

媒介変数で表わされる水面波形を用いた波の浅水変形と砕波

浜 中 建 一 郎*

1. ま え が き

従来、波の浅水変形に関する解析的取り扱いにおいては、水面波形は水平座標と時間座標との一価関係で表わされることが多い。例えば、浜中・加藤¹⁾(以下前報と呼ぶ)の浅水変形に対するストークス法の展開では、水平座標と時間座標軸上のフーリエ級数が用いられた。一方、砕波時においては周知のとうり、波の前面はきり立ち、さらに波頂部は前下方にせり出していく。このような波形は前述の一価関数を用いている限り、いかに水底勾配の効果を考慮し、かつ高次近似解に展開しても表現することは出来ない。このことから本研究では、媒介変数を用いて水面波形を表わすことにより波前面のきり立ちや多価関数化を可能にし、この水面波形に従った自由表面境界条件式を導出し、摂動法を用いて解くことにより砕波点近傍の浅水変形解を提案する。

2. 解 析 方 法

(1) 基礎方程式

各変量を前報と同様波動運動の角周波数と重力加速度で無次元化し、座標系を図-1 の様にとる。流体は非粘性、非圧縮とし、運動は非回転とする。水粒子の速度ポテンシャルを ϕ とすると、流体内部では

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

水底では

$$\phi_y + h_x \phi_x = 0; \quad y = -h \quad \dots\dots\dots (2)$$

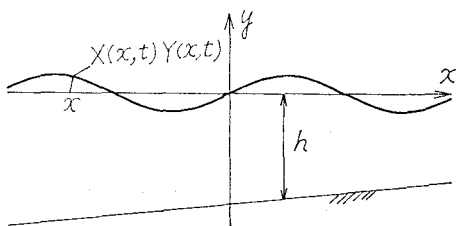


図-1 座 標 系

である。水面波形の x, y 座標を X, Y とし、これを媒介変数を用いて表わすのであるが、媒介変数として、 x, t を用い、

$$X = X(x, t), \quad Y = Y(x, t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

とする。この X, Y は静水時に x に居た水面の水粒子の運動時の x, y 座標とすることは非常に考え易い。しかし、ストークスドリフトや戻り流れ等の定常流が存在する変形波動場では解析が著しく困難となる。すなわち、これ等の定常流は場所的に異なり、特定の水粒子の一周平均位置は時間と共に移動し、同時にその移動速度も時間と共に変化する。従って通常の摂動法は適用出来ない。このことから本研究では以下の様にして X, Y を与える。静水時に x の位置の水面に置かれたマーカーを考える。運動時のマーカーは、その位置での水粒子の持つ速度で動くと同時に定常流分だけ水面に沿って戻るとし、そのマーカーの x, y 座標を X, Y とする。このことにより、 X, Y は水面波形を表わすと同時に常にその初期位置の近傍だけを動くことになり、静水時の位置の回りでの Taylor 展開を用いた摂動展開が可能となる。この X, Y を用いて水面での運動学的境界条件を表わすと、

$$X_t = \phi_x - Q X_x \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$Y_t = \phi_y - Q Y_x \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。ただし、 ϕ_x, ϕ_y の値は $x = X, y = Y$ でのものとする。又、 Q は上に述べた意味で定常流分をキャンセルするための x だけに依存する量である。

水面での力学的境界条件は、

$$\phi_t + Y + \frac{1}{2}(\phi_x)^2 + \frac{1}{2}(\phi_y)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり、同様に ϕ は $x = X, y = Y$ での値とする。

以上の (1) (2) (4) (5) (6) 式が基礎方程式である。

(2) 摂動展開

(4) ~ (6) 式の中の ϕ はマーカーの位置での値であるから、これをマーカーの静水時の位置 $(x, 0)$ の回りでの Taylor が展開する。この時、 X の振動成分を $\tilde{X}$ として、

$$X = x + \tilde{X} \quad \dots\dots\dots (7)$$

とすると、

* 正会員 工博 北海道大学助手 工学部土木工学科

$$\begin{aligned}\phi(X, Y) &= \phi(x, 0) + \tilde{X}\phi_x(x, 0) + Y\phi_y(x, 0) \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{X}^2\phi_{xx}(x, 0) + \tilde{X}Y\phi_{xy}(x, 0) \\ &+ \frac{1}{2}Y^2\phi_{yy}(x, 0) + \dots \quad \dots\dots\dots(8)\end{aligned}$$

