

大口径円柱の波浪による振動

今井貫爾*・松本 喬**・沖見芳秀**・岩瀬浩二***

1. 緒 言

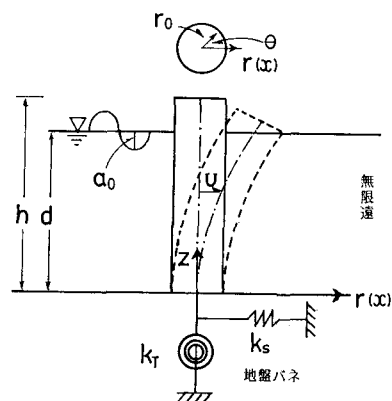
海洋開発が進み、石油掘削プラットフォームや水中展望台等の着底式構造物が大水深の海域まで建造されるようになると、構造物の動的応答を正確に把握することが安全性・快適性の検討上重要になる。構造物の動的応答をもたらす主な外力は地震と波浪であるが、著者らは前報¹⁾において、海底地盤の特性を考慮した地震時の弾性円柱の振動解析法を示した。一方、現在までに行われている波浪による着底式構造物の振動予測法は、小口径部材で構成された柔な構造物を対象とし、波力の算定には Morison 式を用いるものがほとんどである²⁾。また、大口径構造物は従来から剛体と考えられ、例えば円柱に働く波力は MacCamy and Fuchs³⁾ によって理論解が与えられている。ところがこれらの構造物も大水深海域に建造されるようになると構造物の固有周期と波浪の卓越周期が接近するため波浪による振動が無視できなくなる。また比較的軟らかな地盤上に設置されるとさらに振動が大きくなる可能性がある。波浪による大口径構造物の振動解析法としては、濱本・田中⁴⁾ によるものがあるが、地盤と構造物の相互作用を考慮したものは少ない。

そこで本報では、弾性円柱を対象とし、地盤の特性を考慮した上で、波の回折と散乱を取り入れた振動解析法を示すとともに、検証実験と数値実験の結果について述べる。

2. 解 析 法

(1) 解析法の概要

地盤バネ（回転バネ、水平バネ）に支持された円形断面を有する片持梁が、外力として回折波理論により評価される波力を受けるとし、基礎方程式並びに境界条件を記述する。さらに、調和振動を仮定することにより周波数領域における基礎方程式・境界条件を得る。これらに Galerkin 法を適用して離散化し FEM 振動方程式を得



図—1 解析モデル

る。これに複素剛性を用いることにより、最終的な M-C-K 振動方程式を得る。

(2) 解析仮定・解析モデル・主な記号

本研究では以下の a)～d) の仮定を導入する。

- 円柱は Bernoulli-Euler 梁とし、曲げ変形のみを考える。
- 水は圧縮性を有する完全流体で、回折波理論が適用できる。
- 円柱の運動に伴い、円柱表面での水の剝離や渦が生じない。
- 調和振動が仮定できる。

解析モデル・座標系を図—1 に示す。また、主な記号は以下の通りである。

r_0 : 円柱半径, h : 円柱の高さ, d : 水深, U : 円柱の x 軸 (r 軸) 方向変位, Φ : 散乱波速度ポテンシャル, P : 動水圧, a_0 : 入射波振幅, E : ヤング率, I : 断面 2 次モーメント, ρ_f : 流体密度, ρ_c : 円柱密度, m_c : 単位長さ当りの円柱断面質量, C : 水中音速, k_r : 地盤回転バネ定数, k_s : 地盤水平バネ定数

(3) 支配方程式及び境界条件

仮定 d) を適用し、以下のように角周波数 ω を用いて表わす。

$$U(z; t) = u(z) e^{i\omega t} \dots \dots \dots (1)$$

* Ph.D. 鹿島建設(株) 技術研究所
 ** 正会員 工修 鹿島建設(株) 情報システム部
 *** 正会員 鹿島建設(株) 技術研究所

$$\begin{aligned}\Phi(x, z; t) &= \phi(x, z) e^{i\omega t} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{(m)}(r, z) \cos m\theta \cdot e^{i\omega t} \quad \dots (2)\end{aligned}$$

$$P(x, z; t) = p(x, z) e^{i\omega t} \quad \dots (3)$$

ここで、 i は虚数単位であり、また散乱波ポテンシャルはフーリエ表示とした。

仮定 a)~d) と (1)~(3) 式を考慮し、速度ポテンシャルと圧力の関係式並びに入射波速度ポテンシャル Φ_I

$$p = -i\omega\rho_f\phi \quad \dots (4)$$

$$\begin{aligned}\Phi_I(r, z, \theta; t) &= \phi_I e^{i\omega t} \\ &= \frac{a_0 g}{\omega} \frac{\cosh \lambda_0 z}{\cosh \lambda_0 d} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(-k_0 r) \\ &\quad \cdot \cos m\theta \cdot e^{i\omega t} \quad \dots (5)\end{aligned}$$

