

二次元傾斜海浜上における波による質量輸送の鉛直分布特性について

平 山 秀 夫*・福 島 博 行**

1. 緒 論

波による質量輸送現象の究明は、海浜流系や海浜地形の変形機構を探る上で不可欠な要素であって、従来から色々な角度より多くの研究がなされてきている。しかしながら、その大半は水平床に関する研究であって、傾斜面上における研究はその重要性にもかかわらずあまり実施されていない。この方面の最近の研究としては、特に傾斜底面上質量輸送速度を理論と実験の両面から取り扱った Bijker ら¹⁾の研究および平山^{2,3)}の研究などの数例があるにすぎず、いわゆる古くて新しい問題として提起されている。

本研究では、このような観点から、傾斜面上での質量輸送の分布特性を詳細に検討しようとするものであって、ここではまず最初に、前報³⁾で得られた傾斜面上での質量輸送速度の理論解に立脚して、碎波点以深の傾斜面上における質量輸送の鉛直分布の理論を、Longuet-Higgins⁴⁾が導いた conduction equation に基づいて展開する。

次に、このようにして得られ理論結果と従来の実験値^{5,6)}との適合性を検討するとともに、二次元傾斜海浜上における質量輸送の鉛直分布の一般的特性を、水平位置、斜面勾配及び碎波型式別に調べ、鉛直分布特性に及ぼすこれらの影響を明らかにする。

2. 二次元傾斜面上における質量輸送の鉛直分布に関する理論解析

(1) 基礎式

いま、座標系を静水面に x 軸、その鉛直下方に z 軸をとれば、傾斜面上の碎波点以深での質量輸送の鉛直分布を支配する基礎方程式は Longuet-Higgins が示した conduction equation⁴⁾で表わされる。

すなわち、波動場が微小振幅波理論で表示できると仮定すれば、質量輸送の流れ関数 Ψ を用いることによって、conduction equation は次式のように表わされる。

$$\epsilon^2 \nabla^4 \Psi = \nabla^4 \left\{ \frac{\sigma \sinh 2k(z-h)}{4 \sinh^2 kh} \cdot a^2 \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\epsilon = a/L$ (a : 波の振幅, L : 波長), $k = 2\pi/L$ である。

次に、式 (1) において Ψ を、Longuet-Higgins と全く同様に、

$$\epsilon^2 \Psi = a^2 \sigma \{ \sinh 2k(z-h) + Z^p(z) \} / 4 \sinh^2 kh \dots\dots\dots (2)$$

のように仮定すれば、式 (1) から次の基礎微分方程式が得られる;

$$d^4 Z^p / dz^4 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

この式を積分することによって、 Z^p は、

$$Z^p = \frac{1}{6} c_1 z^3 + \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4 \dots\dots\dots (4)$$

のように表わされる。ここで c_i ($i=1\sim 4$) は未知の積分定数であって、以下に示す境界条件及び連続条件から決定される。

(2) 境界条件

まず、水面条件は、水面境界層から発生する渦度の拡散の程度に応じて決定されるべき定数 β ($\beta > 0$) を用いれば、水面質量輸送速度勾配 $(\epsilon^2 \partial^2 \Psi / \partial z^2)_{z=0}$ は、

$$\left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)_{z=0} = -2a^2 \sigma k^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) \coth kh \dots\dots (5)$$

のように表わされ、結局、 $(d^2 Z^p / dz^2)_{z=0}$ は式 (2) から次式のように求められる。

$$\left(\frac{dZ^p}{dz^2} \right)_{z=0} = -2\beta k^2 \sinh 2kh \dots\dots\dots (6)$$

ここで、式 (5) は β の値によって、

$\beta=0$; 水表面で渦度を 0 と仮定した Stokes⁷⁾ あるいは Huang⁸⁾ の水面条件による結果、

$\beta=2$; Longuet-Higgins の理論結果⁴⁾、を表わすことになる。

次に、底面境界条件は、前報³⁾で示した著者の底面上質量輸送速度の理論結果から $\bar{U}_\infty = (\epsilon^2 \partial \Psi / \partial z)_{z=h}$ を計算することによって、次式のように与えられる。