となる。(8) 式を (4) (5) (6) 式に代入する。さらに、 x 方向の変化の割合を表わす微小パラメータ δ で x 座標を圧縮すると (1) 式は

$$\delta^2\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

(4) 式は

$$\begin{aligned}X_t &= \delta\phi_x + \delta^2\tilde{X}\phi_{xx} + \delta Y\phi_{xy} + \delta^3\frac{1}{2}\tilde{X}^2\phi_{xxx} \\ &+ \tilde{X}Y\phi_{xy} + \frac{1}{2}Y^2\phi_{yy} + \dots + QX_x; \quad y=0 \\ &\dots\dots\dots(10)\end{aligned}$$

となる。(5) (6) (2) 式も同様である。

次に前報と同様、各パラメータの場所的变化の割合が周期運動のそれに比し、ひとオード低いとして

$$\xi = \zeta^{-1} \int k dx - t \quad \dots\dots\dots(11)$$

を用いた座標変換を行うと

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \delta^{-1}k \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -\frac{\partial}{\partial \xi}\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

に置き変る。この様にして変換された基礎方程式に対し、各変量を非線形性を表わすパラメータ ε と変形性を表わすパラメータ δ で摂動展開する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned}\phi &= \varepsilon\phi^{(1,0)} + \varepsilon^2\phi^{(2,0)} + \varepsilon^3\phi^{(3,0)} + \dots \\ &+ \varepsilon\delta\phi^{(1,1)} + \varepsilon^2\delta\phi^{(2,1)} + \dots \\ X &= \delta^{-1}x + \varepsilon X^{(1,0)} + \varepsilon^2 X^{(2,0)} + \varepsilon^3 X^{(3,0)} + \dots \\ &+ \varepsilon\delta X^{(1,1)} + \varepsilon^2\delta X^{(2,1)} + \dots \\ Y &= \varepsilon Y^{(1,0)} + \varepsilon^2 Y^{(2,0)} + \varepsilon^3 Y^{(3,0)} + \dots \\ &+ \varepsilon\delta Y^{(1,1)} + \varepsilon^2\delta Y^{(2,1)} + \dots \\ k &= n + \varepsilon k^{(1,0)} + \varepsilon^2 k^{(2,0)} + \dots \\ &+ \delta k^{(0,1)} + \varepsilon\delta k^{(1,1)} + \dots\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

これ等を基礎方程式に代入し、各オードごとに方程式をまとめる。その時、 Q も同時に展開すべきだが、 ε^3 のオードまでしか考えないときには、 ε^2 のオードだけにしか未知量としての Q は現われないから、その必要はない。

$\varepsilon^1 \delta^1$ のオードで基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned}\phi_{yy}^{(1,0)} + n^2\phi_{\xi\xi}^{(1,0)} \\ X_{\xi}^{(1,0)} + n\phi_{\xi}^{(1,0)} = 0; \quad y=0 \\ \phi_y^{(1,0)} + Y_{\xi}^{(1,0)} = 0; \quad y=0 \\ \phi_{\xi}^{(1,0)} - Y^{(1,0)} = 0; \quad y=0 \\ \phi_y^{(1,0)} = 0; \quad y=-h\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる。この (14) 式は第2式を除き前報の同じオードの式と同じ形をしており、解も同じ形式で

$$\phi^{(1,0)} = -i\frac{a}{2} \cosh \alpha e^{i\xi} + C.C. \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$Y^{(1,0)} = \frac{a}{2} \cosh \beta e^{i\xi} + C.C. \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$n \tanh \beta = 1 \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\text{ただし } \alpha \equiv n(y+h), \quad \beta \equiv nh$$

が得られ、(14) 式の第2式から

$$X^{(1,0)} = i\frac{a}{2} n \cosh \beta e^{i\xi} + C.C. \quad \dots\dots\dots(18)$$

