

波群の伝播変形に及ぼす粘性摩擦の効果

間瀬 肇^{*}・松元 和伸^{**}・岩垣 雄一^{***}

1. ま え が き

波の変調 (modulation) あるいは波群の発達 (evolution) といった問題は、非線形波動理論の分野において非常に興味深いテーマであり、また現地波浪の高波の連なり (wave grouping) の問題に深く係わっている^{1)~4)}。

著者ら⁴⁾は、一定水深領域を伝播する単一波群の変形を、水理実験ならびに非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式) の数値計算の両面から調べ、 $kh > 1.36$ (k : 搬送波の波数, h : 水深) の場合は包絡ソリトンが形成されるが、 $kh < 1.36$ の場合には波群が扁平化していくことを示した。しかし、NLS 方程式の数値計算結果と実験結果を比較すると、計算においては水槽底面や側壁における摩擦を考慮していないため、計算結果は実験結果より振幅の値が大きいこと、また波群の分裂が実験結果より早く起こることなどの相違点が見られた。

本研究は、Liu⁵⁾ および岩垣ら^{6), 7)}の研究に基づき、NLS 方程式に水槽底面と側壁における粘性摩擦の効果を表す項を取り入れ、その数値計算結果と実験結果を比較し、粘性摩擦項が入った NLS 方程式の妥当性ならびに波群の伝播変形に及ぼす粘性摩擦の影響を検討するものである。

2. 粘性摩擦の効果を含む波群の支配方程式

固定境界面近傍を除く、非粘性、非圧縮および非回転の流体場における波動の基礎方程式および境界条件式は次のとおりである。

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < \eta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla) |\nabla \phi|^2 = 0, \quad z = \eta \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 ϕ は速度ポテンシャル、 g は重力加速度、 η は

水位変動、 h は水深、 ∇ は勾配ベクトルである。式 (4) の底面条件は、Liu⁵⁾ の方法に従って、底面においてはすべての流速成分が 0 であるという条件 (no-slip 境界条件) により後に修正される。

波は x 方向に伝播する場合を考える。スケールの異なる時空間変動を考慮するため、波形勾配 ka のオーダーである微小パラメーター ε を導入し、次のような独立変数を定義する (以下の誘導法は Mei⁸⁾ に詳しい)。

$$x, \quad x_1 = \varepsilon x, \quad x_2 = \varepsilon^2 x, \quad \dots; \quad y_1 = \varepsilon y, \quad y_2 = \varepsilon^2 y, \quad \dots;$$

$$z; \quad t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \quad \dots \quad \dots\dots\dots (5)$$

速度ポテンシャルおよび水位変動は次のように振動展開する。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[\sum_{m=-n}^n \phi_{nm} e^{im(kx - \omega t)} \right] \dots\dots (6)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[\sum_{m=-n}^n \eta_{nm} e^{im(kx - \omega t)} \right] \dots\dots (7)$$

ここで、 ϕ_{nm} および η_{nm} は x と t 以外の独立変数の関数である。

式 (1)、および式 (2) と (3) を $z=0$ のまわりで Taylor 展開した式に、式 (6) と (7) を代入して整理すると、 n と m の次数ごとに成り立つ次の方程式系が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{nm} = F_{nm}, \quad -h < z < 0 \quad \dots\dots (8)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{nm} = G_{nm}, \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$-g \eta_{nm} = H_{nm}, \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

底面条件は、Liu に従って次のようにする。層流境界層内の流速を非回転運動による成分と回転運動による成分の和として考える。連続式および線形化した Navier-Stokes 方程式より、回転運動による流速 U について、一次のオーダー $O(\varepsilon)$ で、次の方程式が成り立つ。

$$\nabla \cdot U = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \nabla^2 U \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 ν は動粘性係数である。式 (12) は $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y \ll \partial/\partial z$ を仮定することにより

