形状が次のように得られる。

$$k_r(y - y_0) = \ln[\sec k_r(x - x_0)] \quad (2)$$

ここに x_0, y_0 は定数、 $|k_r(x - x_0)| \leq \pi/P_r$ である。このとき、砂漣波高 H_r と波長 L_r の比は次式となる。

$$\frac{H_r}{L_r} = \frac{\ln[\sec(\pi/P_r)]}{2\pi/P_r} \quad (3)$$

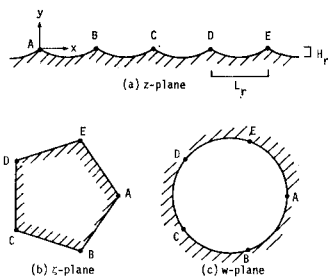


図-1 写像変換

ζ 面の多角形外部の流れは Schwarz-Christoffel 変換により、次の写像関数を用いて w 面の単位円の内部へ写像される。

$$\zeta = \zeta_0 - K \int_{w_0}^w \frac{1}{w^2} (1 - w^{P_r})^{2/P_r} dw \quad (4)$$

ここに ζ_0 は定数、 K は写像のスケールを決定し、 $P_r = 5$ (砂漣の頂角 108°) のとき $K = 0.889$ となる。又、この値のとき式 (3) から $H_r/L_r = 0.17$ となる。

砂漣から充分離れた点における一様流速 U と砂漣間の位置 z_n にある循環 Γ_n を持つ渦の複素速度ポテンシャル χ は w 面において

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_u + \chi_v \\ &= \frac{U}{ik_r} \ln w + \sum_n \frac{\Gamma_n}{2\pi i} \ln \frac{w^{P_r} - w_n^{P_r}}{w^{P_r} - \bar{w}_n^{P_r}} \quad (5) \end{aligned}$$

である。ここに、 χ_u, χ_v は夫々一様流、渦に対応する複素速度ポテンシャルであり、 $\bar{w}_n$ は鏡像渦の位置である。

3. 剥離点から放出される離散渦の循環

砂漣背後に形成される非定常剥離渦は剪断層内の渦度が非定常に放出され、これが集積することによって形成されると考えられる。このような剥離渦の挙動や循環を知る方法として、剪断層内の渦度を剥離点の近傍からある時間間隔で流れの中に離散渦を放出させ、その集積を調べる離散渦法がある。ここでは先ず、式 (5) を用いて離散渦の循環値を見積る。砂漣のクレスト上 $w = w_0$ において Kutta の条件、 $d\chi/dw = 0$ 、を適用する。この時式 (5) から Γ_n は

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= -\frac{2\pi U}{k_r P_r} w_0^{-P_r} \frac{(w_0^{P_r} - w_n^{P_r})(w_0^{P_r} - \bar{w}_n^{P_r})}{w_n^{P_r} - \bar{w}_n^{P_r}} \\ &\quad + \alpha_v \quad (6) \end{aligned}$$

となる。ここに、 α_v は n 番目の渦以外の渦による寄与であり、

$$\begin{aligned} \alpha_v &= -\sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_m \frac{w_m^{P_r} - \bar{w}_m^{P_r}}{(w_0^{P_r} - w_m^{P_r})(w_0^{P_r} - \bar{w}_m^{P_r})} \\ &\quad \times \frac{(w_0^{P_r} - w_n^{P_r})(w_0^{P_r} - \bar{w}_n^{P_r})}{w_n^{P_r} - \bar{w}_n^{P_r}} \end{aligned}$$

である。循環強度を見積る点 w_n における水平流速を u_n とすれば、 u_n は次式で表わされる。

* 正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科

** 正会員 工修 飛鳥建設 KK

*** 茨城県庁

$$\begin{aligned} u_n &= R_e \left(\frac{d\lambda}{dw} \frac{dw}{dz} \right)_{w=w_n} \\ &= R_e \left[\frac{w_n'}{w_n} \frac{U}{ikr} + w_n' \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{P_r w^{P_r-1}}{w^{P_r} - w_j^{P_r}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_r w^{P_r-1}}{w^{P_r} - w_j^{P_r}} \right]_{w=w_n} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、 $w_n' = (dw/dz)_{w=w_n}$ である。ここで、砂漣のクレストの位置として図-1のA点を選べば、 $w_0=1$ となり、更に w_n にある渦に与える他の渦の影響は小さいとして無視すれば、式(6)の α_0 、式(7)の右辺第2項は無視でき、 Γ_n は次式により表わされる。

$$\Gamma_n = - \frac{2\pi u_n}{P_r} R_e \left(i \frac{w_n}{w_n'} \right) \frac{(1-w_n^{P_r})(1-\bar{w}_n^{P_r})}{w_n^{P_r} - \bar{w}_n^{P_r}} \dots\dots\dots (8)$$

