

容積変化を伴う気泡噴流

北野 義則*・栗谷 陽一**

1. ま え が き

水中の散気装置より気泡を発生させると、水圧減少のため、気泡は上昇に従ってその容積を増大しながら気泡群は周囲水に浮力を及ぼし気泡噴流を形成する。気泡噴流の応用例として、化学工学の分野は云うに及ばず、土木の分野では、波浪の阻止を目的にしている空気防波堤や水槽内で散気し活性汚泥混合液に流動を与え、混合液中の好気性微生物群への酸素供給を目的にしている曝気槽がある。空気防波堤¹⁾を恒常的施設として設置しているところはないが、実用化する場合には、その水深は数十mにも及ぶことが考えられる。散気式エアレーションタンクの有効水深 4.5m 位が従来普通であるが、深層エアレーションタンクは水深 10 m 位まで深くして散気する方式である。敷地のより効率的利用を目的として採用されているものであるから、今後さらに深くなると考えられる。

水圧が浅い場合、すなわち水圧の影響が小さな時、気泡の容積は不変として取り扱って十分で、気泡噴流の性質については、かなりよく知られている²⁾。線源においては、気泡噴流の中心流速は上昇高によらず一定値をもつが、気泡の相対上昇速度のため、 $(gq)^{1/3}$ の比例則は完全にはなりたない。また流速幅及び気泡密度分布幅の拡がり角度も上昇高によらず一定値をもつ。中心気泡密度は上昇高に逆比例する。点源では、例えば、中心流速は始め上昇高の $-1/3$ 乗で減速するが、その後、流速の低下は気泡の相対上昇速度の影響が卓越するため上昇高の $-1/2$ 乗へと移行することとなる^{3), 4)}。

水深が深くなると上記のような気泡噴流の性質との対応は成り立たなくなる。一定温度では、圧力と体積とは互いに逆比例するという関係を運動方程式中に考慮しなければならない。即ち浮力流束が絶対圧に反比例することになる。

Ditmars と Cederwall⁴⁾ は体積変化を運動方程式に考慮しているが、気泡の保存式、エントレイン式の 3 式

を基本にしているため、流速幅および気泡密度幅の比を一定として取り扱っている。また Brevik⁵⁾ もエントレイン式の代わりに平均流エネルギー方程式を導入している。両者の幅の比についてはこれまた同様である。McDougall はダブルブリュームモデル⁶⁾を提案し、気泡が含まれている部分を内部ブリュームとし外側の水流のみからなる部分を外部ブリュームとしてエントレインの式でそれぞれの部分に対して方程式を成立させ計算を行っている。この方法も考えられる手法であるが、そのため実験より求めなければならない連行係数が 3 つあるため容易な方法ではないと考えられる。

本報告は気泡噴流内の乱れに混合距離の理論を適用しまた気泡の容積変化を考慮し、流速分布、気泡密度分布には相似形を仮定して、基礎方程式の解をモーメント法により求め、気泡噴流の性質について検討を行ったものである。

2. 容積変化を考慮した気泡噴流の基礎式

図-1 のように気泡噴流の中心軸に沿って鉛直上方へ x 軸、水平方向に y 軸をとる。 x, y 軸方向の流速成分をそれぞれ u, v とし気泡の相対上昇速度を w とする。散気装置から自由表面までの水深を h_1 、大気圧を同じ水柱で計って h_2 とする。任意の水深における空気密度を ρ_x 、および単位体積当たりの気泡の占める体積の割合を σ_x (以後、気泡密度という) とすると、噴流中の単位体積の中の空気質量 m は次式となる。

$$m = \rho_x \sigma_x \quad \dots \dots \dots (1)$$

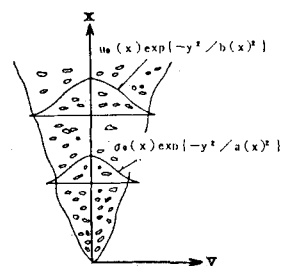


図-1 気泡噴流の模式図

* 正会員 工修 関東学院大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 九州大学教授 工学部水土木工学科

