

砕波にいたる波形解析の一方—基礎理論

京 藤 敏 達*・首 藤 伸 夫**

1. はじめに

内部波もしくは水面波のように界面を有する流れは、それらの界面における非線形性が卓越するに伴い、砕波にいたる。したがって、その非線形性を考慮に入れない限り、砕波に到る現象の解析は困難である。

近年の計算機の進展に伴い、現在のところ、非線形性がかなり卓越する時点までの波形の数値計算が可能となりつつある¹⁾。しかし、高次の非線形性を有する現象の数値計算では、二次元の砕波現象の解析でさえ、理論的根拠に欠けるスムージングを行う必要があること、および、空間周期的な現象や孤立波のように波が空間的に局在する場合に限ってでさえ計算点をかなり密に取らない限り妥当な結果を得ることは困難である。したがって、海岸工学で問題となる三次元の波または不規則波の砕波現象の解明は、計算機の容量などの点から、砕波に到る波のモデル化なしには、困難である。

ところで、自由表面条件、すなわち、運動学的条件と圧力条件を同時に満たす解析的手法が古くから研究されており²⁾、二次元完全流体の定常問題の簡単な厳密解が得られている。これらの理論の中で、特に、John³⁾が導いた方程式³⁾は、非定常現象を取り扱える点で優れており、その後、彼の方程式を使って、M. S. Longuet-Higgins⁴⁾らは砕波波形のモデル化を試みている。

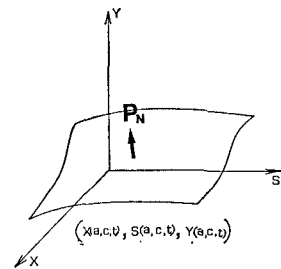
しかし、彼らの研究は自由表面運動を記述する偏微分方程式に含まれる不定関数を試行錯誤で与えて、プランジ型砕波波形を近似しており、理論の適用範囲が限られている。

以上のことを踏まえて、本論文では、非線形性の卓越する自由表面の運動を解析的にモデル化する手法を提示する。また、すべて Lagrange 表記に基づく運動方程式を用い、流体は非粘性・非圧縮性流体として近似できると仮定する。

2. 自由表面の運動方程式

この章では、非粘性非圧縮性流体の自由表面運動を支

配する偏微分方程式について議論する。基本的には、John³⁾が導いた二次元の自由表面条件を完全に満足する方程式を三次元の水面波に拡張し、そのモデル方程式に含まれる不定関数の物理的意味を示す。



図—1 自由表面の運動

まず、非圧縮非粘性流体の三次元流れの自由表面の運動を支配する方程式を導く。座標系は、水平面内に X 軸、 S 軸をとり、鉛直上方に Y 軸をとる。いま、自由表面上の流体粒子のみの運動を考える。このときの未知関数はその位置 $(X(t, a, c), S(t, a, c), Y(t, a, c))$ である。ただし、 (a, c) は自由表面上の Lagrange 変数である(図—1)。

Lagrange の運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -P_X/\rho, & \ddot{S} &= -P_S/\rho, & \ddot{Y} &= g = -P_Y/\rho \\ & \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

である。ここで、 ρ は密度、 g は重力加速度である。上式を用いて自由表面接線方向の圧力勾配を計算し、自由表面における圧力一定の条件: $P(t, X, S, Y) = \text{CONST.}$ を考慮すれば、未知関数 $X(t, a, c)$, $S(t, a, c)$, $Y(t, a, c)$ に対する 2 本の偏微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} X_a + \ddot{S} S_a + (\ddot{Y} + g) Y_a &= 0 \\ \ddot{X} X_c + \ddot{S} S_c + (\ddot{Y} + g) Y_c &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

が得られる。

未知関数 (X, S, Y) に対するもう 1 本の方程式は、自由表面に関して法線方向の圧力勾配の表示から求めることができる。自由表面上の 2 つの独立な接線ベクトルは (X_a, S_a, Y_a) & (X_c, S_c, Y_c)

であり、これらに直交するベクトルを (α, β, γ) とすれ

* 正会員 工博 筑波大学講師 構造工学系

** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

ば、容易に

$(\alpha, \beta, \gamma) = (S_a Y_c - S_c Y_a, Y_a X_c - Y_c X_a, X_a S_c - X_c S_a)$
となる。また、自由表面に外向き法線方向の圧力勾配 P_n
は (α, β, γ) を用いて

$$P_n = \text{grad } P \cdot (\alpha, \beta, \gamma) / |(\alpha, \beta, \gamma)| \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。上式に Lagrange の運動方程式を代入すれば、
次の方程式が得られる。

$$\ddot{X}\alpha + \ddot{S}\beta + (\ddot{Y} + g)\gamma = -P_n |(\alpha, \beta, \gamma)| / \rho \quad \dots\dots\dots (4)$$