ここで、

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 2 & m \geq 1 \end{cases} \quad \dots (6)$$

$J_m(x)$; m 次第 1 種ベッセル関数

$$\lambda_0: \lambda_0 \tanh \lambda_0 d = \omega^2/g \quad \dots (7)$$

$$k_0: k_0^2 = \omega^2/c^2 + \lambda_0^2 \quad \dots (8)$$

を用いると以下のように与えられる。

<円柱>

$$\begin{aligned}EI \frac{d^4 u}{dz^4} - m_e \omega^2 u \\ \begin{cases} -i\omega\rho_f \int_0^{2\pi} (\phi + \phi_I) \cos \theta r_0 d\theta = 0; & 0 \leq z \leq d \\ = 0 & ; d < z \leq h \end{cases} \\ \dots (9)\end{aligned}$$

$$k_T \frac{du}{dz} = EI \frac{d^2 u}{dz^2}; \quad z=0 \quad \dots (10)$$

$$k_s u = -EI \frac{d^3 u}{dz^3}; \quad z=0 \quad \dots (11)$$

$$EI \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad ; \quad z=h \quad \dots (12)$$

$$EI \frac{d^3 u}{dz^3} = 0 \quad ; \quad z=h \quad \dots (13)$$

ここで、(9) 式は梁の運動方程式、(10)、(11) 式は円柱底部での地盤バネ支持境界条件、そして (12)、(13) 式は円柱頂部での自由端境界条件である。

<水>

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \phi^{(m)} - \frac{\partial^2 \phi^{(m)}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \phi^{(m)} \\ = 0; \quad 0 \leq z \leq d, \quad r \geq r_0 \quad \dots (14)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi^{(m)} = 0; \quad r \geq r_0, \quad z=d \quad \dots (15)$$

$$\frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial z} = 0 \quad ; \quad r \geq r_0, \quad z=0 \quad \dots (16)$$

$$\frac{\partial(\phi + \phi_I)}{\partial r} = i\omega u \cos \theta; \quad r=r_0, \quad 0 \leq z \leq d \quad \dots (17)$$

Sommerfeld の Radiation Condition,

$$r=\infty \quad \dots (18)$$

ここで (14) 式はヘルムホルツの方程式、(15) 式は自由表面境界条件、(16) 式は海底面での不透過境界条件、(17) 式は円柱と水との接触面で円柱変位速度と水粒子速度が等しいという接触面条件である。

(4) 散乱波速度ポテンシャルの一般解

式(14)~(18)より、円柱変位 u を未知数として含んだ散乱波速度ポテンシャル ϕ の一般解は以下の通り求められる。

$$\begin{aligned}\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_0 g}{\omega} \epsilon_m i^m J'_m(-k_0 r_0) \frac{H_m^{(2)}(k_0 r)}{H_m^{(2)}(k_0 r_0)} \frac{\cosh \lambda_0 z}{\cosh \lambda_0 d} \\ \cdot \cos m\theta + 4i\omega \left\{ \frac{\lambda_0 \cosh \lambda_0 z}{k_0 (2\lambda_0 d + \sinh 2\lambda_0 d)} \right. \\ \cdot \frac{H_1^{(2)}(k_0 r)}{H_1^{(2)}(k_0 r_0)} \int_0^d u \cosh \lambda_0 z \, dz \\ + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\lambda_n \cos \lambda_n z}{k_n (2\lambda_n d + \sin 2\lambda_n d)} \frac{H_1^{(2)}(k_n \lambda)}{H_1^{(2)}(k_n r_0)} \right. \\ \cdot \int_0^d u \cos \lambda_n z \, dz \Big) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n \cos \lambda_n z}{k_n (2\lambda_n d + \sin 2\lambda_n d)} \right. \\ \cdot \left. \frac{K_1(k_n r)}{K_1'(k_n r_0)} \int_0^d u \cos \lambda_n z \, dz \right) \Big\} \cos \theta; \\ 0 \leq z \leq d, \quad r \geq r_0 \quad \dots (19)\end{aligned}$$