* 正会員 工博 大阪府立工業高等専門学校教授 土木工学科
** 正会員 大阪府立工業高等専門学校学校技師 土木工学科

$$\left(\frac{dZ^p}{dz}\right)_{z=h} = 5k \left[\frac{1}{5}(2+3\cos\theta) - \frac{3}{5}\cos\theta \cdot \frac{1}{Ak} \frac{dA}{dh} \right. \\ \left. \cdot \frac{dh}{dx} - \frac{1}{5k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \sin\theta - \frac{4}{5} \frac{\cos\theta}{k} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \right. \\ \left. \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right] - 2k \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $A=H_0\sigma k_s/(2\sinh kh)$ (k_s : 浅水係数, H_0 : 沖波々高, $\sigma=2\pi/T$, T : 周期), α および $d\alpha/dx$ は前報⁹⁾ に示したように斜面勾配別に次式で与えられている。

$i=1/20$ の場合 ($c.g.s.$ 単位, h_0 : 一様水深, g : 重力加速度)

$$\left. \begin{aligned} d\alpha/dx &= (-0.239292 \cdot h/h_0^2 + 0.514755/h_0) \sqrt{g/h_0} \cdot T \\ &\quad + 3.094605 \cdot h/h_0^2 - 9.527850/h_0 \\ \alpha &= 0.021147 \cdot g T^2/h_0 + (-0.072913 \cdot h/h_0 \\ &\quad - 0.218721) \sqrt{g/h_0} \cdot T + 1.518525 \cdot h/h_0 \\ &\quad + 3.4384 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$i=1/10$ の場合

$$\left. \begin{aligned} d\alpha/dx &= (-0.535468 \cdot h/h_0^2 + 1.167943/h_0) \sqrt{g/h_0} \cdot T \\ &\quad + 7.017435 \cdot h/h_0^2 - 20.67885/h_0 \\ \alpha &= 0.025471 \cdot g T^2/h_0 + (-0.078746 \cdot h/h_0 \\ &\quad - 0.269486) \sqrt{g/h_0} \cdot T + 1.590165 \cdot h/h_0 \\ &\quad + 3.5420 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

(3) 連続条件

Longuet-Higgins に従えば、運動の連続性から、質量輸送の流れ関数 Ψ は、 $(\Psi)_{z=0}=0$ 及び $(\Psi)_{z=h}=0$ を満足しなければならないから、結局、次式の連続条件式が得られる。

$$(Z^p)_{z=0} = \sinh 2kh \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$(Z^p)_{z=h} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

(4) 理論結果

以上に示した条件式 (6), (7), (10) 及び (11) から、式 (4) 中の c_i ($i=1\sim 4$) が決定でき、それぞれ次式のように求まる。

$$c_1 = \frac{k}{h^2} \left\{ 9 \cos\theta \left[1 + \frac{2}{\sinh 2kh} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{1}{2kh + \sinh 2kh} \right. \right. \\ \left. \times \left\{ (2kh + \sinh 2kh) + \frac{1}{2} \sinh 2kh (1 + \cosh 2kh) \right\} \right. \\ \left. - \frac{4}{3k} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{d\alpha}{dx} \right] - \frac{3 \sin\theta}{k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} + 3 \left(\beta kh + \frac{1}{kh} \right) \right. \\ \left. \times \sinh 2kh \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$c_2 = -2\beta k^2 \sinh 2kh \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$c_3 = k \left\{ -\frac{3}{2} \cos\theta \left[1 + \frac{2}{\sinh 2kh} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{1}{2kh + \sinh 2kh} \right. \right.$$

$$\left. \times \left\{ (2kh + \sinh 2kh) + \frac{1}{2} \sinh 2kh (1 + \cosh 2kh) \right\} \right. \\ \left. - \frac{4}{3k} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{d\alpha}{dx} \right] + \frac{\sin\theta}{2k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \beta kh - \frac{3}{2kh} \right) \sinh 2kh \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$C_4 = \sinh 2kh \quad \dots\dots\dots (15)$$