従って基本式は連続の式，運動量および気泡の保存式が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^{-n} \frac{\partial (y^n v)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + y^{-n} \frac{\partial (y^n uv)}{\partial y} = \sigma_x g + y^{-n} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Ky^n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{m(u+w)\} + y^{-n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n mv) \\ = y^{-n} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Ky^n \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

上式で $n=0$ は2次元， $n=1$ は3次元気泡噴流に対応する。気泡が上昇するとともに圧力が減少する。圧力と容積は互いに逆比例することから次式を得る。

$$\rho_x = \frac{h_1 + h_2 - x}{h_1 + h_2} \rho_h = \frac{h - x}{h} \rho_h \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$h = h_1 + h_2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで ρ_h は h の圧力における空気の密度である。(5)，

(6) 式を用い式に (3)，(4) 代入し

$$\sigma_h = (h-x) \sigma_x / h \quad \dots\dots\dots (7)$$

とおけば次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial x} + y^{-n} \frac{\partial (y^n uv)}{\partial y} = \frac{h}{h-x} \sigma_h g \\ + y^{-n} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Ky^n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{ \sigma_h (u+w) \} + y^{-n} \frac{\partial}{\partial y} \{ y^n \sigma_h v \} \\ = y^{-n} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Ky^n \left(\frac{\partial \sigma_h}{\partial y} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

著者らは，気泡は螺旋運動，ジグザグ運動を行い気泡群が相互に干渉し気泡を拡散する主要因となることを報告⁷⁾したが，その現象は気泡密度の大きいところでその効果が現れる。従ってその影響は散気装置近傍のみであるから，大水深での気泡噴流を考える場合，速度変動による乱流拡散だけで十分である。乱流拡散係数 K についてはプラントルの運動量輸送理論に従って

$$K = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad l = \epsilon b \quad \dots\dots\dots (10)$$

とし， ϵ は運動量と気泡に対して同じ値をとるものとした。気泡噴流内の流速分布と気泡密度分布に相似形を仮定するが，分布形としていずれもガウス分布とする。

$$\begin{aligned} u = u_0(x) \exp \{-y^2/b(x)^2\} \\ \sigma_h = \sigma_0(x) \exp \{-y^2/a(x)^2\} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

(2)，(10)，(11) 式を (8)，(9) 式に代入し， $0 \leq y \leq \infty$ の区間における各式の右辺および左辺の0次あるいは1次モーメントを等しくおけば，以下に述べる式を得る。

(1) 線源気泡噴流

2次元の場合，(12)，(13) 式が運動量式の0次および1次モーメントであり，(14)，(15) 式は気泡の拡散式のモーメントである。

$$\sqrt{2} UB \frac{dU}{dX} + \frac{1}{\sqrt{2}} U^2 \frac{dB}{dX} = \frac{AS}{1-X} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} (\pi+4) UB^2 \frac{dU}{dX} + (\pi+2) BU^2 \frac{dB}{dX} \\ = 2\sqrt{2\pi} BU^2 + \frac{4A^2S}{1-X} \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{BAS}{(B^2+A^2)^{1/2}} \frac{dU}{dX} + \frac{A^3US}{(B^2+A^2)^{3/2}} \frac{dB}{dX} \\ + \left\{ 1 + \frac{B^3U}{(B^2+A^2)^{3/2}} \right\} S \frac{dA}{dX} \\ + \left\{ 1 + \frac{BU}{(B^2+A^2)^{1/2}} \right\} A \frac{dS}{dX} = 0 \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\tan^{-1} \frac{A}{B} + \frac{BA}{B^2+A^2} \right) SB \frac{dU}{dX} + 2 \left\{ 1 + \frac{B^3U}{(B^2+A^2)^2} \right\} \\ \cdot S \frac{dA}{dX} + \left\{ \tan^{-1} \frac{A}{B} + \frac{BA(A^2-B^2)}{(B^2+A^2)^2} \right\} SU \frac{dB}{dX} \\ + \left\{ 1 + \frac{B^2U}{B^2+A^2} \right\} A \frac{dS}{dX} = 2\sqrt{\pi} \frac{B^3US}{(B^2+A^2)^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