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。底面においては、すべての流速成分が 0 となら

^{*} 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科

^{**} 正会員 工修 飛鳥建設

^{***} 正会員 工博 名城大学教授 理工学部土木工学科

なければならない (no-slip 境界条件) ので、次式が成り立つ。

$$\nabla \phi_1 + \mathbf{U} = 0, \quad z = -h \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 $\mathbf{U} = (U, V, W)e^{i(kx - \omega t)}$ とおき、式 (14) の境界条件もとで式 (13) を積分すると、 U, V が次のように求められる。

$$(U, V) = -\exp\left[-\frac{(1-i)}{2}\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}}(z+h)\right](ik\phi_{11}|_{z=-h}, 0) \quad \dots\dots\dots(15)$$

この結果を用いると、式 (11) から

$$W = -k^2\phi_{11}|_{z=-h} \int_z^\infty \exp\left[-\frac{(1-i)}{2}\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}}(z+h)\right] dz \quad \dots\dots\dots(16)$$

が得られる。境界層外縁 $z+h \rightarrow \infty$ では、 W は 0 となる。底面 $z = -h$ においては、上式は

$$\bar{W} = (i+1)\sqrt{\frac{\nu}{2\omega}}k^2\phi_{11}|_{z=-h} \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。 $\bar{W}$ は $O(\varepsilon \cdot k\sqrt{\nu/2\omega})$ であり、粘性の効果を $O(k\sqrt{\nu/2\omega}) = O(\varepsilon^2)$ と仮定すると、 $\bar{W}$ は $O(\varepsilon^3)$ となる。すなわち、3 次のオーダーで、底面における鉛直速度成分が 0 であるという条件から、次の底面条件式が得られる。

$$\frac{\partial \phi_{31}}{\partial z} = B_{31} = -\bar{W}, \quad z = -h \quad \dots\dots\dots(18)$$

式 (8), (9) および (18) において、 $n \geq 2$ の $m=0$ と $m=1$ の場合には、nontrivial な斉次解があり、非斉次解が解を持つためには、次の solvability condition が必要である。

$$\frac{1}{g}G_{n0} = \int_{-h}^0 F_{n0} dz + B_{n0} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\frac{1}{g}G_{n1} = \int_{-h}^0 F_{n1} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz + \frac{B_{n1}}{\cosh kh} \quad \dots\dots\dots(20)$$

以後、二次元の場合を考えることにする。 $O(\varepsilon^2)$ における solvability condition より

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

が得られ (C_g : 群速度), $O(\varepsilon^3)$ では次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - gk \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} = \frac{\omega^3 \cosh^2 kh}{2k \sinh^2 kh} \frac{\partial |A|^2}{\partial x_1} - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 kh} \frac{\partial |A|^2}{\partial t_1} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} + i \left\{ \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\omega k^2 (\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh)}{16 \sinh^4 kh} |A|^2 A \right. \\ \left. - \left(\frac{k^2}{2\omega \cosh^2 kh} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - k \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) A \right\} \\ - \frac{(i-1)\omega k}{\sinh 2kh} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} A = 0 \quad \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha = \frac{C_g^2}{2\omega} - \frac{\omega h \cosh^2 kh}{k \sinh 2kh} + \frac{C_g h \sinh kh}{\cosh kh} \quad \dots\dots\dots(24)$$

である。式 (23) で左辺の最後の項が加わっている分だけ水平床の NLS 方程式⁹⁾と異なる。式 (21) と式 (23) に ε 乗じてたし合わせた式 (ϕ_{10} と A は x_1 と t_1 だけの関数とする) および式 (22) から、次の座標変換

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{X}{C_g} - t_1, \quad X = \varepsilon x_1 \quad \dots\dots\dots(25)$$

によって、次の空間発展型方程式が得られる。

$$\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{i\alpha}{C_g^3} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{i\beta}{C_g} |A|^2 A + \frac{(1-i)\varepsilon_b}{L} A = 0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

ここで

$$\begin{aligned} \beta = \frac{\omega k^2}{16 \sinh^4 kh} (\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh) \\ - \frac{\omega}{2 \sinh^2 2kh} \frac{(2\omega \cosh^2 kh + kC_g)^2}{(gh - C_g^2)} \quad \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_b = 4\pi^2 / \{\sqrt{\omega/2\nu} L (\sinh 2kh + 2kh)\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

であり、 L は搬送波の波長、 ε_b は規則波の場合に得られている無次元波高減衰率⁶⁾である。式 (26) における左辺第 4 項の係数の実数部が振幅減衰に、虚数部が位相に影響を及ぼす。