以上 3 本の方程式を $(\ddot{X}, \ddot{S}, \ddot{Y} + g)$ について解けば、自由
表面の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} &= r(S_a Y_c - S_c Y_a) \\ \ddot{S} &= r(Y_a X_c - Y_c X_a) \\ \ddot{Y} + g &= r(X_a S_c - X_c S_a) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表現することができる。不定関数 r は自由表面におけ
る圧力勾配に関係する。

上式で、 $S_c = 1, X_c = Y_c = 0$ とすれば、二次元流れの
自由表面の運動を支配する方程式となる。この場合に
は、複素数 $Z = X + iY$ (i は虚数単位) を用いて上式を表
現すると便利であり、式 (6) は

$$\ddot{Z} + ig = irZ_a, \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、John が導いた方程式³⁾ が得られる。

最後に、 r の物理的意味を明確にするために、自由表
面における圧力勾配を用いて r を表現すると、容易に、

$$r = -P_n / (\rho |Z_a|) \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。関数 r は、上の説明から理解されるように、
流体運動の結果として定まる関数である。一方、このモ
デル方程式においては、 r を近似的に与えても、非線形
性の卓越する自由表面での条件は完全に満足するため、
表面近くの現象を把握する上で有用である。

3. 流体内部への解の接続

第 2 章では、自由表面のみの流体粒子の運動方程式を
求めたが、この章では二次元の運動について、自由表面
における解から流体内部の解を構成する手法について述
べる。

3.1 流体内部の解

Lagrange の運動方程式から圧力項を消去するとその
方程式は時間 t で 1 回積分でき、渦度の保存則が導かれ
る。すなわち、Lagrange 表示による方程式系は、

$$\left. \begin{aligned} X_a Y_b - Y_a X_b &= J(a, b) \\ -(\dot{X}_a X_b + \dot{Y}_a Y_b - \dot{X}_b X_a - \dot{Y}_b Y_a) J &= \omega(a, b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで、 J はヤコビアン、 ω は渦度である。上
式を複素数 Z を用いて表現すると、次のような 1 本の複
素関数に対する偏微分方程式に変換される。

$$\dot{Z}_a^* Z_b - Z_a \dot{Z}_b^* = C(a, b), \quad \omega = -C/J \quad \dots\dots\dots (9)$$

この方程式は $\dot{Z}^*(t, a, b) = F(t, Z, Z^*)$ と置くと、

$$\partial F / \partial Z^* = C / 2iJ \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり、次のように積分できる⁵⁾。

$$\dot{Z}^* = - (1/2\pi i) \iint \hat{C} / (\hat{Z} - Z) d\hat{a} d\hat{b} + f(t, Z) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $\hat{C} = C(\hat{a}, \hat{b})$ 、 $\hat{Z} = Z(t, \hat{a}, \hat{b})$ である。

方程式 (9) は、変数 b に関して 1 階の偏微分方程式で
あるから、渦度 ω と自由表面 $b=0$ における $Z = Z(t, a)$
を与えれば解 $Z(t, a, b)$ は完全に決定される。

ここでは仮に、式 (11) の積分項が与えられていると
して、自由表面の解から流体内部の解を構成する手法を
示す。このとき、式 (11) は

$$\dot{Z}^* = I[t, Z, Z^*] + f(t, Z) \quad \dots\dots\dots (12)$$

と表すことができる。問題は、自由表面の解 $Z(t, a)$ を
使って、関数 $f(t, Z)$ を構成することである。関数 f は
 Z の解析関数であるから、次の媒介パラメータ表示で f
を求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} f(t, Z) &= \dot{Z}^*(t, \zeta) - I[t, Z(t, \zeta), Z^*(t, \zeta)] \\ Z &= Z(t, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、パラメータ a は Z が流体内部を動くように複
素数 ζ に拡張されている。以上より、流体内部の速度場
 $u - iv = \dot{Z}^*$ は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}^* &= \dot{Z}^*(t, \zeta) - I[t, Z(t, \zeta), Z^*(t, \zeta)] \\ &\quad + I[t, Z(t, \zeta), Z(t, \zeta)^*] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