が得られる。

$\varepsilon^1 \delta^1$ のオードでの解は

$$\begin{aligned}\phi^{(1,1)} &= \{(C_1\alpha^2 + C_2\alpha) \cosh \alpha + C_3\alpha \sinh \alpha\} e^{i\xi} \\ &+ C.C. \quad \dots\dots\dots(19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y^{(1,1)} &= i\{(C_1\beta^2 + C_2\beta) \cosh \beta + C_3\beta \sinh \beta\} e^{i\xi} \\ &+ C.C. \quad \dots\dots\dots(20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^{(1,1)} &= \left[\left\{ \frac{a_2}{2} - n(C_1\beta^2 + C_2\beta) \right\} \cosh \beta \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{a}{2} \beta_x - nC_3\beta \right\} \sinh \beta \right] e^{i\xi} + C.C. \\ &\dots\dots\dots(21)\end{aligned}$$

$$a^2 n (\sinh^2 \beta + h) = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$k^{(0,1)} = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

ただし

$$C_1 = -\frac{a}{4n^2} n_x, \quad C_2 = -\frac{a}{2} h_x, \quad C_3 = -\frac{a_x}{2n}$$

ここで (22) 式は前報と同様、線形波のエネルギー保存則を表わし、振幅の場所的变化が求まる。

$\varepsilon^1 \delta^2$ のオードも同様に求めてみるが、緩勾配の場合、その影響は非常に小さいことが前報で分っているから詳細は省略する。

$\varepsilon^2 \delta^0$ のオードでは、基礎方程式は、基本周期に関するもの、その2倍周期に関するもの、定常項に関するものの3つの方程式系に分離される。第1のものから

$$k^{(1,0)} = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

が得られ、第2のものからは

$$\begin{aligned}\phi^{(2,0)} &= -i\frac{3}{16} a^2 (n-1) n^2 \cosh 2\alpha e^{i2\xi} + C.C. \\ &\dots\dots\dots(25)\end{aligned}$$

$$Y^{(2,0)} = \frac{3}{8} a^2 (n^2-1) n^2 \cosh^2 \beta e^{i2\xi} + C.C. \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$\begin{aligned}X^{(2,0)} &= i\frac{1}{16} a^2 (3n^2+1)(n^2-1)n \cosh^2 \beta e^{i2\xi} \\ &+ C.C. \quad \dots\dots\dots(27)\end{aligned}$$

を得る。さらに定常項に関する方程式から

$$V^{(2,0)} = 0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$Y_0^{(2,0)} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 (n^2 + 1) \cosh^2 \beta \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$Q = \frac{a^2}{2} n(n^2 + 1) \cosh^2 \beta + U^{(2,0)} \quad \dots\dots\dots (30)$$

を得る。ここで $U^{(2,0)}$, $V^{(2,0)}$ は定常流の x , y 方向の成分で、 $Y_0^{(2,0)}$ は Wave set-down を表わす。この $Y_0^{(2,0)}$ は通常のストークス展開の場合と表現が異なっているが、この解析の場合、線形波がトロコイド波形を持ち、幾何学的に平均水面が下っており、それを考慮するとストークス展開の場合と一致している。又、 $U^{(2,0)}$ は戻り流れを表わし、汀線の存在を考え、このオーダまでの断面質量輸送が零となる様に求めて、 Q が定まる。これ等の定常項は ϵ^3 のオーダの方程式の強制項の中に含まれ、そのオーダの解に影響を与える。

$\epsilon^2 \delta^1$ のオーダでは

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(2,1)} &= D^{(2,1)} e^{i2\xi} + C.C. \\ X^{(2,1)} &= A^{(2,1)} e^{i2\xi} + C.C. \\ Y^{(2,1)} &= iB^{(2,1)} e^{i2\xi} + C.C. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

とし、さらに

$$\phi^{(2,0)} = iD^{(2,0)} e^{i2\xi} + C.C. \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\text{ただし } D^{(2,0)} = a^{(2)} \cosh 2\alpha$$