水槽の幅が水深に比べて小さい場合、側壁における摩擦も考慮しなければならない。岩垣ら⁶⁾によれば、水槽の幅を B とすると、底面でのエネルギー損失と両側壁における損失の比 ϕ_1 は

$$\phi_1 = kB / \sinh 2kh \quad \dots\dots\dots(29)$$

となる。底面と両側壁における摩擦による波高の減衰率を ε_{b+w} とすると、 ε_b との関係は次のように表される。

$$\varepsilon_{b+w} / \varepsilon_b = 1 + 1/\phi_1 \quad \dots\dots\dots(30)$$

したがって、底面摩擦だけでなく側壁における摩擦も考慮する場合には、式 (26) の左辺第 4 項に $(1+1/\phi_1)$ をかければよい。また、岩垣ら⁷⁾によれば、層流境界層の非線形性を考慮するとエネルギー損失比 ϕ_2 は次のように与えられる。

$$\phi_2 = \{1 - (1.086 \operatorname{sech} kh + 0.197)\delta\} (kB / \sinh 2kh) \quad \dots\dots\dots(31)$$

ここで、 δ は波形勾配と水深波長比の効果を表すパラメーターで、たかだか 0.15 程度であることが示されている。本研究ではすべての条件にわたって $\delta = 0.1$ を用いた。

以上の結果をまとめると、次のようである。底面における粘性摩擦を考慮した NLS 方程式は式 (26) で与えられる。底面摩擦に加え、側壁における摩擦も考慮する場合には、式 (26) の左辺第 4 項に $(1+1/\phi_1)$ を乗じたものを用いる。さらに、境界層の非線形性をも考慮する場合には、式 (26) の左辺第 4 項に $(1+1/\phi_2)$ を乗ず

る。

3. 実験結果と数値計算結果の比較

本研究で用いた実験データは、著者らが以前行った実験で得たものである。それは、水深が 50 cm, 30 cm および 15 cm の一定水深領域を伝播する sin 型波群および soliton 型波群の変形を、3 m おきに設置した 6 台の容量式波高計で測定したものである。実験装置および実験方法についての詳細は、文献 4) を参照されたい。

図-1 は、 $(ka)_{\max}=0.18$, $kh=4.53$ である sin 型波群の伝播変形の実験結果 ((a) 図) と計算結果 ((b)~(d) 図) を示したものである。(b) 図は粘性摩擦を全く考えない場合、(c) 図は底面摩擦のみを考慮した場合、(d) 図は底面と側壁における粘性摩擦を考慮した場合の NLS 方程式の計算結果である。

図-1 (b) においては、 $x \geq 6$ m で実験結果より包絡振幅の値が大きくなっており、 $x=15$ m の地点で実験結果と比べ約 50% 大きい。また、 $x \geq 12$ m で波群の分裂に関して、両者に差が見られる。すなわち、計算結果は x

$=12$ m ですでに分裂が起こっており、 $x=15$ m では分裂した波群が合体する傾向にあるのに対し、実験結果は $x=12$ m で波群の分裂が始まり、 $x=15$ m で分裂が進んでいる点が異なる。(c) 図の底面摩擦を取り入れた計算においても、計算結果は (b) 図とほとんど同じである。このケースは $kh=4.53$ と深海の条件に相当しており、底面摩擦の効果が現れないためである。(d) 図の底面および側壁での摩擦の効果を取り入れた場合の計算結果は、波群の分裂に関しても実験結果とかなりよく一致している。このことは、波群の分裂の抑制および振幅の減衰に対して側壁摩擦の影響が重要であることを意味している。

図-2 および 3 は、搬送波の周波数が 1.2 Hz の soliton 型波群の伝播変形の実験結果 ((a) 図) と、底面摩擦だけを考慮した場合の包絡波形の計算結果 ((c) 図)、側壁における摩擦も考慮した場合の計算結果 ((d) 図) および (d) 図に示された包絡波形を用いて計算される 2 次のオーダーの水位変動 ((b) 図) を示したものである。