さらに、これらの C_i から式 (4) の Z^p が定まり、その結果を式 (2) に代入して $\epsilon^2 \Psi$ を求めれば、傾斜面上における質量輸送速度 $\bar{U}$ の鉛直分布を表わす理論結果は、次式のように求められる。

$$\bar{U} = \epsilon^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ = -\frac{a^2 \sigma k}{4 \sinh^2 kh} \left[2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 3 \cos\theta \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta kh \left(3 \frac{z^2}{h^2} - 4 \frac{z}{h} + 1 \right) \sinh 2kh \right. \\ \left. + 3 \left(\frac{\sinh 2kh}{2kh} + \frac{3}{2} \cos\theta \right) \left(\frac{z^2}{h^2} - 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{9}{2} \left(\frac{z^2}{h^2} - 1 \right) \times Q \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$Q = -\frac{4}{3k} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{d\alpha}{dx} \cos\theta - \sin\theta \times \left[\frac{2}{\sinh 2kh} \right. \\ \left. \times \frac{1}{2kh + \sinh 2kh} \times \left\{ (2kh + \sinh 2kh) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sinh 2kh \times (1 + \cosh 2kh) \right\} + \frac{1}{3k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \right] \\ \dots\dots\dots (17)$$

である。

上式中の $\sim$ 線部分が、水平床上における質量輸送の鉛直分布を示した Longuet-Higgins の理論結果⁴⁾ と異なるところであって、いわゆるこのような二次元傾斜面上での質量輸送の鉛直分布の理論結果は、従来の水平床上での理論結果に新たに $\sim$ 線部分で表わされる補正項が必要であることを示す。

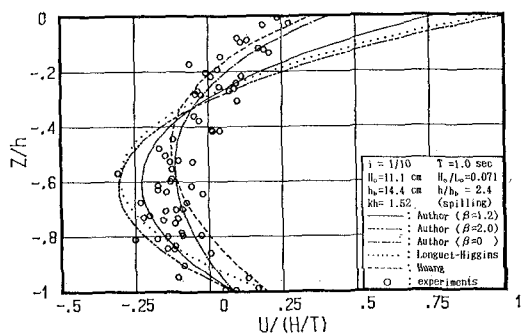
なお、上式 (17) 中の α 及び $d\alpha/dx$ は、前述のように、それぞれ式 (8) 及び式 (9) で与えられる。

また、本理論結果の式 (16) は、 β が含まれており、水平床上の場合に、 $\beta=0$ とすれば Huang⁸⁾ の理論結果に、 $\beta=2.0$ とすれば Longuet-Higgins⁴⁾ のそれに一致し、さらに $\beta=1.2$ のときは、Longuet-Higgins⁹⁾ の水面渦度の実験結果に基づく著者¹⁰⁾ の結果を示すことになる。