次に Kutta の条件を適用した循環強度を見積る点 w_n について考える。この位置を砂漣のクレストから微小距離 δ 上方の点とすると、 z 面において (図-2 参照)

$$z_n = i\delta \dots\dots\dots (9)$$

と表わされる。 z 面においては式(1)から

$$\zeta_n = e^{k_r \delta} = 1 + \delta' \dots\dots\dots (10)$$

となる。次に w 面においては式(4)において w_0 としてA点を選べば $w_0 = \zeta_0 = 1$ となり、式(4)は

$$\delta' = -K \int_1^{w_n} \frac{1}{w^2} (1-w^{P_r})^{2/P_r} dw \dots\dots\dots (11)$$

となる。 w 面においても w_n の値は

$$w_n = 1 + \delta'' \dots\dots\dots (12)$$

とおけ、又、式(11)中の w の値は1に近いので Taylor 展開し、積分すれば

$$\delta' = \frac{K}{2+P_r} (-P_r \delta'')^{(2+P_r)/P_r} \dots\dots\dots (13)$$

を得る。更に $k_r \delta \div \delta'$ であることから

$$\delta = \frac{K}{(2+P_r)k_r} (-P_r \delta'')^{(2+P_r)/P_r} \dots\dots\dots (14)$$

あるいは

$$\delta'' = - \frac{1}{P_r} \left[\frac{(2+P_r)k_r}{K} \delta \right]^{P_r/(2+P_r)} \dots\dots\dots (15)$$

となる。以上より、離散渦の循環強度は

$$\Gamma_n = - \frac{2+P_r}{P_r} \pi u_n \delta (1+\delta'') \dots\dots\dots (16)$$

によって与えられる。

4. 剥離渦の循環

以上のように離散渦の循環が見積られたが、半周期の間に砂漣の片側に形成される大きな剥離渦は半周期の間の離散渦の集積として表わすことができるであろう。従って、この大きな剥離渦の循環を Γ とすると

$$\Gamma = \int_0^{T/2} f \Gamma_n dt = \frac{2+P_r}{P_r} \pi \int_0^{T/2} f u_n \delta (1+\delta'') dt \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここに f は離散渦の放出周波数である。次に f と δ の値を物理的考察から決定する。砂漣先端近傍の剪断層が次々と離散渦へ変化して行くと考えられ、この放出周波数 f は代表流速を U 、代表スケールを δ とすれば渦は片側のみから放出されるので $S_t=0.1$ として

$$f = 0.1 \frac{U}{\delta} \dots\dots\dots (18)$$

と表わされる。ここに S_t は Strouhal 数である。剪断層厚さ δ は主流の位相により変化すると考えられるが、ここでは半周期の平均値として求める。砂漣先端に形成される剪断層は固定境界で0、外部境界では U_n の値を持ち、離れるに従って流速が小さくなる外部流に滑らかに接続することから (図-2)、粘性 Oseen 渦のコア領域に類似した性質を有していると考えられる。このコア領域の半径は $2.2\sqrt{\nu t}$ で表わされるので²⁾、この値を平均して

$$\delta = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 2.2\sqrt{\nu t} dt = 1.04\sqrt{\nu T} \dots\dots\dots (19)$$

となる。表1は式(19)から求められる境界層厚さと既往の実験値から得られる値を比較したものである。これから限られた条件下ではあるが、式(19)によって δ を見積ることが出来ることが知られる。

以上から、式(18)、(19)を式(17)に代入し、 $U=\hat{U} \sin \omega t$ 、 $u_n=\hat{u}_n \sin \omega t$ とおけば、 Γ は次式によって求めることができる。

$$\Gamma = \frac{1}{40} \frac{2+P_r}{P_r} \pi (1+\delta'') T \lambda \hat{U}^2 \dots\dots\dots (20)$$

ここに $\lambda=\hat{u}_n/\hat{U}$ であり、 δ の高さが式(19)により与えられるので、ポテンシャル流れから λ の値を知ること

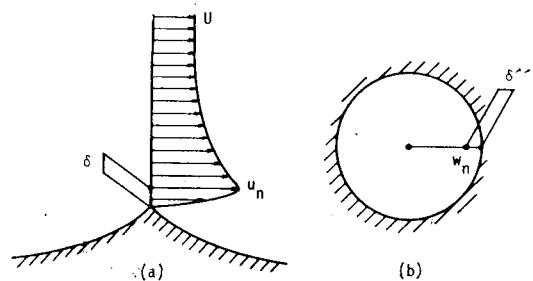


図-2 境界層厚さ

表-1 境界層厚さの理論値と実験値の比較

T(s)	δ (cm)		文献
	理論値	実験値	
6.4	1.02($m=1.04$)	0.89	3)
5.37	0.24($m=1.04$)	0.26	4)