とすると、基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} D_y^{(2,1)} - n^2 D^{(2,1)} &= 2n_x D^{(2,0)} + 4n D_x^{(2,0)} \\ A^{(2,1)} + n D^{(2,1)} &= F_1 ; \quad y=0 \\ D_y^{(2,1)} - 2B^{(2,1)} &= F_2 ; \quad y=0 \\ 2D^{(2,1)} - B^{(2,1)} &= F_3 ; \quad y=0 \\ D_y^{(2,1)} - 2nh_x D^{(2,0)} &= 0 ; \quad y=-h \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。ここで F_1 , F_2 , F_3 は低次のオーダの解で作られる強制項である。これ等を用いて解を記述すると、

$$D^{(2,1)} = (E_1 \alpha^2 + E_2 \alpha + E_3) \cosh 2\alpha + E_4 \alpha \sinh 2\alpha \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし

$$\begin{aligned} E_1 &= a^{(2)} \frac{n_x}{n^2}, \quad E_2 = 2a^{(2)} h_x, \quad E_4 = \frac{a_x^{(2)}}{n} \\ E_3 &= \frac{2F_3 - F_2 + D_y - 4D}{4 \sinh^2 \beta}; \quad y=0 \\ D &= (E_1 \alpha^2 + E_2 \alpha) \cosh 2\alpha + E_4 \alpha \sinh 2\alpha \\ B^{(2,1)} &= 2D^{(2,1)} - F_3; \quad y=0 \quad \dots\dots\dots (35) \\ A^{(2,1)} &= -n D^{(2,1)} + F_1; \quad y=0 \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる。

$\epsilon^3 \delta^0$ のオーダでは、

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(3,0)} &= iD_1^{(3,0)} e^{i\xi} + iD_{111}^{(3,0)} e^{i3\xi} + C.C. \\ X^{(3,0)} &= iA_1^{(3,0)} e^{i\xi} + iA_{111}^{(3,0)} e^{i3\xi} + C.C. \\ Y^{(3,0)} &= iB_1^{(3,0)} e^{i\xi} + iB_{111}^{(3,0)} e^{i3\xi} + C.C. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

とする。基本周期を持つ解はラプラスの式と底部境界条件から

$$D_1^{(3,0)} = -\frac{a}{2n} k^{(2,0)} (\alpha \sinh \alpha - \beta \cosh \alpha) \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。3 個の自由水面境界条件式を

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(3,0)} + n D_1^{(3,0)} &= G_{11} \\ D_{1y}^{(3,0)} + B_1^{(3,0)} &= G_{12} \\ D_1^{(3,0)} \pm B_1^{(3,0)} &= G_{13} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39)$$

とすると、

$$k^{(2,0)} = \frac{2(G_{13} - G_{12})}{a(n\beta + 1 - h) \sinh \beta} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$B_1^{(3,0)} = G_{13} - D_1^{(3,0)}; \quad y=0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$A_1^{(3,0)} = G_{11} - n D_1^{(3,0)}; \quad y=0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

となる。3 倍周期を解も同様にして

$$D_{111}^{(3,0)} = a^{(3)} \cosh 3\alpha \quad \dots\dots\dots (43)$$

となり、3 個の自由境界条件式を

$$\left. \begin{aligned} A_{111}^{(3,0)} + n D_{111}^{(3,0)} &= G_{1111} \\ D_{111y}^{(3,0)} + 3B_{111}^{(3,0)} &= G_{1112} \\ 3D_{111}^{(3,0)} + B_{111}^{(3,0)} &= G_{1113} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

と書くと、

$$a^{(3)} = \frac{G_{1112} - 3G_{1113}}{(3n \sinh 3\beta - 9 \cosh 3\beta)} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$B_{111}^{(3,0)} = G_{1113} - 3D_{111}^{(3,0)}; \quad y=0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$A_{111}^{(3,0)} = G_{1111} - n D_{111}^{(3,0)}; \quad y=0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

となる。

特に (40) 式は、非線形性による波数の補正項で、右辺で使われている強制項 G_{13} の中には (30) 式に現われている戻り流れ $U^{(2,0)}$ が含まれており、波速に及ぼす戻り流れの効果が評価されている。従って、もし汀線が存在しなかったり、存在しても他の場所での rip current 等の存在により、考えている点である量の断面質量輸送を許すなら、それに見合って $U^{(2,0)}$ が決まり、波速が決まる。このことは、与えられた条件に従って波速の値が変わるのであって、謂ゆる波速の第一定義第二定義といった定義そのものが変わるわけではないことを意味する。又、このオーダまで展開すると、(22) 式で与えられる線形波のエネルギー保存則だけでは全体のエネルギー保存が成り立たなくなり、このオーダの方程式の斉次解（基本周期を持つ）の導入が必要となるが、その振幅は全体のエネルギー保存が満たされる様にして決まる²⁾。