より計算することができる。しかし、与えられた渦度分
布 $\omega(a, b)$ から積分 I を計算することは、一般には困難
であり、Euler 表示の渦度方程式を解く必要がある。

3.2 水面波の厳密解

以上述べたことを理解するために、John の求めた定
形波解³⁾ と Gerstner のトロコイド波解²⁾ を比較し、最後
に流れの全域で ω が一定となるときに定形波解を求め
る。

いずれも自由表面の基礎方程式；

$$\ddot{Z} + ig = irZ_a, \quad r = g \quad \dots\dots\dots (15)$$

を満足し、その解；

$$Z = a + ie \exp(ika + i\sigma t), \quad \sigma^2 = gk \quad \dots\dots\dots (16)$$

も一致する。しかし、John は流体運動が渦なしである
として内部の解を構成している。すなわち、 ζ を複素数
として次のように流体内部の解を与えている。

$$\left. \begin{aligned} Z &= \zeta + ie \exp(ik\zeta + i\sigma t), \\ \dot{Z}^* &= -\varepsilon \sigma \exp(-ik\zeta - i\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

一方、トロコイド波解は

$$Z=a+ib+i\epsilon \exp \{ik(a-ib)+iat\} \cdots \cdots (18)$$

であり, $C=-2\sigma(\epsilon k)^2 \exp(2kb)$ となるように流体内部に解が接続されている。

最後に渦度一定の場合の解は,

$$I=\omega(Z-Z^*)/2i \cdots \cdots (19)$$

を式(14)に代入することによって得られ, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{Z}^* &= \omega \{ \zeta - i\epsilon \exp(-ik\zeta - iat) - \zeta^* \\ &\quad + i\epsilon \exp(-k\zeta^* - iat) \} / 2i \\ &\quad - \epsilon \sigma \exp(-ik\zeta - iat) \cdots \cdots (20) \end{aligned}$$

以上より, 自由表面条件を完全に満足する水面波の解は容易に構成できることが, 理解される。

4. 不定関数の決め方

この章では, 底面条件などの境界条件から不定関数を決定する方法を示す。ただし, 流れは, すべて渦なしであるとする。

第2章で述べたように不定関数 r は自由表面の物理量を用いて表すことができ, 流体運動の結果として決まる関数である。また, 前章で述べたように, 仮に r が与えられたとすれば, 表面から流体内部へ解析接続することによって, 流れの全領域における解は完全に決定される。したがって, r は自由表面以外の境界条件を満足するように決定されなければならない。この考えに基づいて, 特に自由表面を有する波動について, 不定関数が満たすべき条件を求める。

基本的な考え方は, 次のようである。まず, 自由表面における基礎方程式は(6)式で与えられる。この式を底面もしくは自由表面まで解析接続する。解析接続された関数は, その位置における境界条件を満足しなければならない。このようにして r に対する方程式が得られる。

簡単のため, 水平床上的水面波と流体層の落下運動である Rayleigh-Taylor 問題に対して r が満足すべき方程式を導く。

4.1 水平床上的水面波

自由表面における解 $Z(t, a)$ から底面における解を求めるには変数 a を ζ に置き換えれば良い(図-2)。

$$Z(t, a)|_{a=\zeta} = Z(t, \zeta) \cdots \cdots (21)$$

また, $Z(t, \zeta)$ が底面における流体粒子の位置を表すための条件は, Euler-Lagrange 関係,

$$\dot{Z}(t, \zeta^*) = \dot{Z}(t, \zeta) + Z_a(t, \zeta) \dot{\zeta} \cdots \cdots (22)$$

である。さらに, 底面が平らな場合には, 境界条件として次式が与えられる;

$$Z(t, \zeta) = Z(t, \zeta^*) \cdots \cdots (23)$$

式(23)を t で微分して, 式(22)を考慮すれば, 速度に対する境界条件として,

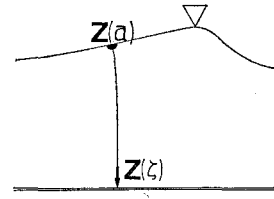


図-2 水面波

$$\dot{Z}^*(t, \zeta) = \dot{Z}(t, \zeta^*) \cdots \cdots (24)$$

が得られる。

さて, 式(6)は任意の変数 a に対する恒等式であるから, a を ζ もしくは ζ^* に置き換えた方程式も成立する;

$$\ddot{Z}(t, \zeta^*) + ig = ir(t, \zeta^*) Z_a(t, \zeta^*) \cdots \cdots (25)$$