ここで、

$$\lambda_n; \quad \lambda_n \tan \lambda_n d = -\omega^2/g \quad \dots (20)$$

$$k_n; \quad k_n^2 = |\omega^2/c^2 - \lambda_n^2| \quad \dots (21)$$

N ; $\omega^2/c^2 - \lambda_n^2 > 0$ を満足する最大の n

$H_1^{(2)}$; 一次の第二種ハンケル関数

K_1 ; 一次の第二種変形ベッセル関数

' ; それぞれの導関数

(5) FEM 振動方程式

円柱の運動方程式 (9) 式に、境界条件 (10)~(13) 式及び散乱波速度ポテンシャルの一般解 (19) 式を用いて、Galerkin 法により定式化、さらに m 個に離散化すると、FEM 振動方程式が以下の様に得られる。

$$\{[K] - \omega^2([M] + [M_a])\} \{q\} = -A_R [B_0]^T \quad \dots (22)$$

ここで、

$\{q\}$; 円柱の変位ベクトル

$[K]$; 剛性マトリクス

$$[K] = \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} EI [N']^T [N''] d\bar{z} + [K_B] \quad \dots (23)$$

$[K_B]$; バネの剛性マトリクス

L_i ; i 要素長

$[N]$; 形状関数

$[N'']$; 形状関数の二階微分

$[M]$; 質量マトリクス

$$[M] = \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} m_0 [N]^T [N] d\bar{z} + [K_B] \quad \dots (24)$$

$[M_a]$; 付加質量マトリクス

$$[M_a] = -A_0 [B_0]^T [B_0] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n [B_n]^T [B_n] \quad \dots (25)$$

$$A_0 = \begin{cases} \frac{4\pi\rho_f r_0 \lambda_0}{k_0(2\lambda_0 d + \sinh 2\lambda_0 d)} \\ \cdot \frac{H_1^{(2)}(k_0 r_0)}{H_1^{(2)}(k_0 r_0)}; & 0 \leq z \leq d \\ 0 & d < z \leq h \end{cases} \quad (27)$$

$$A_n = \begin{cases} \frac{4\pi\rho_f r_0 \lambda_n}{k_n(2\lambda_n d + \sinh 2\lambda_n d)} \\ \cdot \begin{cases} \frac{H_1^{(2)}(k_n r_0)}{H_1^{(2)}(k_n r_0)}; & 1 \leq n \leq N \\ \frac{K_1(k_n r_0)}{K_1'(k_n r_0)}; & N+1 \leq n \leq \infty \end{cases} \\ 0 & d < z \leq h \end{cases} \quad (27)$$

$$[B_0] = \begin{cases} \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} [N] \cosh \lambda_0 \bar{z} d\bar{z}; & 0 \leq z \leq d \\ 0 & d < z \leq h \end{cases} \quad (28)$$

$$[B_n] = \begin{cases} \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} [N] \cos \lambda_n \bar{z} d\bar{z}; & 0 \leq z \leq d \\ 0 & d < z \leq h \end{cases} \quad (29)$$

$$[A_R] = \frac{2\pi\rho_f r_0 a_0 g}{\cosh \lambda_0 d} \cdot \left\{ J_1(-k_0 r_0) + J_1'(-k_0 r_0) \frac{H_1^{(2)}(k_0 r_0)}{H_1^{(2)}(k_0 r_0)} \right\} \quad (30)$$

