

水平粗面上での bore front の伝播特性

土屋 義人*・山下 隆男**・今 塩 宏之***

1. 緒 言

高潮・津波や河川の氾濫解析に関する研究の必要性が認識され、その水理特性の究明、数値モデルの開発が行われるようになってきた。この種の問題では、氾濫水先端部での境界条件を物理的にどのように定式化し、数値モデルに導入するかという、難問が残されている。

破堤による氾濫水の挙動は、ダム破壊問題のそれと類似していることから、dynamic characteristics が kinematic へ漸近する条件、Jeffreys-Vedernikov 条件として front の Froude 数 $F_r=2$ が用いられてきた^{1),2)}。また、front での慣性項と座面摩擦項との釣り合いにより、これをモデル化した Whitham の方法も、松富³⁾により津波の遡上計算に適用されている。さらに、front 部の流速、水位を Chézy 係数で展開して、流速に対して threshold を設定した Dressler⁴⁾の方法が挙げられるが、 $F_r=2$ の条件以外は3次元問題への拡張が困難である点に問題が残る。

一方、前面に水深のある場での bore front の伝播を対象とする場合には、非線形性と散逸性とが釣り合う場での方程式として、Burgers 方程式を用いられることが考えられ、Whitham⁵⁾により基礎的な検討がなされている。この方程式の大きな特徴として、Cole-Hopf 変換により、線型の拡散型方程式に書き換えられることが知られており、解析的に取り扱えるだけでなく、数値計算上も極めて有利な方程式である。また、bore front の合流、衝突も取り扱える点でも興味ある方程式である。

さらに、前面水深の有無にかかわらず、bore-front の伝播を検討する場合には、エネルギー損失を明らかにする必要がある、特に陸上への遡上を対象とする場合には、大規模粗度群によるエネルギー損失が重要となる。

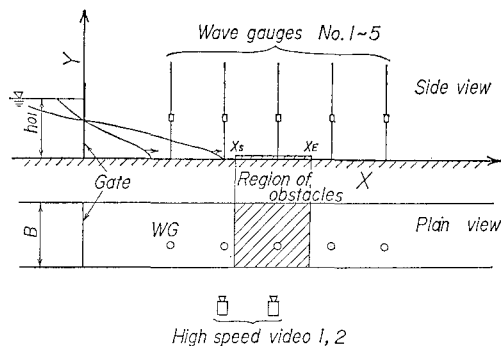
以上のように氾濫水の bore front の挙動を考える場合には、前面水深の有無、粗度の規模、2次元/3次元問題等によって種々の現象の取り扱い方法が挙げられる。本研究においては、ダム破壊問題と同様な現象を対象と

した水理実験により、bore front の前面水深の有無による特性の相違と衝突時の特性を検討するとともに、大規模粗度群によるエネルギー散逸特性を調べる。次に、Burgers 方程式による bore front の数値計算法を示す。

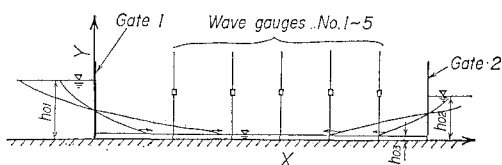
2. 実験による bore front の伝播特性

2.1 実験方法

ダム破壊問題と同様の場を再現するため、図—1 に示すように、貯水槽と実験水路とをゲートで支切り、これを瞬時に上げることで bore front を発生させた。実験は目的によって3つに大別され、RUN-1 のシリーズは、水平面上での front の伝播速度、水面形状および流速を計測した。RUN-2 では、図—1 (b) のように、実験水路の両端に貯水槽を設置し、frot の衝突特性を調べた。さらに RUN-3, 4 のシリーズでは、RUN-1 と同様の装置 (図—1 (a)) に、円筒形粗度要素群を設置して、これによるエネルギー損失および、粗度群前後における front の Froude 数を計測した。



(a) RUN-1 および RUN-3



(b) RUN-2

図—1 実験装置

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所

*** 正会員 工修 (株)川崎製鉄 エンジニアリング事業部

伝播速度および水面形は、5台の水位計群により計測し、流速は高速度ビデオカメラ装置 (HSV システム, 200 fr/s) を用いて、中立粒子の可視化法により計測した。