図-2 は $(ka)_{\max}=0.18$, $kh=2.92$ の場合であり、包

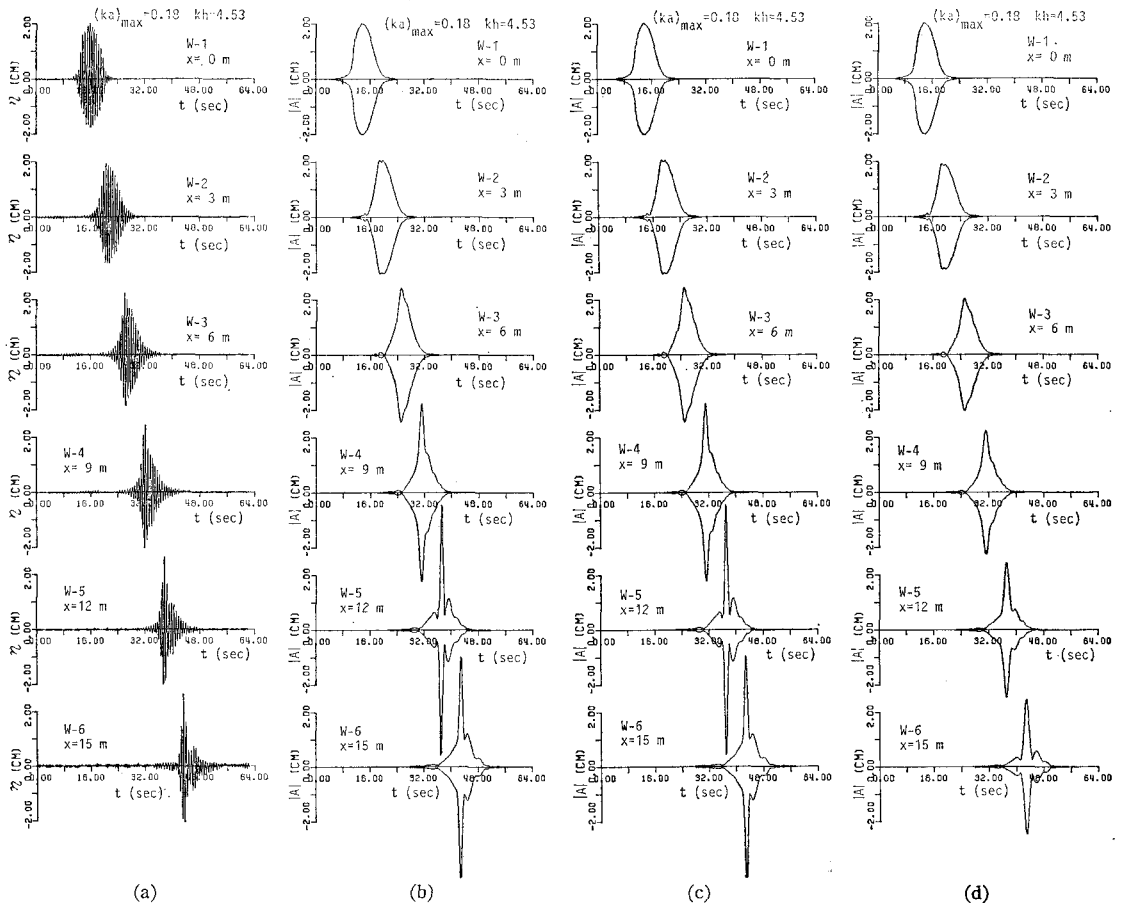
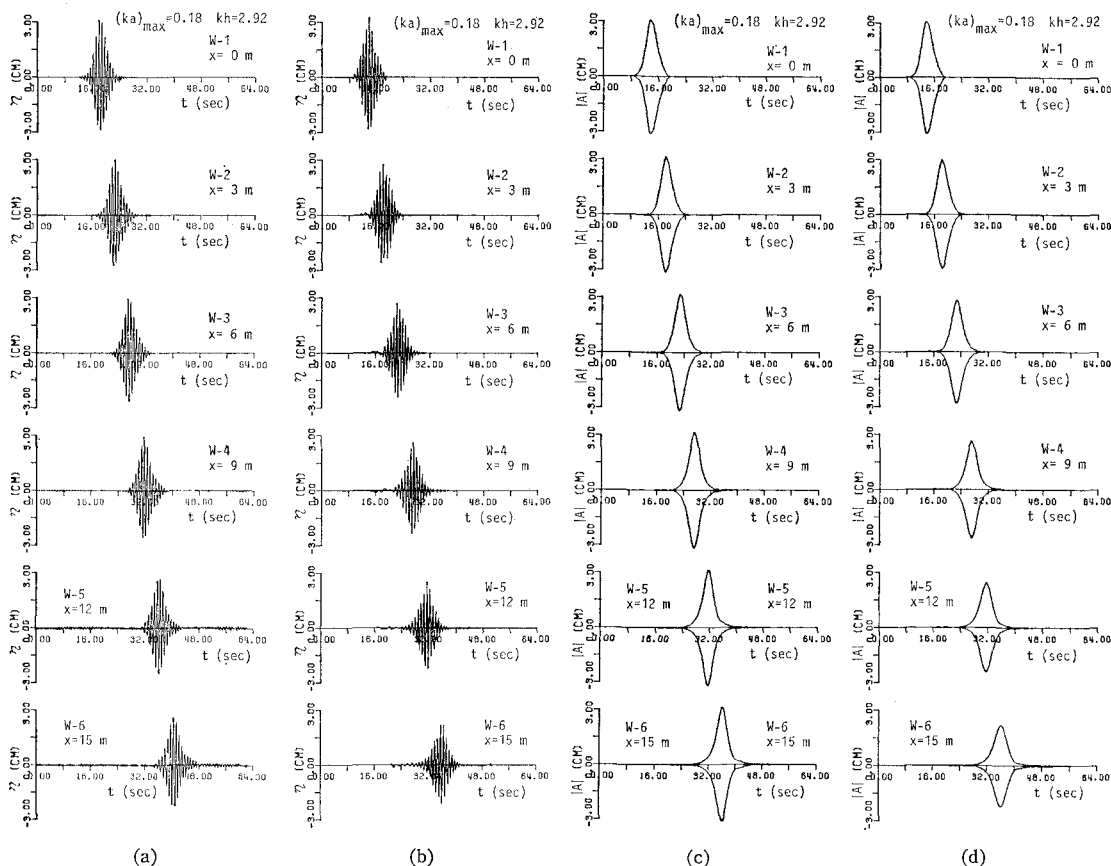