ができる．ここでは簡単の為に渦の寄与分を除いた値を用いる．

5. 実験および理論との比較

実験には埼玉大学水理実験室の振動流装置 (30 cm × 30 cm の正方形断面, 長さ 14 m) を用いて行なわれた．流体 (水) はピストンによって駆動され, 振動流の最大片振幅は 35 cm, 周期は 1 秒から 20 秒の間で連続的に変化させることが可能である．

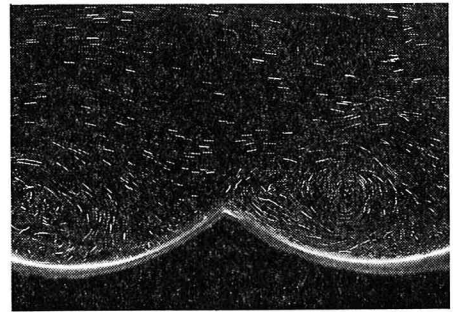
砂漣モデルは式 (2) を用いて形状を決定した．波長 L_r は 30 cm, 波高は 5 cm であり, この形は前に述べた $P_r=5$ の場合に相当する．砂漣モデルは底面に 7 個連続して設置した．実砂漣との対応を調べる為に造波水路に豊浦標準砂を敷き, 発生した砂漣と比較を行った (表—2)．振動流実験においては一種の KC 数, $L_r/T\hat{U}$ の値を造波水路で得られた値 0.23 と一致するように T および $\hat{U}$ を変化させて行った．

渦の可視化には比重 1.04, 粒径が 0.3~0.5 mm の範囲にあるポリスチレン粒子を用い, スライド・プロジェクターからスリット光線を照射し, これをモーター・ドライブ付 35 mm カメラで連続写真を撮影した．このときカメラのシャッター信号とピストンが 1 周期運動する毎の信号をオシログラフに記録し, 位相を関係づけた．実験条件および撮影条件を表—3 に示す．図—3 は可視化写真の一例である．このような写真から各位相における渦内の流速分布と循環値を読みとる．このとき, 砂漣近傍の渦は円形であるとみなし, 渦の中心を決定してポリスチレン粒子の軌跡長とカメラのシャッター・スピードから, 中心からの距離 r における渦内の流速 u_θ を決定する．又, これらの値から循環値を次式により求める．

$$\Gamma = 2\pi r u_\theta \dots\dots\dots (21)$$

以上のようにして求められた渦内の流速分布と循環の分布の 1 例を図—4 に示す．これから渦内の流速分布は乱流 Oseen 渦の分布形とよく一致し (Oseen 渦の分布形については文献 2 参照), 又循環の分布も Oseen 渦の速度分布から求められる分布形によってよく表わされている．この傾向は表—3 の実験条件によらなかった．

このようにして得られたコア域外縁近傍の最大循環値を各位相について求め, 1 周期内で循環がどのように変化しているかを調べたのが図—5 である．これらの図から 1 周期の間に砂漣頂部の両側に交互に発生する渦の循環はほぼ同一であり, 循環の最大値 Γ_{max} が生ずる位相は周期が短くなるにつれて, 早くなることが知られる．式 (20) から予測される循環値は周期内の循環の最大値 Γ_{max} に相当すると考えられるので, この両者を比較したのが図—6 である．同図中には沢本³⁾によって得られた振動流中に置かれた波型砂漣モデルから発生する渦



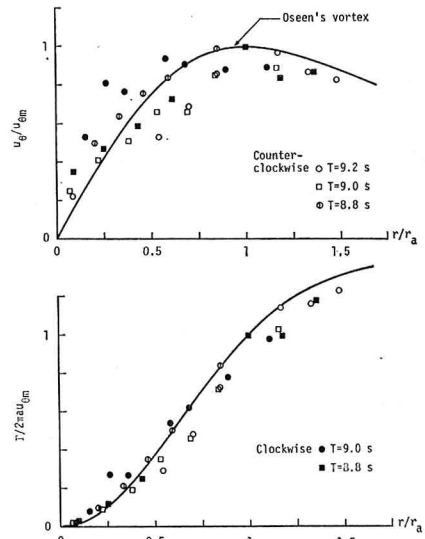
図—3 可視化された渦 ($T=11.5$ s, $t/T=0.4$)

表—2 砂漣モデルの形状と実験条件

	造波水路実験 Case No. 2549	振動流実験 (拡大相似模型)
H_r / L_r	0.172	0.167
H_r (cm)	0.63	5.0
L_r (cm)	3.67	30.0
$d_s / 2$ (cm)	2.52	20.0
$\hat{U}$ (cm/s)	15.8	variable
T (s)	1.01	variable
$KC=L_r/T\hat{U}$	0.23	0.23