2.2 実験結果および考察

a) 水平床上的の bore front の伝播実験

前面水深 h_{02} および貯水槽の水深 h_{01} を変え、表-1 に示す条件で、8 ケースの実験を行い、以下の結果を得た。

1) 前面水深 h_{02} が大きい場合には、図-1 (a) に示すように undular bore を伴った front が発生し、 h_{02} の減少に伴って 図-1 (b) のような近次解に近い水面形を有する bore front へ遷移する。表-1 より、front 波高 H_B と h_{02} との比 $(H_B + h_{02})/h_{02}$ の値が 0.4~0.6 の間に、undular 成分の発生限界が存在することが推測される。

2) front の Froude 数 F_r は、1~2 の間に存在しており、undular 成分のために流速が計測できなかった RUN 1-3, 4 においてはこの値より小さいことが推定できる。

3) 以上のことから、dry bed に近い状態では、分散効果が抑えられ、非線形性と散逸性が front の運動の支配的要因となっていることがわかる。

4) 図-3 は front の伝播速度の計測結果であり、図中の $c/\sqrt{gh_{01}}$ は計測された伝播速度 c と貯水槽の水深

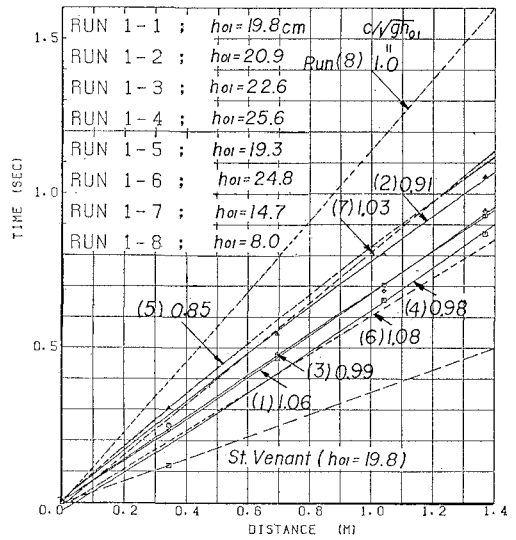


図-3 水平床での bore front の伝播速度

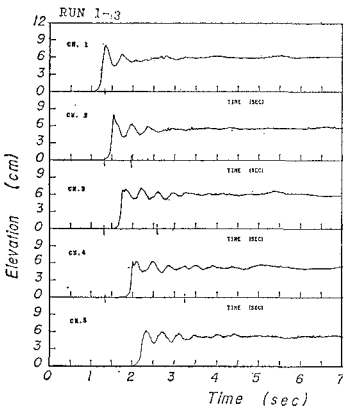
h_{01} から定義される無次元量で、全ケースについて、ほぼ 1 に近い値となっている。すなわち、ダム破壊問題における front の伝播速度は、 $\sqrt{gh_{01}}$ に近い値となり、Schoklitsch⁹⁾ の front 理論と一致する。

b) Bore front の衝突実験

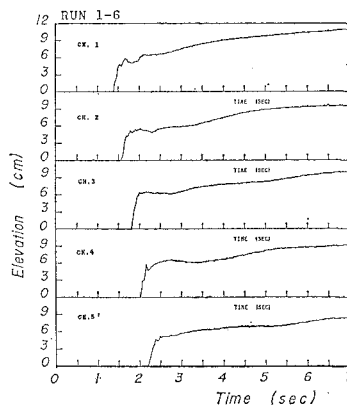
強さの異なる 2 つの bore front が衝突した場合の水位変化の 1 例を図-4 に示す。この図より、次の点が考察されよう。強い bore front (ch. 1→ch. 5へ伝播) はその逆方向から伝播してきた弱い front とほぼ ch. 3 の波高計の位置で衝突している。衝突後、強い front はキンク解に近い水面形を弱い front の上に形成しながら伝播する。しかしながら、弱い front は、強い front に吸収され、波動成分となって伝播することがわかる。この場合、流れの主方向は強い front の伝播方向であるため、逆流を伝播する undular bore となり、前シリーズの undular