$$\bar{z} = z + (\text{要素 } z \text{ 座標の原点の } z \text{ 座標}) \quad (31)$$

(22)式に複素剛性を用いることにより最終的な M-C-K 振動方程式が得られる。この方程式から求められる解 $\{q\}$ は以下で与えられる。

$$\{q\} = -\{[K^*] - \omega^2([M] + [M_a])\}^{-1} A_R [B_0]^T \quad (32)$$

ただし、 $[K^*]$ は減衰定数を h とすると

$$[K^*] = (1 - 2h^2 + 2h\sqrt{1 - h^2}i)[K] \quad (33)$$

で与えられる複素剛性である。

3. 大口径円柱の波浪振動実験

(1) 実験概要

実験には長さ 60 m, 幅 2 m, 高さ 2 m の造波水路を用い, 模型は造波機の前 40 m の地点に据え付けた。図-2 に示すように, 模型は直径 40 cm, 高さ 1.3 m のシリコン製円柱であり, 水路床に固定している。表-1 に模型の構造諸元を示す。表中の円柱のヤング率は空中の自由振動実験より求めた。実験は規則波を用いて行い, 周期を 10 段階, 波高を 4 段階にそれぞれ変化させた。また, D/L (円柱の径と波長の比) は 0.054~0.396 の範囲となった。模型頂部の変位を光学式変位計により測定し, 同時に頂部の加速度をひずみゲージ式加速度計により測定した。波圧は円柱正面に埋め込んだひずみゲージ式波圧計により 4 点計測した。

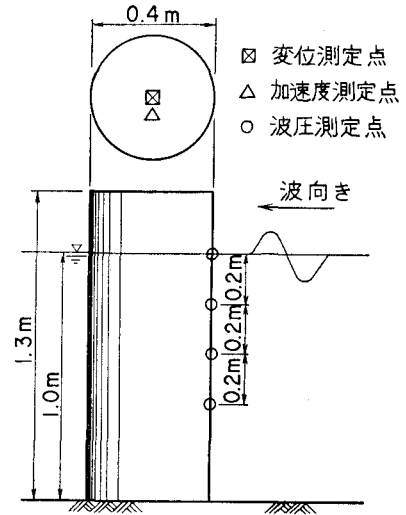


図-2 弾性円柱模型

表-1 模型の諸元

構 造 諸 元	数 値
重 量	189 kgf
比 重	1.19
ヤ ン グ 率	646 000 N/m ²
基本固有周期 (空中)	1.31 sec
減 衰 定 数 (空中)	0.035
基本固有周期 (水中)	1.43 sec
減 衰 定 数 (水中)	0.035

(2) 実験結果及び考察

図-3 に円柱頂部の変位と波周期との関係を示す。図-4 に円柱頂部の加速度と波周期との関係を示す。なお加速度の場合, 実験では天端が傾斜することにより重力加速度の影響を受けるため, 解析結果を補正することにより, 実験結果と解析結果とも傾斜することにより重力加速度を加えた値を示している。図-3 と図-4 より以下の事項が明らかになった。

- 円柱頂部の変位のピークは, 解析では 1.5 秒, 実験では 1.4 秒とわずかにずれているものの, 実験を行った波周期の全般に渡り, 実験値と解析値は比較的良好一致を示している。
- 一般に波の回折が卓越すると言われている場合 ($D/L > 0.2$, $T = 0.8, 1.0, 1.2$ 秒) では変位の実験値と解析値は良好一致を示している。
- 実験における円柱頂部の変位のピーク ($T = 1.4$ 秒の場合) では, 波高が大きくなる程無次元変位は小さくなっている。これは, 共振時に円柱が大きく振れるため, 微小変位の仮定が成り立たなくなるためであると考えられる。

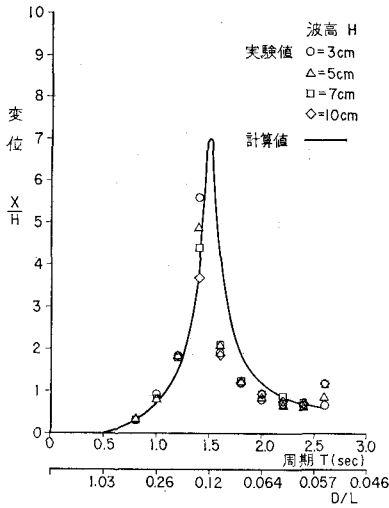


図-3 変位と周期の関係

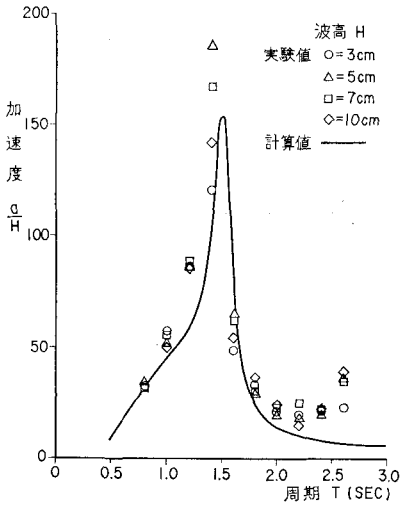


図-4 加速度と周期の関係

d) 円柱頂部の加速度も比較的解析値と合っている。

次に回折が卓越していると思われる場合の円柱正面の波圧の鉛直分布を図-5 に示す。なお図中の実線は今回の解析(円柱が振動している場合)の値であり、破線はMacCamy and Fuchs の理論(円柱が固定されている場合)による値である。これより以下の事項が明らかになった。