以上(22), (23), (25)の3式が未知関数 Z, ζ, r に対する方程式である。

ところで, 具体的に数値計算もしくは近似計算するために, 次のような変形をする。 $\tilde{Z}$ および $\hat{Z}$ を

$$\tilde{Z} \equiv Z(t, a)|_{a=\zeta}, \quad \hat{Z} \equiv Z(t, a)|_{a=\zeta^*} \cdots \cdots (26)$$

で定義する。これらの関数を用いて, 式(22), (23) および式(25)を表現する。

$$\dot{\tilde{Z}} = \dot{\hat{Z}} - A^* \hat{Z}_a, \quad A \equiv \dot{\zeta}/\zeta_a \cdots \cdots (22')$$

$$\tilde{Z} = \hat{Z}^* - 2iB \cdots \cdots (23')$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{Z}} - 2A^* \dot{\hat{Z}}_a + (A^* \hat{Z}_{aa} - \dot{A}^*) \hat{Z}_a + A^{*2} \hat{Z}_{aa} + ig \\ = ir(t, \zeta^*) \hat{Z}_a / \zeta_a^* \cdots \cdots (25') \end{aligned}$$

また, 式(22')を t で1回微分し, 式(23')を考慮すれば,

$$\ddot{\tilde{Z}} - A^* \dot{\hat{Z}}_a - \dot{A}^* \hat{Z}_a = \ddot{\hat{Z}}^* - A \dot{\hat{Z}}_a^* - \dot{A} \hat{Z}_{aa}^* \cdots \cdots (27)$$

となる。

r に対する決定方程式を求めるため, 式(25')および式(27)から, 時間に関する2階微係数を消去すれば,

$$\begin{aligned} r(t, \zeta) (\dot{\hat{Z}}_a^* / \zeta_a^*) + r(t, \zeta^*) (\dot{\hat{Z}}_a / \zeta_a) \\ = i(A^* \dot{\hat{Z}}_a - A \dot{\hat{Z}}_a^* + A A_a \hat{Z}_{aa}^* - A^* A_a \hat{Z}_{aa} \\ + A^{*2} \hat{Z}_{aa}^* - A^{*2} \hat{Z}_{aa} - 2ig) \cdots \cdots (28) \end{aligned}$$

が得られる。厳密な数値計算をする場合には, 式(22)で ζ , 上式から各ステップにおける r を決め, 式(6)で Z の時間発展を求めればよい。任意地形の場合にも同様の議論ができる。

4.2 Rayleigh-Taylor 問題

流体層の落下運動を解析するときには, 2つの自由表面を考慮しなければならない。この場合にも, 上と同様の議論ができることを示す。

図-3のように自由表面1を基準にとり, 自由表面1の解 $Z(t, a)$ から自由表面2の解 $Z(t, \zeta)$ を構成する。

水面波のときと同様にして, 自由表面1の条件式(6)

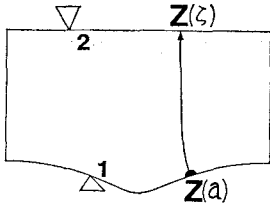


図-3 Rayleigh-Taylor 問題

から式 (25') が導かれる。また、自由表面 2 における圧力一定の条件は、加速度と圧力勾配の釣合から、

$$\ddot{Z} - A^* \dot{Z}_a - A^* \dot{Z}_a + ig = iR(t, a) \tilde{Z}_a \dots\dots\dots (29)$$

となる。上式右辺で R は実数値関数であり、圧力による外力に対応する。式 (25') と式 (29) より、 $r(t, a)$ と $R(t, a)$ に対する決定方程式；

$$\begin{aligned} r(t, \zeta^*) (\dot{Z}_a / \zeta^* a) - R(t, a) \tilde{Z}_a \\ = i(A^* \dot{Z}_a - A^* A^* \dot{Z}_a - A^* \dot{Z}_{aa}) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

が得られる。

5. 自由表面運動のモデル化

まず、第 4 章で導いた方程式系の性質を調べるために、小振幅波について、 r, ζ などの解を具体的に計算する。次に、水面波と Rayleigh-Taylor 問題について、自由表面条件を完全に満足する形でモデル化を行なう。

5.1 小振幅波の解

静水状態における解を

$$Z_0 = a, \quad r_0 = g, \quad \zeta_0 = a - iB$$

と置く。式 (6), (28) および (22') より、小振幅波の運動方程式、 r の決定方程式および ζ に対する方程式は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Z}_1 &= igZ_{1a} + ir_1 \\ r_1(a - iB) + r_1(a + iB) &= -g\{Z_{1a}^*(a - iB) \\ &\quad + Z_{1a}(a + iB)\} \\ \dot{\zeta}_1 &= \dot{Z}_1(a + iB) - \dot{Z}_1(a - iB) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