表-1 RUN-1 の実験条件

RUN NO.	h_{01} (cm)	h_{02} (cm)	ΔH (cm)	F_r	H_B (cm)	$(H_B + h_{02})/h_{02}$
1-1	19.8	1.0	18.8	—	5.14	6.14
2	20.9	3.8	17.1	0.99	7.71	3.03
3	22.6	9.8	12.8	—	6.00	1.61
4	25.6	12.8	12.8	—	6.94	1.54
5	19.3	2.2	17.1	1.12	6.51	3.66
6	24.8	0.8	24.0	1.74	6.64	9.30
7	14.7	0.8	13.9	1.54	6.43	9.04
8	8.0	0.9	7.1	—	3.94	5.38



(a) undular bore の生じる波形



(b) undular bore の生じない波形

図-2 水平床上的の bore front の波形

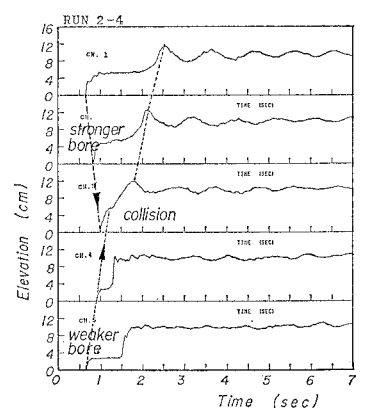


図-4 bore front の衝突

成分に比べ周期が長くなっていることが認められる。

c) 大規模粗度要素群を通過する bore front の実験

Dry bed 上に設置された円筒形の粗度群を通過する bore front のエネルギー損失および粗度群の前後における front の Froude 数を求めた。平均流速の計測は高速現象である点および bore front であることから、2台の HSV システムによる可視化法を採用している点で、実験結果に精度上の問題はありますが、これによって速度水頭を、水位計により位置水頭を求めた。実験は、各 h_{01} に対して、粗度群を設置しない場合を行い、その後、同一条件で発生させた bore front について、粗度要素の半径および高さを変化させて行った。それらの結果は全て粗度無しの場合からの差として全水頭を評価した。すなわち、本実験で示す損失水頭 h_L は、粗度群が存在するために生じるエネルギー損失として定義される。粗度要素の直径 ϕ は 3.2 および 7.6 cm の 2 通りを用い、高さ k は 2, 4 および 8 cm と変化させた。この場合、 $k=2$ cm では水没する粗度、 $k=8$ cm では水上に突出する粗度に対応している。ここで、粗度要素間のすき間を r として、粗度群の長さを L と定義する。いま、粗度の配列パターンを同一 (r/ϕ を一定とする) として次式のパラメータ S/F を定義する。

$$S/F = (\phi + r)^2 / k\phi \quad \text{.....(1)}$$

このパラメータは、 r/ϕ = 一定の場合には、 ϕ/k と同一の意味となり、粗度の高さとの比を示す。またカスケード的に水位の低下が生じる粗度群中で、bore front の水位を粗度前、後の水位 η_1 および η_2 を用いて、 $H_{1/2} = (\eta_1 + \eta_2)/2$ で定義し、粗度高さとの比、 $H_{1/2}/k$ を粗度の高さ・水位パラメータとして用いる。

ここで、大規模粗度群の存在によって失われるエネルギーは水平方向の運動量の輸送に等価であると考えて、水平混合項を代表する有次元量 gh_L/L (cm/sec²) の特性

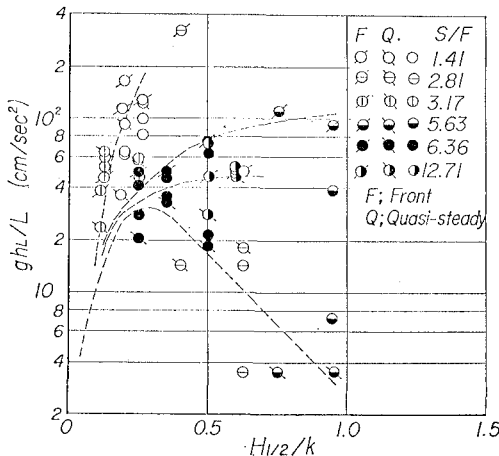


図-5 大規模粗度群による損失水頭

を検討する。図-5 は、bore front 部と準定常部とその中間領域とに分類して、 gh_L/L と $H_{1/2}/k$ との関係を、 S/F をパラメータとして示している。これより、大規模粗度群による bore front のエネルギー散逸特性として、次の点が結論づけられる。