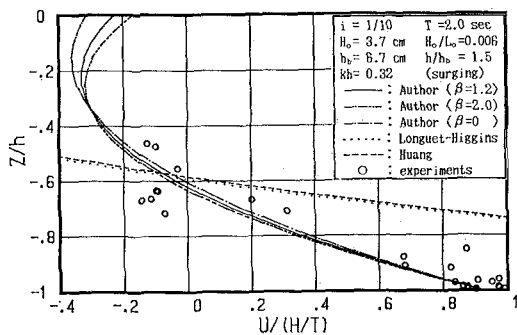
3. 傾斜面上における質量輸送の鉛直分布特性

(1) 本理論結果と従来の実験結果との比較

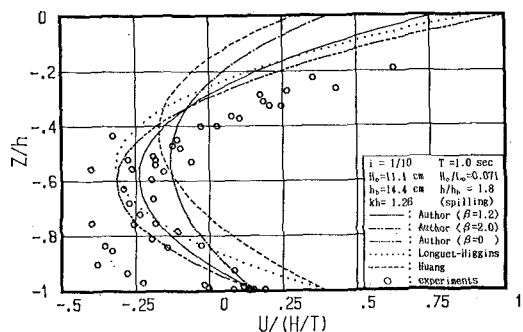
式 (16) で計算された理論結果を、従来著者が示した実験結果^{5), 6)} と比較して示したのが 図-1 (1) ~ (8) であ



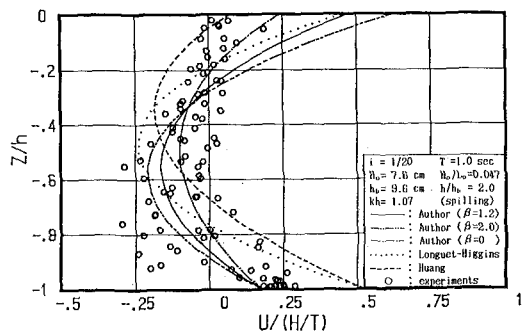
(1) $i=1/10$, $T=1.0$ s, $h/h_b=2.4$ の場合



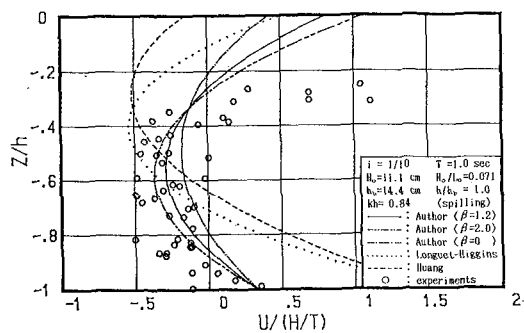
(5) $i=1/10$, $T=2.0$ s, $h/h_b=1.5$ の場合



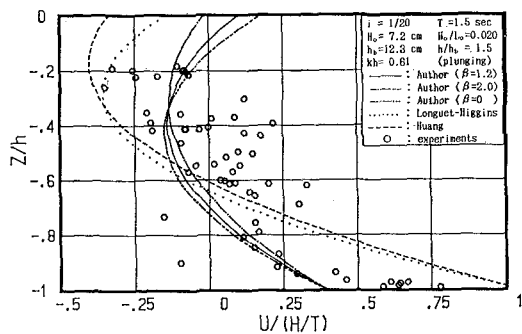
(2) $i=1/10$, $T=1.0$ s, $h/h_b=1.8$ の場合



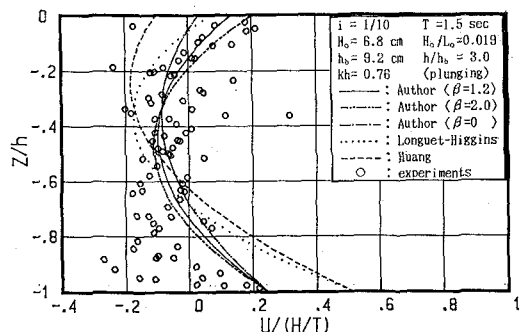
(6) $i=1/20$, $T=1.0$ s, $h/h_b=2.0$ の場合



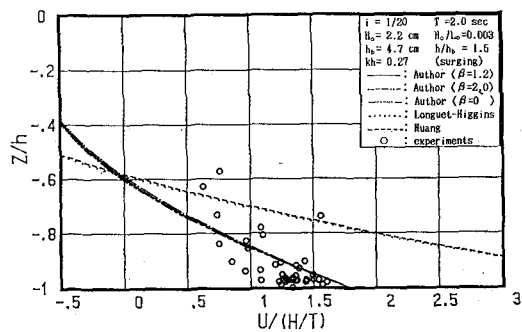
(3) $i=1/10$, $T=1.0$ s, $h/h_b=1.0$ の場合