(14) 式をさらに積分すれば送気量を求める式を得る。

$$Q_h = \sqrt{\pi} AS \left\{ 1 + \frac{BU}{(B^2+A^2)^{1/2}} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし

$$\begin{aligned} U = u_0/w, \quad B = b/\epsilon^2 h, \quad A = a/\epsilon^2 h \\ S = \sigma_0 gh/\omega^2, \quad X = x/h, \quad Q_h = gq_h/\epsilon^2 \omega^3 \\ q_h = \int_{-\infty}^{\infty} (u+w) \sigma_h dy \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

である。 q_h は圧力 h のもとで計った送気量。

$X=0$ 近傍において， $X \ll 1$ であるから，運動方程式(12)，(13)の浮力項は簡単となつて，各々 AS ， $4A^2S$ として表せる。この時気泡噴流の基礎式は容積不変の時と同一となる。従って容積不変の解

$$\begin{aligned} U = U_0 \text{ (一定)}, \quad B = B_0 X \\ A = A_0 X, \quad S = S_0/X \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

を (12)~(16) 式に代入し，

$$\gamma_0 = A_0/B_0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

とおけば，次のように整理できる²⁾。

$$\begin{aligned} U_0 = \frac{2\gamma_0(1+\gamma_0^2)^{3/2}}{\sqrt{2}(\pi+2) - 4\gamma_0 - 2(1+\gamma_0^2)^{3/2} \tan^{-1} \gamma_0} \\ B_0 = 2\sqrt{2\pi}/\{(\pi+2) - 2\sqrt{2}\gamma_0\} \\ S_0 = U_0^2/\sqrt{2}\gamma_0 \\ Q_0 = \sqrt{\pi} A_0 S_0 \{1 + U_0(1+\gamma_0^2)^{-1/2}\} \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

これらより，任意に γ_0 を与えれば， U_0 ， B_0 ， S_0 ， Q_0 の値は求まる。これを用いて，最初の計算ステップ $X=\Delta X$ での U ， B ， S ， Q の値とし以降は Runge-Kutta 法により計算を行う。

送気量が増大すると，気泡の相対上昇速度は無視でき

る。この場合について検討を行う。気泡噴流の基礎式において相対上昇速度 $w=0$ とおく。また無次元量式 (17) における w をある代表速度 $u_*=w$ として読み代える。

ただし、 $q_h = \int_{-\infty}^{\infty} u \sigma_h dy$ である。

この時も (18) 式が成立し、次式を得る。

$$\sqrt{2}(\pi+2)-4\gamma_0-2(1+\gamma_0^2)^{3/2}\tan^{-1}\gamma_0=0 \quad (21)$$

(21) 式は (20) 式中の U_0 の分母を 0 としたものと一致する。(21) 式を満足する値は

$$\gamma_0=0.9085 \quad (22)$$

となり

$$B_0=1.949, \quad A_0=1.771 \quad (23)$$

を得る。次に

$$u_*=0.8208(gq_h/\varepsilon^2)^{1/3} \quad (24)$$

に選べば

$$U_0=1, \quad S_0=0.7783 \quad (25)$$

となる。以上が相対上昇速度が無視できて容積変化の場合における $X=\Delta X$ の値として計算する。

(2) 点源気泡噴流

3次元気泡噴流の場合、(26), (27) 式が運動量式の 0 次および 1 次モーメントであり、(28), (29) 式は気泡の拡散式のそれぞれのモーメントに対応する。