1) $H_{1/2}/k$ の小さい場合 (高い粗度に相当) には、front 部でのエネルギー散逸は S/F パラメータにより支配される。

2) S/F パラメータが大きくなれば、front 部でのエネルギー散逸は $H_{1/2}/k$ に依存しなくなる。すなわち、粗度高さが小さくなると水深の影響が小さくなる。

3) 一方、front 背後の準定常領域の場合には、図中に実線で示すように、 $H_{1/2}/k \sim 0.25$ の付近でエネルギー散逸が最大となるような傾向がある。このことは、定常流に対しては、粗度高さと水深とがある値になれば大規模粗度要素によるエネルギー散逸が最大となるような水表面付近での渦の発生を示唆している。

図-6 は粗度群の前後において front の Froude 数を計測した結果であり、これより、粗度群の通過後においても、次式で示される、Jeffreys-Vedernikov 条件、

$$u_f + \sqrt{gh_f} \rightarrow 3/2 \sqrt{gh_f} \quad \text{.....(2)}$$

すなわち、 $Fr = u_f / \sqrt{gh_f} = 2$ が適用できそうである。

3. Burgers 方程式による bore front の数値計算法

砕波やここで対象としている氾濫水の先端部の運動は、散逸性と非線形性が支配的であることから、その解析には、衝撃波と同様に、不連続関数を基礎方程式の

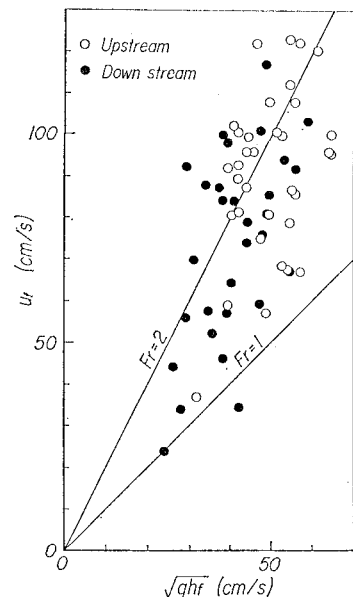


図-6 粗度群前後における Froude 数

解として拡張する、いわゆる弱解を許す解析法と、散逸性と非線形性のバランスする漸近方程式、Burgers 方程式を解く方法とが知られている。ここでは、後者の手法を用いることとし、開水路方程式から Burgers 方程式を誘導するとともに、これを Cole-Hopf 変換により線形拡散型方程式に書き換え、QUICKEST 法で数値粘性を除去した数値計算が可能であることを示す。

水路幅一定の開水路の基礎方程式は、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g'h_x &= g'S - C_f u^2/h + \nu_e u_{xx} \end{aligned} \right\} \cdots (3)$$

ここに、 u : 断面平均流速、 h : 底面からの水位、 S : エネルギー勾配、 C_f : 底面摩擦係数、 $g' = g \cos \theta$ および ν_e : 渦動粘性係数である。

式 (3) における等流解は、 $g'S = C_f u_0^2/h_0$ であり、微小パラメータ ε を用いて、次式の摂動を考える。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots \\ h &= h_0 + \varepsilon h^{(1)} + \varepsilon^2 h^{(2)} + \cdots \end{aligned} \right\} \cdots (4)$$

式 (3) に、 $\xi = \varepsilon(x - ct)$ 、 $\tau = \varepsilon^2 t$ なる G-M 変換を行い、式 (4) を代入すると、 $O(\varepsilon)$ で $c_0 = u_0 + \sqrt{gh_0}$ の関係が、 $O(\varepsilon^2)$ で Burgers 方程式が得られる。これを、固定座標系に変換しなおすと、次式のようになる。

$$h_t + c_0 h_x + \frac{3c_0}{2h_0} h h_x = \frac{\nu_e}{2} h_{xx} \cdots (5)$$

周知のように、この方程式は、Cole-Hopf 変換により、線形の拡散型方程式となり、解析解および数値解を得るのには極めて有効な方程式である。すなわち、式 (5) に次式の変換を行う。

$$h = -2\nu_e \varphi_x / \varphi \cdots (6)$$

ここに、 $\nu = 3c_0 \nu_e / (4h_0)$ である。この変換により、式 (5) は、次式のような線形の Advection/Diffusion 方程式となる。

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x = \nu_e \varphi_{xx} \cdots (7)$$