となる。ただし、添字 1 は第 1 近似項であることを示す。

一方、底面条件の摂動近似は、

$$\zeta_1 + Z_1(a - iB) = Z_1^*(a + iB) + \zeta_1^* \dots\dots\dots (32)$$

であり、上式を t で微分したのち ζ_1 に対する時間発展方程式を考慮すると、

$$\dot{Z}_1(a + iB) = \dot{Z}_1^*(a - iB) \dots\dots\dots (33)$$

となる。 r_1 の決定方程式が、底面条件 (33) を満たすことは次のように証明される。式 (31) の第 1, 2 式から、

$$\dot{Z}_1^*(a - iB) = \dot{Z}_1(a + iB).$$

したがって、 Z_1 が $t=0$ に式 (33) を満たすように選べば、以後 r の決定方程式を解くことによって、底面条件

は満足される。

本方法では、流体内部の解を自由表面から解析接続して構成しているため、初期値の与え方が従来のポテンシャル論と異なることに注意を要する。すなわち、初期位置 $Z(\zeta)$ は流体内部に特異点を持たず、 $\zeta = a - iB$ が底面上にあるように選ばなければならない。同じく、初速度 $\dot{Z}^*(\zeta)$ は、流体内部に特異点を持たず、式 (33) を満たす必要がある。以下に、これらの条件を満たすように設定した小振幅波の解を示す。

$$\left. \begin{aligned} Z &\doteq a - (\epsilon / \sinh kB) \{ \sin \{ k(a - iB) - \sigma t \} \\ &\quad - \sinh(a - iB) - \sin k(a + iB) \}. \\ \sigma^2 &= gk \tanh kB \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

5.2 モデル方程式

この節では、自由表面の境界条件は近似せず、底面条件を近似することによって、大変形する波をモデル化する手法について議論する。

New⁹⁾ によって示されたように、巻き波型砕波は、巻き込み側の波形が楕円によって近似でき、自己相似の性質が著しい現象である。したがって、これらの波形を近似するとき重要となるのは、底面条件よりも自由表面条件である。また、砕波のように表面が大変形する場合には、表面条件を正確に取り入れることが重要である。このためには、自由表面の運動方程式に現れる不定関数 r を現象に応じて近似し、自由表面条件は厳密に取り扱うことが必要である。この節では、その第一段階として、流体内部への接続関数 ζ がその初期値で近似できる場合について議論する。

5-2-1 水面波

仮に、解析接続する変数が初期値

$$\zeta \doteq a - iB \dots\dots\dots (35)$$

で近似できるとする。このとき、上の方程式系は

$$\left. \begin{aligned} r(t, a - iB) Z^*(a, a - iB) \\ + r(t, a + iB) Z_a(t, a + iB) &\doteq 2g \\ \ddot{Z}(t, a) + ig &= ir(t, a) Z_a(t, a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

となる。ここで、上記の r に対する決定方程式は、式 (31) から判るように小振幅波の解を含んでいる。この方程式系の具体的な数値計算は今後行うこととし、ここでは r の物理的意味について考察する。パラメータ B が波長に比べて小さいとき、式 (36) から r は、

$$\left. \begin{aligned} r &\doteq 2g / (Z_a + Z_a^*) \\ \ddot{Z} + ig &= 2igZ_a / (Z_a + Z_a^*) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

となる。上の近似に対する圧力勾配は、式 (6) から、

$$P_n = -2\rho g |Z_a| / (Z_a + Z_a^*) \dots\dots\dots (38)$$

となり、波の振幅が小さいとき、小振幅長波の圧力勾配に一致する。

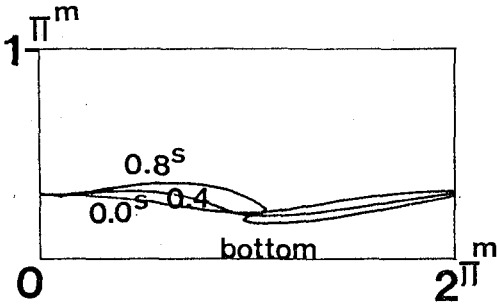


図-4 長波の変形

図-4 に、初期値として小振幅波の解 (34) を用いて、式 (37) を数値計算した結果を示す。式 (37) の解は、小振幅長波の場合、解析的に小振幅波の解 (34) に漸近するはずであるが、計算結果はモデル方程式の非線形性のために、波形が前傾化する。