3. 結果及び考察

この節では、前節で述べた $\epsilon^1 \delta^0$, $\epsilon^1 \delta^1$, $\epsilon^2 \delta^0$, $\epsilon^2 \delta^1$, $\epsilon^3 \delta^0$ のオーダまでの解を用いてその性質を調べる。

図-2 は一周期を 10 分割し下から順に並べた Wave profile の時間経果で、水底勾配 1/10、沖の線形波の無次元振幅 $a_0 = 0.2$ のものである。この図から、波の浅水域への進行に伴って波形が前傾化し、波前面がきり立つ

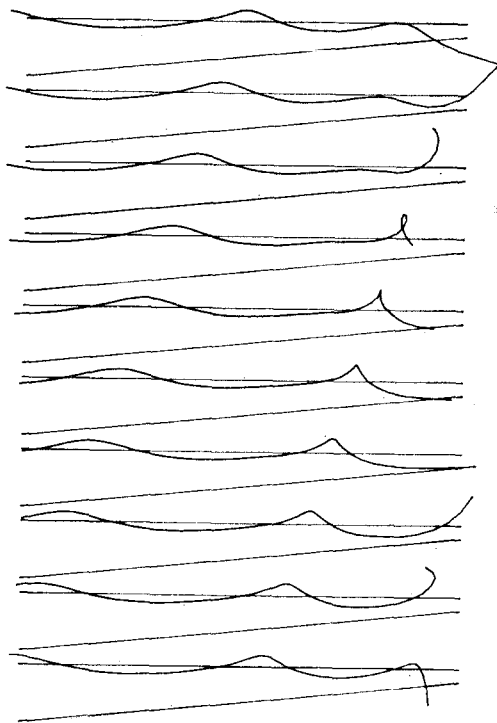


図-2 Wave profile, $h_x = -0.1$, $a_0 = 0.2$

ていく様子が分る。しかし、砕波の発生点として妥当と
考えられる波前面が垂直にきり立った点を見ると、波後

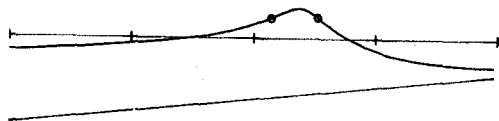


図-3 砕波発生点

面もきり立ち、波形は上方に向って尖り過ぎている。
又、この点での波高・水深比を求めてみると、これまで
報告されている実測値に比べかなり大きめの値となっ
た。そこで、砕波発生点として便宜的に図-3の様に、
波の前面と後面で最大(最小)傾斜角となる2点で接線
をとり、その交角が 120° となる時とした。図中波頂前
後の円印が接線を求めた点である。

図-4はその様にして求めた砕波波高 H_b と砕波水深
 h_b との比を砕波点での相対水深に対して示したもので
ある。ここで、実線は合田³⁾による砕波指標である。こ
の図から、海底勾配 $1/10$ では $0.03 < h_b/L_0 < 0.6$, $1/50$
では $0.05 < h_b/L_0 < 0.6$ の範囲でほぼ妥当な値となっ
ている。又、合田の指標程顕著ではないが、水底勾配の違
いによる効果も同じ傾向を持っていることが分る。従っ
て上に述べた範囲がこの理論の適用範囲と考えられる。

図-5は滝川等⁴⁾による実験と有限要素法による砕波
点近傍での水粒子の流速分布を本解析と比較したもので
ある。これによると、実験結果に比べ波頂前面のきり立
ちが本解析では少ないことと、有限要素法に比べ波前部