$$UB^2 \frac{dU}{dX} + U^2 B \frac{dB}{dX} = \frac{A^2 S}{1-X} \quad (26)$$

$$UB^3 \frac{dU}{dX} + \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} B^3 U^2 \frac{dB}{dX} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} U^2 B^2 + \frac{A^3 S}{1-X} \quad (27)$$

$$\frac{B^2 A S}{B^2 + A^2} \frac{dU}{dX} + 2 \left\{ 1 + \frac{B^4 U}{(B^2 + A^2)^2} \right\} S \frac{dA}{dX} + \frac{2A^3 B U S}{(B^2 + A^2)^2} \frac{dB}{dX} + \left\{ 1 + \frac{B^2 U}{B^2 + A^2} \right\} A \frac{dS}{dX} = 0 \quad (28)$$

$$\left\{ 1 - \frac{B^3}{(B^2 + A^2)^{3/2}} \right\} B^2 S \frac{dU}{dX} + \left\{ 2 - \frac{2B^3}{(B^2 + A^2)^{3/2}} - \frac{3A^2 B^3}{(B^2 + A^2)^{5/2}} \right\} B S U \frac{dB}{dX} + 3 \left\{ 1 + \frac{B^2 U}{(B^2 + A^2)^{5/2}} \right\} A S \frac{dS}{dX} + \left\{ 1 + \frac{B^3 U}{(B^2 + A^2)^{3/2}} \right\} A^2 \frac{dS}{dX} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{A B^4 U S}{(B^2 + A^2)^2} \quad (29)$$

$$Q_h = \pi A^2 S \left\{ 1 + \frac{B^2}{B^2 + A^2} \right\} \quad (30)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} U &= u_0/w, \quad B = b/\varepsilon^2 h, \quad A = a/\varepsilon^2 h \\ S &= \sigma_0 g h / w^2, \quad X = x/h, \quad Q_h = g q_h / \varepsilon^4 w^3 h \\ q_h &= \int_0^\infty 2\pi(u+w)\sigma_h y dy \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

線源気泡噴流と同様に $X=0$ 近傍の解を求める。 $X \ll 1$ であるから、(26), (27) 式における浮力項は各々 $A^2 S$ および $A^3 S$ となる。故にこの時方程式はやはり容積不変のものと一致する。また、点源においては、流速 U が相対上昇速度より大きな値をもつため (28), (29), (30) 式に含まれる相対上昇速度は無視できる。この時、方程式はブリュームの基礎式に一致する。従ってブリュームの解は

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0/X^{1/3}, \quad A = A_0 X, \quad B = B_0 X \\ S &= S_0/X^{5/3}, \quad \gamma_0 = A_0/B_0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

で表される。(32) を用いると運動量 0 次より

$$2U_0^2 = 3\gamma_0^2 S_0 \quad (33)$$

運動量 1 次より (32), (33) 式を用いれば

$$B_0 = 6\sqrt{2}/\sqrt{\pi}(5\sqrt{3}-3-2\sqrt{2}\gamma_0) \quad (34)$$

気泡拡散式の 0 次モーメントについては、恒等的に満足されている。気泡拡散式の 1 次モーメントより相対上昇速度の項に注意して (32), (33), (34) 式を用いれば

$$5\{1-(1+\gamma_0^2)^{-1/2}\}-2\gamma_0(10-3\sqrt{2}-4\gamma_0) \times (1+\gamma_0^2)^{-2} = 0 \quad (35)$$

(35) 式を満足する γ_0 は次の値となる。

$$\gamma_0 = 0.8808 \quad (36)$$

B_0, A_0, U_0, S_0 についても整理できる。

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 3.030, \quad A_0 = 2.669 \\ U_0 &= 0.4520 Q_h^{1/3}, \quad S_0 = 0.1755 Q_h^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