a) 円柱正面の波圧は波高によらず今回の解析結果(実線)と良い一致を示している。

b) 固定円柱に働く波圧(破線)は、振動している円柱に働く波圧(実線、実験値)より大きくなり、この場合に関しては過大に波圧を評価することになる。

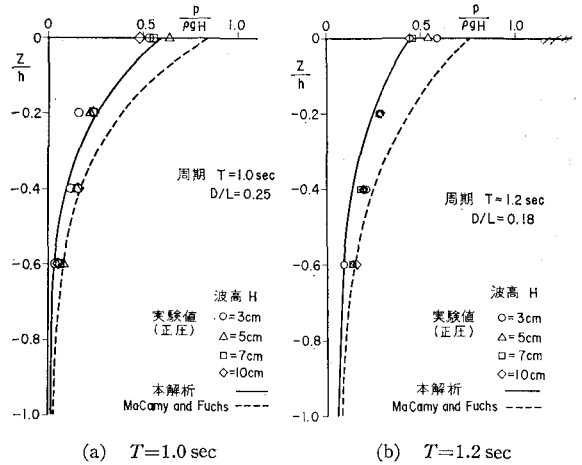


図-5 波圧の鉛直分布

4. 数値計算例

(1) 解析モデル・解析条件

大水深下の円柱構造物の波浪による振動に及ぼす地盤の影響を検討するため、図-6 に示すモデルについて、地盤の硬さの一つの指標であるせん断波速度 V_s をパラメータとして、周波数応答解析を行った。諸物性については図中に示した。

なお、地盤パネは、円形基礎の多治見式により評価し、対象周期が長周期であることを考慮し、以下のパネ定数を設定した。

$V_s(m/s)$	水平パネ(N/m)	回転パネ($N \cdot m/rad$)
200	1.85×10^{10}	5.46×10^{12}
400	3.70×10^{10}	1.09×10^{13}
800	7.41×10^{10}	2.19×10^{13}

(2) 周期特性

図-7 に円柱頂部の変位伝達関数を V_s パラメータとして示した。 V_s が小さい程固有周期は長い方へ移行することがわかる。図-8 に全波力の伝達関数を示す。図-9 (a)~(d) に円柱各点の波圧の伝達関数を示す。変

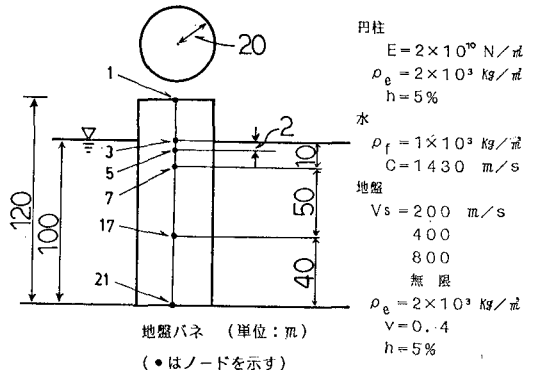


図-6 数値計算モデルと物性

位・波力・波圧とも V_s の値が小さくなるに従い固有周期が長い方へ移行し、波浪の卓越周期に接近する傾向が認められる。

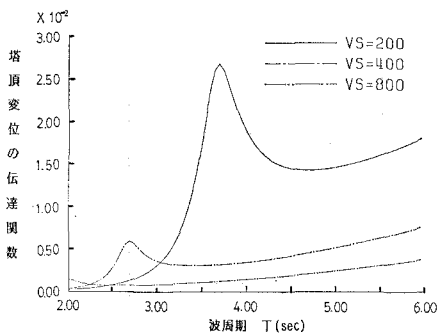
5. 結 語

地盤の特性を考慮した大口径弾性円柱の波浪による振動解析法を示した。次に行った弾性円柱の波浪による振動実験により、この解析法の妥当性を実証するとともに波長に比べ径の大きい柔構造物に作用する波圧を予測する際には、波と構造物の相互作用を考慮する必要があることがわかった。また、数値計算より、構造物の波浪による振動特性は地盤のせん断波速度に強く影響を受けることが分った。したがって、大水深の大型着底式構造物