(7) $i=1/20$, $T=1.5$ s, $h/h_b=1.5$ の場合



(4) $i=1/10$, $T=1.5$ s, $h/h_b=3.0$ の場合



(8) $i=1/20$, $T=2.0$ s, $h/h_b=1.5$ の場合

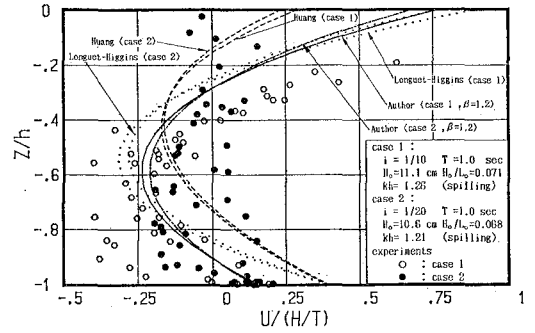
図-1 傾斜面上の質量輸送の鉛直分布の理論値と実験値の比較

る。(図中の1点鎖線、実線及び2点鎖線は、それぞれ $\beta=0$, $\beta=1.2$ 及び $\beta=2.0$ の場合の本理論結果を示し、また、点線及び破線は水平床上の場合における Longuet-Higgins⁴⁾ 及び Huang⁸⁾ の理論結果を示す。) 図の (1) ~ (5) は底勾配 $i=1/10$ の場合の結果、図の (6) ~ (8) は $i=1/20$ の場合の結果をそれぞれ周期別あるいは水平方向の異なる位置ごとに分類してある。これらの図から全般的に言えることは、1) 本理論結果は、水面付近を除けば、実験条件にかかわらず全般的に実験値をかなり良く説明できるように思われる点、2) 実験条件が $i=1/10$ で $H/L_0=0.071$, $T=1.0$ s の場合の図の (1) ~ (3) の結果から明らかなように、水表面付近での質量輸送速度勾配は、水平方向の位置 (h/h_0 , h_0 : 砕波水深) の変化によって異なり、水深が浅くなるにつれて、実験値が理論値よりも大きくなる傾向が見られ、このことは水表面での渦度の拡散の程度が砕波点に近づくにつれて増大し、特に砕波点付近では波形の非対称性などによる不安定要因も加わって、さらに渦度の発生が助長されることによるものではないかと考えられる点、などである。

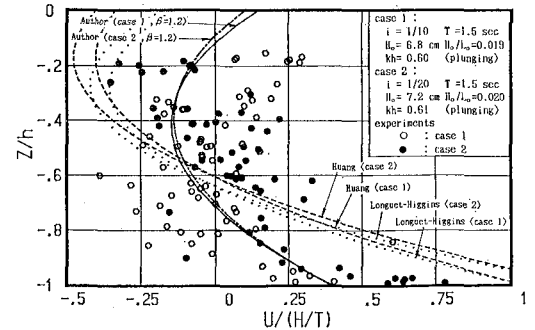
(2) 底勾配による変化特性

ここでは、水底勾配の質量輸送速度の鉛直分布に及ぼす影響を明らかにするため、同じ砕波型式の下で H_0/L_0 および kh の値がほぼ等しく斜面勾配のみが異なる場合について、実験値の変化特性並びに理論値との適合性を調べる。