以降は Runge-Kutta 法によって数値を求めることができる。また線源の時と同様送気量が増大すると、気泡の相対上昇速度は無視できて $w=0$ とおける。この時基礎方程式の (28)~(30) 式の気泡相対上昇速度項を 0 と置き換えたものとなる。(31) 式の $u_*=w$ とし

$$u_*=0.4520(gq_h/\varepsilon^4 h)^{1/3} \quad (38)$$

とおけば

$$U_0=1, \quad Q_h=10.83, \quad S_0=0.8593 \quad (39)$$

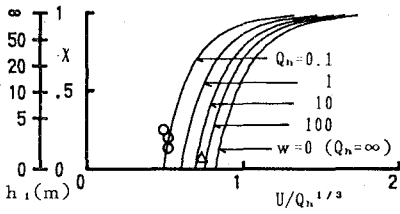
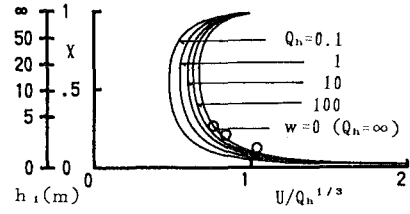
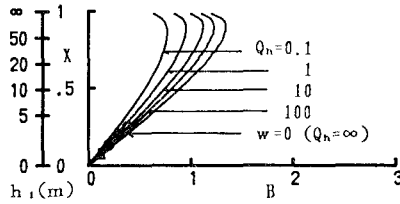
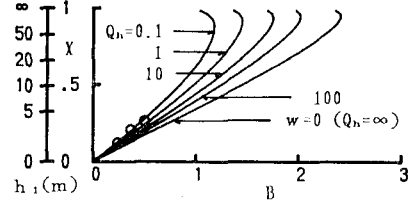
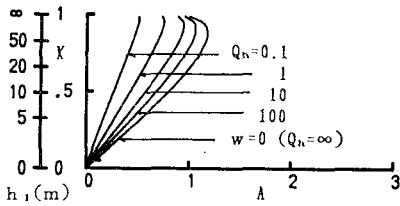
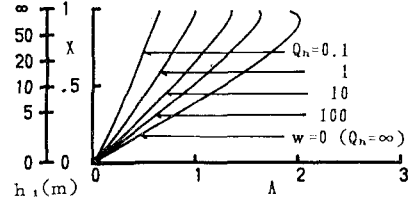
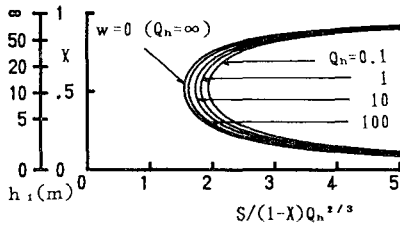
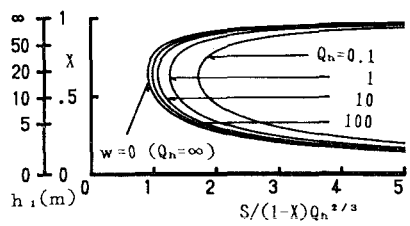
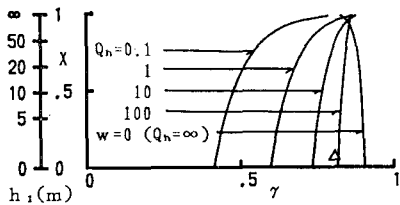
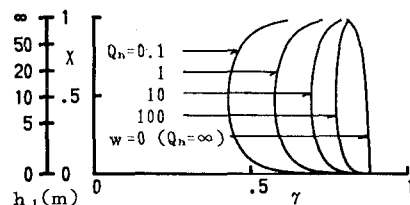
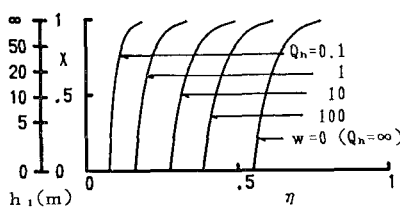
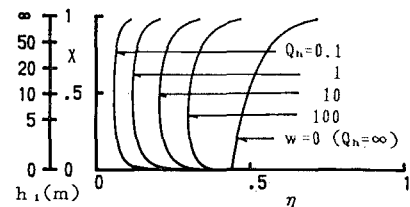
となる。ただし、 $q_h = \int_0^\infty 2\pi u \sigma_h y dy$