この方程式の数値解には、時間に進み、空間に中央差分 (FTCS) をとると Péclet 数 $P = c_0 \Delta x / \nu_e$ が大きくなるとギブス解が生じること、および左辺の打ち切り誤差が数値粘性となることが知られている。これらを除去する解法として、Leonard⁷⁾ により QUICKEST 法が提案され、Basco⁸⁾ によって FTCS 法で φ_{xxx} の打ち切り誤差まで考慮する拡張がなされている。

式 (7) の差分方程式 (FTCS) は、

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} + c_0 \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} &= \nu_e \left\{ \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right. \\ &+ \left[\frac{\Delta t}{2} \varphi_{tt} + \frac{\Delta t^2}{3!} \varphi_{ttt} + \text{HOT} \right] \\ &+ c_0 \left[\frac{\Delta x^2}{3!} \varphi_{xxx} + \text{HOT} \right] \\ &- K \left[\frac{2\Delta x^2}{4!} \varphi_{xxxx} + \text{HOT} \right] \end{aligned} \cdots (8)$$

となり、右辺第 2 項の打ち切り誤差は $\nu_n \varphi_{xx}$ の形となり数値粘性 ν_n が生じてくる。一般に、この影響は無視できない場合が多く、 $\nu_n > \nu_e$ の場合には、安定な数値解が得られても、diffusion の真の効果を評価した解では無い点が解の適合性を満足しない。そこで、右辺第 2~4 項の空間に対する 4 階以上の項を無視し、時間微分項を基礎方程式を用いて空間微分に書き換えると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1}^{n+1} &= \varphi_j^n - \frac{C_r}{2} (\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n) + \gamma (\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n) \\ &+ C_r \left[\left(\frac{C_r}{2} \right) \Delta x^2 \cdot \varphi_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} (1 - C_r^2 - 6\gamma) \varphi_{xxx} \right]_j \\ &\cdots \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $C_r = c_0 \Delta t / \Delta x$ (Courant 数) および $\gamma = \nu_e \cdot \Delta t / \Delta x^2$ である。ここで、 φ_{xxx} の項に前進差分を適用すると、Leonard の示した QUICKEST 法と同様の差分となり、式 (9) は、 C_r と γ を用いて、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_j^{n+1} &= \varphi_j^n [\gamma(1 - C_r) - C_r(C_r^2 - 3C_r + 2)/6] \varphi_{j+1}^n \\ &- [\gamma(2 - 3C_r) - C_r(C_r^2 - 2C_r - 1)/2] \varphi_j^n \\ &+ [\gamma(1 - 3C_r) - C_r(C_r^2 - C_r - 2)/2] \varphi_{j-1}^n \\ &+ [\gamma C_r + C_r(C_r^2 - 1)/6] \varphi_{j-2}^n \cdots \cdots \cdots (10) \end{aligned}$$

以上の方法により、式 (10) の解 φ 、 φ_x を得、これを式 (6) により再変換することで式 (5) の解 h を得ることができる。これにより、水平方向の渦動拡散 ν_e を含む開水路方程式の水面形および断面平均流速 u を、ギブス (wiggles) および数値粘性を除去して計算することが可能となり、開水路を伝播する bore front を有するような洪水波の計算には極めて有効な計算手法となる。

ここで、この計算方法を前節までに示したような汜濫水先端部の数値計算に導入する場合、以下の点において問題が残る。

- 1) Burgers 方程式の誘導において、自明解を等流解としているため、dry bed 上への拡張ができない。
- 2) 実験結果から明らかにされた bore front の特性として、顕著な undular bore が存在し、これによるエネルギーの bore 後方への輸送を考慮するためには、式 (5) に K-dV 方程式の分散項を付加した、

$$\begin{aligned} h_t + c_0 h_x + \frac{3c_0}{2h_0} h h_x + \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{c_0 h_0^3}{6} h_{xxx} \\ = \varepsilon^{\alpha-1} \frac{\nu_e}{2} h_{xx} \end{aligned} \cdots \cdots \cdots (11)$$

のような場の方程式となり、微小展開パラメータを含む。すなわち、 $\alpha=1$ の場合は Burgers 方程式に ε を乗じた K-dV 分散項が付加され、 $\alpha=1/2$ の場合には、K-dV 方程式に $\varepsilon^{-1/2}$ を乗じた散逸項が付加されることとなる。これは G-M 変換の相似性に起因するもので、Burgers 方程式に対して K-dV 分散項の高次項がどの程度影響しているのかを、水理実験と数値計算によって明らかにす