表—3 実験条件と撮影条件

Case No.	T (s)	F (絞り)	S.S. (s)	コマ速度 (1/r/s)
1	3	1.2	1/30	1.3
2	6	1.2	1/15	2.5
3	9	2.0	1/8	2.5
4	12	2.0	1/8	2.5
5	4	1.2	1/30	2.5



図—4 渦の速度分布と循環分布 (Case 3)

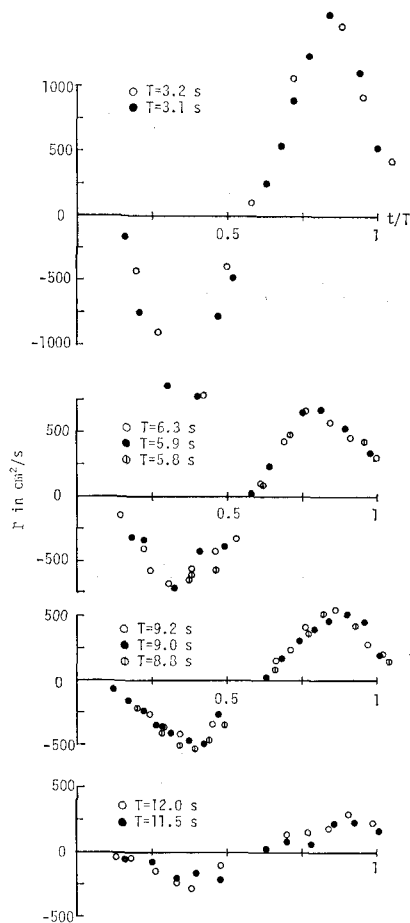
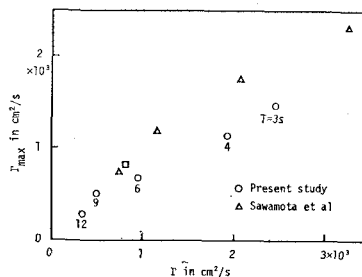
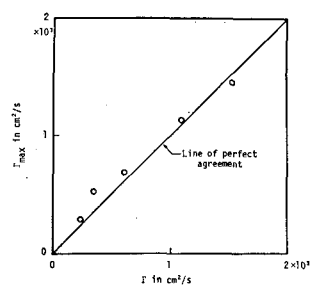


図-5 循環値の時間変化

の循環値との比較も行っている。なお、彼等が用いた砂漣形状は本研究で用いられた形状と異なるので、式(20)中の $\lambda = \hat{u}_n / \hat{U}$ の値は彼等が用いた形状に対応するポテンシャル解から得られる値を用いた。図-6から両者の間にはよい相関があることがわかるが、理論値の方が実測値よりもやや大きい値を与えている。しかも、周期が短くなる程(即ち、 KC 数を前に述べたようにほぼ固定しているので流速が大きくなる程)理論値からずれて来ていることが知られる。これは流速が大きくなるに従って境界層が乱流へ遷移し、式(17)によって境界層厚さを見積ることが困難となり、それとともに $\hat{u}_n$ の値を実際の値よりも大きく見積ってしまう為であると考えられる。図-7はこれを検討する為に小型プロペラ流速計を用いて流速分布を測定し、境界層外縁の実測の $\hat{u}_n$ の値

図-6 Γ の理論値(式(20))と実測値 $\Gamma_{\max}$ の比較図-7 $\hat{u}_n$ の値に実測値を用いた場合の比較

を用いて、式(20)から循環値を見積り、実測値と比較したものである。両者の対応は非常によく、上の仮定がほぼ正しいことが知られる。

6. 結 語

ポテンシャル流と境界層を組み合わせ、Kutta の条件を適用することにより離散渦の循環を見積り、更にこれを時間積分することにより砂漣背後に形成される剥離渦の循環を予測する手法を提案した。この理論は実験により検討され、本手法により渦の予測が可能であることが判明した。今後は乱流境界層の検討を行う必要がある。

参 考 文 献

- 1) Longuet-Higgins, M. S.: Oscillatory flow over steep sand ripples, JFM, 107, 1981.
- 2) Ikeda, S. et al: Vortex structure and energy dissipation near a vertical plate under wave action, Proc. JSCE, 363, 1985.
- 3) Sawamoto, M. et al.: Vortex formation over rippled bed under oscillatory flow, Tech. Rept., Tokyo Inst. Tech., 27, 1980.
- 4) Du Toit, C. G. and J. F. A. Sleath: Velocity measurements close to rippled-bed in oscillatory flow, JFM, 112, 1981.