これらの関係は相対上昇速度が無視できてかつ容積変化の場合の $X=\Delta X$ の値とすることができる。

3. エネルギー効率

気泡を発生させ気泡噴流を形成させるためにはかなりの動力を必要とし、特に処理場で使用する電力量の 40% をエアレーション関連が占めると言われている。その意味でも効率のよいエアレーションシステムについて、考えねばならない。ここでは、気泡のもつエネルギーが、どの程度の割合で、水流のエネルギーに変換されるか検討する。

気泡が放出されて、任意の高さの断面に上昇するまでに放出するエネルギーは次式で表される。

図-2 U と X の関係 (2 次元)図-8 U と X の関係 (3 次元)図-3 B と X の関係 (2 次元)図-9 B と X の関係 (3 次元)図-4 A と X の関係 (2 次元)図-10 A と X の関係 (3 次元)図-5 S と X の関係 (2 次元)図-11 S と X の関係 (3 次元)図-6 γ と X の関係 (2 次元)図-12 γ と X の関係 (3 次元)図-7 η と X の関係 (2 次元)図-13 η と X の関係 (3 次元)

$$E_t = \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} \rho g(u+w) \sigma_h h / (h-x) dx dy \\ = \rho \varepsilon^2 w^3 h Q_h \ln(1/(1-X)) \quad \dots\dots\dots (40)$$

他方、気泡噴流がこの断面を通じての水流のもつエネルギーは

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^3 / 2 dy = \rho \varepsilon^2 w^3 h \sqrt{3\pi} U^3 B / 6 \quad \dots (41)$$

となる。 E_t と E_u の差分は気泡の相対上昇速度によって消費されるエネルギーと turbulent dissipation である。 E_t と E_u よりエネルギー効率は次のごとくなる。

$$\eta = E_u / E_t = \sqrt{3\pi} U^3 B / 6 Q_h \ln(1/(1-X)) \quad \dots (42)$$

点源については以下に示す式となる。

$$\left. \begin{aligned} E_t &= \rho \varepsilon^4 w^3 h^2 Q_h \ln(1/(1-X)) \\ E_u &= \rho \varepsilon^4 w^3 h^2 \pi U^3 B^2 / 6 \\ \eta &= E_u / E_t = \pi U^3 B^2 / 6 Q_h \ln(1/(1-X)) \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

4. 計算結果と考察

2次元の場合の計算結果を図-2～図-7に、3次元の場合を図-8～図-13に示す。図-2は次元中心流速の計算結果である。流速は気泡の容積増大に伴って加速され、 $X=1$ に近づくに従って流速の加速は急激に大きくなる。図-8は3次元中心流速の計算結果で、流速は上昇とともに減速するが、送気量の増大により中途より加速に転じる。2次元と同様 $X=1$ 近傍での流速の加速は大きい。図-3は2次元流速分布幅 B を示す。 B は上昇に伴って大きくなるが、増加率は上昇とともに減少し、 $X=1$ 近傍で B の値自身も減少することになる。図-9に3次元の幅 B を示す。2次元の場合とほぼ同様である。図-4は2次元気泡密度幅 A を示す。 Q_h が小さく相対上昇速度の影響の大ききときは A/X は上昇に伴って増加する。このことは2次元では、一般に送気量が大きくなるに従って A が B に近づく性質があるためだと考えられる。 Q_h が大きい時は B と同様な傾向となる。図-10に3次元気泡密度分布幅 A を示す。全体的に同じ傾向で Q_h が小さな時でも次元の場合のように A/X が大きくなることは認められなかった。図-5は2次元中心気泡密度を示す。 $S/(1-X)Q_h^{2/3}$ は X の増加につれて減少を示すが、 $X=1$ に近づくに従って、その値を増加する。図-11は3次元中心気泡密度を示す。 $S/(1-X)Q_h^{2/3}$ で整理すれば、やはり同様な傾向を示す。次に図-6は2次元での A/B の比 γ を示すものであって上昇に伴ってその比は増大するが、 $w=0(Q=\infty)$ については、その比は減少する。しかし、相対上昇速度の影響が小さな場合を除けば γ の値の変化の幅は比較的小さいともいえる。図-12に3次元での γ を示す。2次元と3次元において γ の変化に差が認められる。3次元では上昇とともに減少し送気量の増大に伴って中途より増加する。しかし $w=0$ は同じ傾向といえる。図-7は2次元のエネ