る必要がある。

3) ダム破壊のような現象においては、場の方程式を誘導する場合の遠方場の条件が満足されないため、直接的には適用できないが、bore front を形成する洪水波の伝播計算への適用が可能である。

数値計算は、式(10)を任意の境界条件の下に解くことになる。例えば、水位変動 h が一定の条件では、変換式(6)より φ に関する Robin 境界条件となる。一方、初期条件として、振幅 a のキンク解、

$$h = h_0 + a \tanh \left\{ -\frac{a}{2\nu} (x - x_0) \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

を与える場合においても、式(4)の解群

$$\varphi = C \exp \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int h dx \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

が初期条件となり、その解を再変換して h を求めることとなる。以上のような初期、境界条件を対象として求めた Burgers 方程式の解を図-7に示すが、Crank-Nicolson 法で Burgers 方程式を直接数値計算した場合に front 部に生じるギブス現象(wiggle)が発生していないことがわかる。この方法では、非線形項を直接数値計算していない点、ギブス解、数値粘性が除去される点、安定条件が明確である点の他に、計算時間が大幅に短縮できる長所を有している。

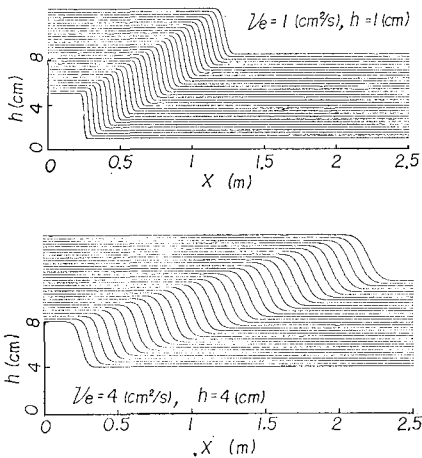


図-7 Burgers 方程式による bore front の伝播数値計算例

4. 結 語

以上、水平床におけるダム破壊時の bore front の伝播特性と大規模粗度群によるエネルギー散逸に関する実験および Burgers 方程式による bore front の伝播数値計算法を検討し、以下のような結果を得た。

- 1) 前面水深が bore の波高と同程度以上である場合には、顕著な undular 成分を伴う。
- 2) ダム破壊時の bore front の伝播速度は、初期水深を h_{01} として、 $\sqrt{gh_{01}}$ で近似できる。
- 3) Bore front の衝突後には、弱い bore は波動成分として流下する。
- 4) 大規模粗度群による bore front のエネルギー散逸特性には、bore の粗度群内の平均水位 $H_{1/2}$ と粗度高さ k の比が 0.25 付近で最大の損失特性を示し、その変化特性は粗度幅・高さ S/F で分類される。
- 5) 大規模粗度群を通過した後も front の Froude 数は Jeffreys-Vedernikov 条件で比較的良好に説明される。
- 6) Burgers 方程式を Cole-Hopf 変換により線形の advection-diffusion 方程式に変換し、QUICKEST 法により数値計算する方法を提案し、その有効性を示した。

参 考 文 献

- 1) 相田 勇: 陸上に溢れる津波の数値実験, 東大震研彙報, Vol. 52, pp. 441~460, 1977.
- 2) 岩崎敏夫・富樫宏由: 遡上津波先端の条件と計算法, 第16回海岸工学講演会論文集, pp. 359~364, 1969.
- 3) 松富英夫: 陸上遡上津波の先端条件と先端部の抵抗係数, 第38回海岸工学講演会論文集, pp. 74~78, 1981.
- 4) Dressler, R. F.: Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions, J. Res. Nat. Bur. Stand., Vol. 49, pp. 217~226, 1952.
- 5) Whitham, G. B.: Part 1, Hyperbolic waves, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons., pp. 19~112, 1973.
- 6) Rouse, H.: Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers, Mc Graw-Hill, 1950.
- 7) Leonard, B. P.: A stable and accurate convection modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, Computer Meth. in App. Mech. Eng., Vol. 19, pp. 59~98, 1979.
- 8) Basco, D. R.: An implicit wiggle-free and accurate upstream finite-difference algorithm for the one-dimensional advection-diffusion equation, USAE, Waterways Expt. Sta., M. P. EL-84-4, 49 p., 1984.