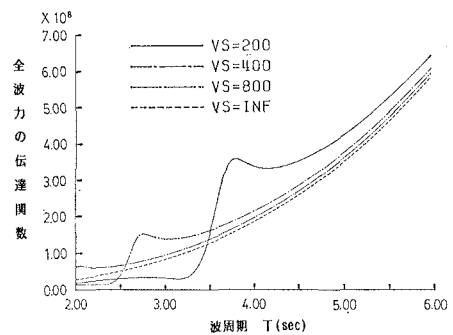
の波浪による振動を把握する際には、水—構造物—地盤の連成系としての解析が必要となることが明らかになった。

参 考 文 献

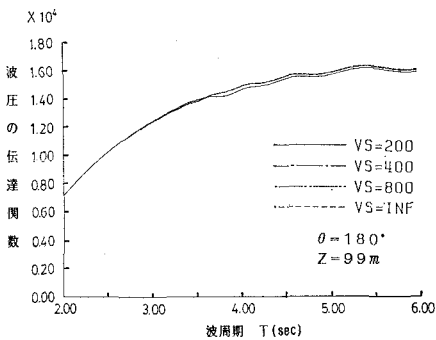
- 1) 沖見芳秀・松本 喬：水—地盤—円柱の連成振動解析，第33回海岸工学講演会論文集，pp. 516～520，1986。
- 2) 例えば，今井貫爾・松本 喬・沖見芳秀・岩瀬浩二：海洋構造物の波浪応答，第41回土木学会年次学術講演会講演概要集，第2部，pp. 643～644，1986。
- 3) MacCamy and Fuchs: Wave forces on Piles; a diffraction theory, U. S. Army Corps of Engrs. Beach Erosion Board, Tech. Memo., No. 69, p. 17, 1954.
- 4) 濱本卓司・田中弥寿雄：固定式海洋円筒シエルの動的解析，その2 波浪応答解析，日本建築学会論文報告集，第297号，pp. 139～150，1980。



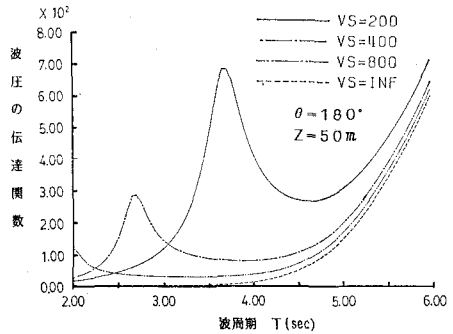
図—7 円柱頂部変位の伝達関数



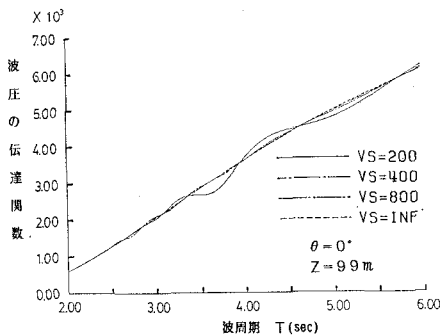
図—8 全波力の伝達関数



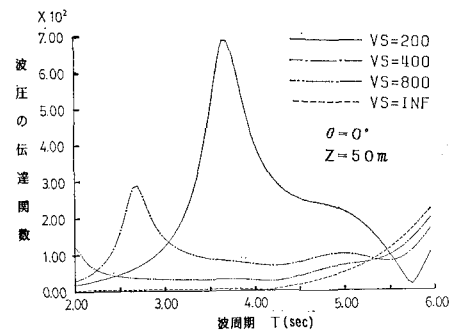
(a) $\theta=180^\circ$, $z=99$ m 地点の波圧



(c) $\theta=180^\circ$, $z=50$ m 地点の波圧



(b) $\theta=0^\circ$, $z=99$ m 地点の波圧



(d) $\theta=0^\circ$, $z=50$ m 地点の波圧

図—9 波圧の伝達関数