ルギー効率を示すものである。送気量増大に伴って運動エネルギーは増加する。 B の増加率が上昇とともに減少することから、気泡群が上昇するに従って膨張しつつ放出するエネルギーは幅をより以上に拡げてゆくためでなく、流速を増すことに費やされると考えられる。図-13に3次元のエネルギー効率を示す。送気量増大にもかかわらず、効率は減少するが、中途より増大する。3次元容積不変の時、気泡の相対上昇によるエネルギー消費が増大することからこのような傾向をもつと考えられる。

ある断面の気泡噴流を、その断面における送気量が体積不変と仮定して、最初から散気された場合で求められるならば、極めて容易に推定しうることになる。 U , B , A , S などの値をこのような仮定で推定した近似値と比較すると $X < 0.4$ では、かなり一致するが、これをこえると、 $X=1$ に近づくにつれて急激に一致しなくなる。

図-2, 3, 4, 6, 8, 9の実験値は著者らの水深 90 cm での結果 (Δ) と Koubus⁸⁾ の2次元では 4.5 m, 3次元では 4.3 m の結果 ($\circ$) である。

5. ま と め

容積変化を考慮して2, 3次元気泡噴流について、理論的にその挙動を明らかにした。容積変化による気泡噴流の顕著な特性は次のようである。

2次元気泡噴流において、流速は加速され運動量幅は上昇に伴って増大するが $X=1$ 近傍では減少する。従って気泡群が上昇するにつれて、膨張しつつ放出するエネルギーは、幅をより以上に拡げてゆくためでなく、流速を増すことに費やされる。

3次元気泡噴流では、流速は減速後、中途より加速する。運動量幅は上昇に伴って増大するが、増加率は減少する。従って、3次元容積不変の時、流速が一方向的に減速することから考えれば、送気量増大は運動エネルギーの増大に寄与し、2次元と同様、流速を増すことに費やされる。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一・浅野敏之：空気防波堤の相似則と必要空気量，土木学会論文報告集，377号，pp. 101～110，1983。
- 2) 北野義則・田中綏彦・栗谷陽一：静水中における気泡噴流，土木学会論文報告集，253号，pp. 37～47，1976。
- 3) 栗谷陽一・藤崎一裕：沈降性粒子を含む鉛直噴流の特性，土木学会論文報告集，336号，pp. 199～202，1983。
- 4) Cederwall, K. and Ditmars, J.D.: Analysis of Air Bubble Plumes, Proc. 14th. Coastal Eng. pp. 2209～2226, 1974.
- 5) Brevik, I.: Two-Dimensional Air-Bubble Plume, J.W.W. ASCE, Vol. 103, pp. 101～115, 1977.
- 6) McDougall, T.: Bubble Plumes in Stratified Environments, J. Fluid Mech., Vol. 85, pp. 655～672, 1978.
- 7) 北野義則・栗谷陽一：線源気泡噴流の性質，31回水理講演会論文集，pp. 623～628，1987。
- 8) Koubus, H.E.: Analysis of Flow Induced by Air-Bubble Systems, Proc. 11th. Coastal Eng. pp. 1016～1031, 1968.