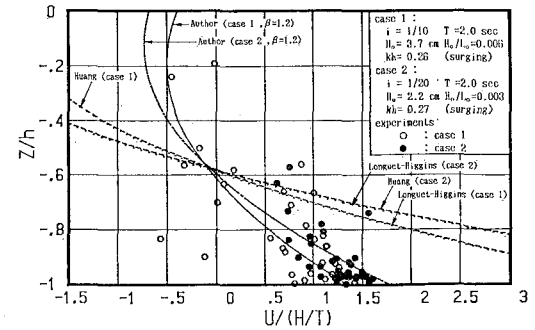
図-2 (1) ~ (3) は、そのような条件下での結果であって、図の (1) は spilling 型砕波 ($T=1.0$ s, $H_0/L_0 \approx 0.070$, $kh \approx 1.2$), (2) は plunging 型砕波 ($T=1.5$ s, $H_0/L_0 \approx 0.02$, $kh \approx 0.6$), (3) は surging 型砕波 ($T=2.0$ s, $H_0/L_0=0.003 \sim 0.006$, $kh \approx 0.27$) の場合の結果である。図中の理論曲線のうち実線および1点鎖線がそれぞれ $i=1/10$ 及び $i=1/20$ の場合の本理論結果を示し、また、参考のために、水平床上での Longuet-Higgins や Huang の理論結果もそれぞれ点線及び破線で示した。一方、実験値は $i=1/10$ の場合の結果を○印で、 $i=1/20$ の場合を●印で表示してある。これらの図から明らかなように、理論曲線は、他の条件が同じならば、斜面勾配の相違によって質量輸送の鉛直分布が変化し、特に、底面付近から流体主流部の中央にかけては、 $i=1/10$ の場合の質量輸送の値が $i=1/20$ の場合に比して負側(冲向き)に大きく、一方、主流中央部から水面付近にかけては、 $i=1/10$ の結果が $i=1/20$ のそれに比べて逆に正側(岸向き)に大きくなる傾向が見られる。このような傾向は実験値の分布特性にも明確に現われており、特に (1) の spilling 型及び (3) の suging 型の場合にその傾向が顕著に見られるように思われる。このことは、斜面勾配が急になるに従って、それによる重力効果などの影響で底



(1) spilling 型砕波の場合 ($T=1.0$ s, $kh=1.2$)



(2) plunging 型砕波の場合 ($T=1.5$ s, $kh=0.6$)



(3) surging 型砕波の場合 ($T=2.0$ s, $kh=0.27$)

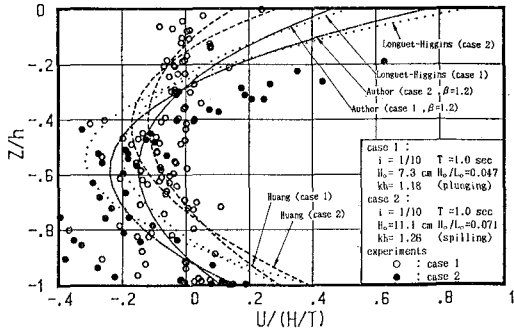
図-2 底面勾配の相違による分布特性の変化

面付近でより大きな冲向き流れ(戻り流れ)が発生し易くなり、それを補う形で水面付近では逆に岸向き流れ(質量輸送)が発生することに起因するのではないかと考えられる。

(3) 砕波型式による変化特性

次にここでは、砕波型式の相違が質量輸送の鉛直分布特性に及ぼす影響を調べる。

図-3 は、底面斜面勾配や相対水深 kh がほぼ同じ条件下で、砕波型式だけが異なる場合に分けて、質量輸送速度の理論値と実験値の分布特性の変化を示したもので、図中の case 1 が plunging 型, case 2 が spilling 型砕