5-2-2 Rayleigh-Taylor 問題

先と同様にして、解析接続する変数 ζ が初期値；

$$\zeta = a + iB \quad \dots\dots\dots (39)$$

で近似できるとき、式 (30) は

$$r(t, a - iB) Z_a(t, a - iB) - R(t, a) Z_a(t, a + iB) = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる。この問題では、以下に示すように r を具体的に求めることができる。

上式に複素共役をとり、 R を消去すれば、

$$\left. \begin{aligned} r(t, a - iB) / r(t, a + iB) \\ = Z_a(t, a + iB) Z_a^*(t, a + iB) \\ / [Z_a(t, a - iB) Z_a^*(t, a - iB)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (41)$$

上式は、関数 r が流体内で特異点を持たないという条件から、容易に解くことができ、次のように表される。

$$r(t, a) = \kappa(t) / Z_a Z_a^*(t, a), \quad \kappa(t); \text{実数値関数} \quad \dots\dots\dots (42)$$

結局、Rayleigh-Taylor 問題のモデル方程式は

$$\ddot{Z}(t, a) + i g \kappa(t) / Z_a^*(t, a) \quad \dots\dots\dots (43)$$

で与えられる。関数 $\kappa(t)$ は、流体層が重力場で静止するような自由表面における圧力条件のもとでは $\kappa(t) = g$ となる。

具体的に、式 (43) を使って、半無限水深の流体層の落下運動をシュミレートする。流体層の初速度は 0 であり、自由表面 1 の初期位置は 5-2-1 節と同様にして、

$$Z = a - i \varepsilon \exp(i a) \quad \dots\dots\dots (44)$$

で与える。計算結果は、図 5 のようであり、G. R. Baker ら⁷⁾ の数値計算結果と比較すると、流体運動は定性的な

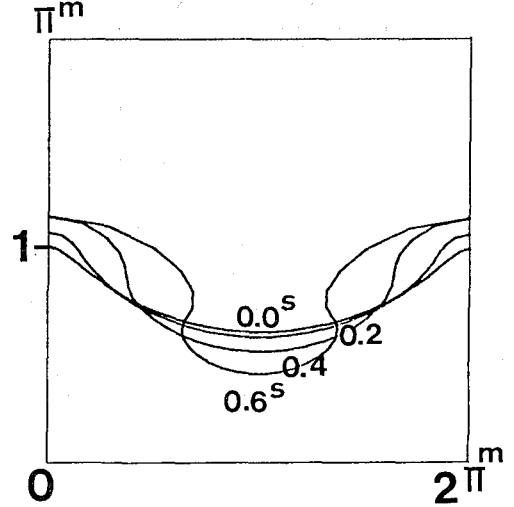


図-5 流体層の落下運動

一致を示す。

6. ま と め

非粘性非圧縮性流体の自由表面の運動を記述する偏微分方程式を導出し、その方程式を用いて自由表面を有する流れの厳密解を構成した。

また、水面波と Rayleigh-Taylor 問題のモデル方程式を導き、それを数値計算し、砕波波形のモデル化について考察を与えた。

謝 辞：最後に、本研究の数値計算に関して、筑波大学博士課程 武若 聡君の助力を得ました。また、本研究は文部省科学研究費重点領域『非線形流れ問題の数値シュミレーション』の補助を受けたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Baker, G. R., D. I. Meiron and S. A. Orszag: Generalized vortex methods for free surface flow problems, J. Fluid Mech., Vol. 123, pp. 477~501, 1982.
- 2) Milne-Thomson, L. M.: Theoretical hydrodynamics, Macmillan Co. Ltd., 743 p., 1968.
- 3) John, F.: Two-dimensional potential flows with a free boundary, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 6, pp. 497~503, 1953.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: Parametric solutions for breaking waves J. Fluid Mech., Vol. 121, pp. 403~423, 1982.
- 5) Courant, R. and D. Hilbert: Methods of mathematical physics, Vol. II, Interscience Publishers, 830 p., 1962.
- 6) New, M.: A class of elliptical free surface flows, J. Fluid Mech., Vol. 130, pp. 219~239, 1983.
- 7) Baker, G. R., R. L. McCrory, C. P. Verdon and S. A. Orszag: Rayleigh-Taylor instability of fluid layers, J. Fluid Mech., Vol. 178, pp. 161~175, 1987.