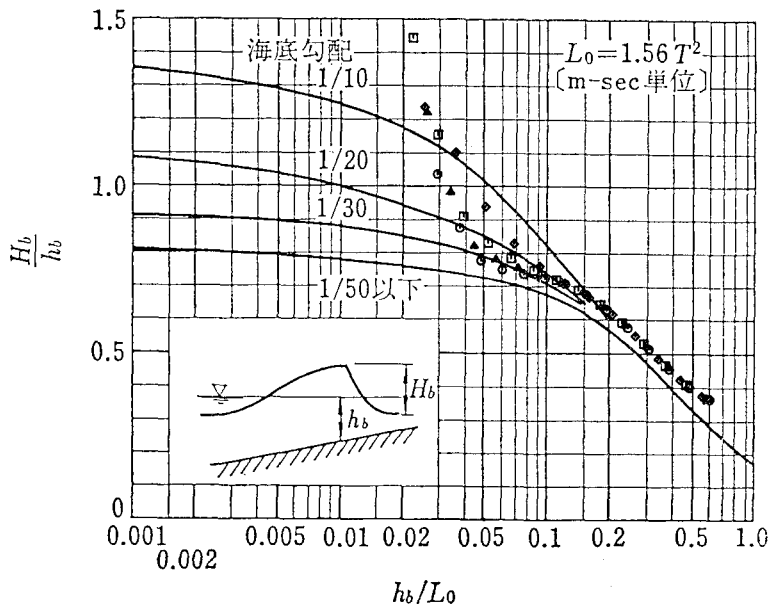
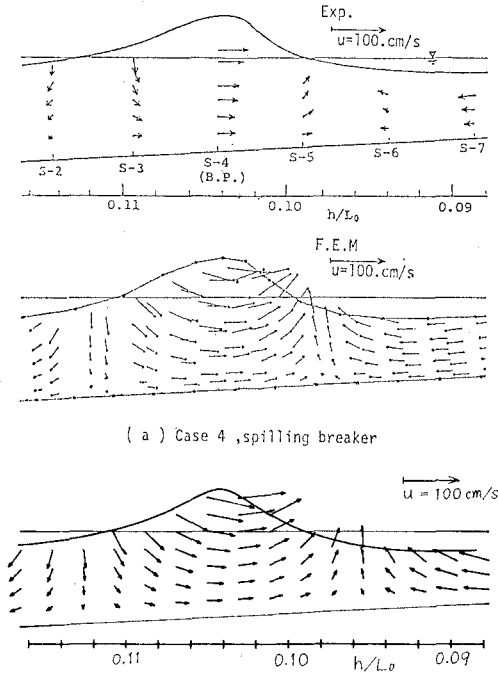


図-4 砕波波高 実線は合田の砕波指標³⁾

以下計算値で ◇ $1/10$, □ $1/20$, △ $1/30$, ○ $1/50$



(a) Case 4 ,spilling breaker

図-5 碎波近傍の流速分布

上段: 滝川等による実験結果⁴⁾ $h_b/L_0=9.193$
 中段: 滝川等による有限要素法による結果⁴⁾
 下段: 本解析による結果 $h_b/L_0=0.104$

での水平流速の正負の反転位置が異なっているものの、全体としては妥当な結果を与えていると考えられる。

4. あとがき

媒介変数で表わされる水面波形を用いた浅水変形と碎波の発生についての解析を述べたが、本解析も静水面の回りでの Taylor 展開を用いるという意味では一種のストークス波的展開といえる。従ってその適用範囲は比較的水深の深い所にある。実際図-4と同様、沖波波高との関係を調べると図-4の適用範囲にある波は Spilling breaker 形の範囲にあるようである。又、図-3や図-5から分る様に波前面の垂直なきり立ちや波頂部の over hang は表現されていないものの、碎波点近傍での波の前傾化は良く表わされている。Spilling breaker 形の場合、波頂部のきり立ちや、over hang はごく波頂部だけに起こると考えれば、前述の適用範囲内での碎波発生点における流体内部の流体運動は良く記述されていることが期待される。

又、同様の解析方法を用いてクノイド波的展開も考えられるが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 浜中建一郎・加藤一之: 有限振幅波の浅水変形に対する摂動解, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 65~69, 1982
- 2) 浜中建一郎・日比康生・佐伯 浩: 高次の自由波を考慮した波の浅水変形について, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 119~122, 1986
- 3) 合田良実: 港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会, pp. 54, 1977
- 4) 滝川 清・岩垣雄一・中川政博: 有限要素法による斜面上の波の碎波変形と内部機構の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 20~24, 1983