図—3 碎波型式の相違による分布特性の変化

波の場合の結果を示す。なお、図中には、実験条件に合わせて本理論結果を case 1 ($i=1/10$, $T=1.0$ s, $kh=1.8$, $H_0/L_0=0.047$) 及び case 2 ($i=1/10$, $T=1.0$ s, $kh=1.26$, $H_0/L_0=0.071$) に分けて、それぞれ実験および 1 点鎖線で示し、また、case 1 の場合の実験値を○印で、case 2 の場合を●印で示す。さらに図中には、参考のために、水平床上での Longuet-Higgins の結果⁴⁾を点線で、Huang の結果⁵⁾を破線で示してある。この図から明らかなように、質量輸送速度の鉛直分布の理論結果は碎波型式によって若干異なり、水深の中央部（主流部）付近では、spilling 型碎波の場合には plunging 型碎波に比して負側（冲向き）に大きく、一方、水表面および水底面付近では、逆に正側（岸向き）に大きくなる傾向が見られる。このような傾向は実験値の分布特性にも全く同様に見られ、主流部付近での理論値と実験値の対応は、かなり良好であると言えよう。しかしながら、水面付近では、理論値と実験値の差異は著しく、特に plunging 型碎波の場合にそれが顕著である。これは、plunging 型碎波の実験値は、碎波に到る過程で波形の非対称性が徐々に著しくなり、 kh の値の減少につれて最早微小振幅波理論では波動場を近似できなくなることなどの影響が考えられる。今後は、このような波形の非対称性や波の有限振幅性の影響をも考慮した理論の展開を行っていく必要があるように思われる。

4. 結 論

以上、碎波点以深における傾斜面上での質量輸送速度の鉛直分布特性について、理論と実験の両面から詳しく検討してきた。これまでに得られた結果を要約すれば、次のようである。

- 1) 本理論結果は、実験条件のいかんにかかわらず、碎波点以深における傾斜面上での質量輸送速度の鉛直分布を、かなり良く説明できるように思われる。
 - 2) 質量輸送速度の鉛直分布は、斜面勾配によって変化し、斜面勾配が大きいほど流体主流領域から底面付近にかけての質量輸送速度はより大きな負の値（冲向き）をとるが、一方、水素面付近では逆に正の値（岸向き）をとる傾向が見られることが、理論と実験結果の両面から明らかである。
 - 3) 碎波点以深における傾斜面上での水面過渡は、水平位置及び碎波型式などの変化によって異なり、特に碎波点に近づくにつれて徐々に大きくなり、かつ、spilling 型碎波の場合が最も過渡が大きくなる傾向にあることが、水面質量輸送速度勾配の結果から言えるように思われる。
- 最後に、日頃、温かい御指導を賜っている京都大学名誉教授岩垣雄一先生（現名城大学理工学部教授）及びデータの解析や整理に助力を惜しまなかった家郷佳一君（元大阪府立高専学生）に心から感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) Bijker, E. W., Kalkwijk, J. P. Th. and T. Pieters: Mass transport in gravity waves on a sloping bottom, Proc. 14th Conf. on Coastal Eng., pp. 447~465.
- 2) 平山秀夫: 二次元傾斜海浜上における波による質量輸送に関する理論的研究, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 49~53, 1984.
- 3) 平山秀夫: 二次元傾斜海浜上における波による質量輸送に関する理論的研究(第 2 報), 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 6~10, 1987.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans. Royal Soc., Series A, No. 903, Vol. 245, pp. 535~581, 1953.
- 5) 平山秀夫: 傾斜底面上における波による質量輸送速度に関する実験的研究, 第 28 回海岸工学講演会論文集, pp. 29~33, 1981.
- 6) 平山秀夫: 二次元傾斜海浜における質量輸送速度の特性について, 第 29 回海岸工学講演会論文集, pp. 264~268, 1982.
- 7) Stokes, G. G.: On the theory of oscillating waves, Trans. Camb. Phil. Soc., 8, pp. 441~445, 1847.
- 8) Huang, N. E.: Mass transport induced by wave motion, Jour. Mari. Res., Vol. 28, No. 1, pp. 35~50, 1970.
- 9) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface, J. Fluid. Mech., Vol. 8, pp. 293~315, 1960.
- 10) 平山秀夫: 波による質量輸送に関する基礎的研究, 大阪府立高専研究紀要, Vol. 20, pp. 39~45, 1986.