図-1 sin 型波群の伝播変形の実験結果 ((a) 図) と包絡波形の計算結果 ((b) 図: 粘性摩擦を考慮しない場合, (c) 図: 底面摩擦を考慮した場合, (d) 図: 底面摩擦と側壁摩擦を考慮した場合)



図—2 soliton 型波群の伝播変形の実験結果 ((a) 図) と計算結果 ((b) 図): (d) 図を用いて得られる 2 次のオーダーの水位変動, (c) 図: 底面摩擦を考慮した場合の包絡波形, (d) 図: 底面摩擦と側壁摩擦を考慮した場合の包絡波形

緒ソリトンが安定に伝播するかどうか確かめるために行ったものである。包絡波形は摩擦減衰のため、若干小さくなって行くが、その形状はほとんど変化しない。このケースは深海の条件に近いため、(c) 図の結果は摩擦を全く考慮しない計算結果とほとんど変わらず、また $x=15\text{ m}$ の地点で約 20% 実験結果より大きくなっている。側壁における摩擦も考慮した計算結果は、 $x=15\text{ m}$ 地点で約 10% 実験結果より小さくなるが、両者の一致の程度は良好である。これは、水位変動を示した (a) 図と (b) 図の比較からも確かめられる。

図—3 は $(ka)_{\max}=0.23$, $kh=1.09$ の場合である。このケースは浅海の条件となっており、(c) 図の結果は摩擦を全く考慮しない計算結果に比べ、 $x=15\text{ m}$ の地点で約 16% 減少している。しかし、この計算結果は実験結果と比べてまだ大きくなっており、 $x=15\text{ m}$ の地点で約 30% 大きい。(d) 図の底面摩擦に加え側壁摩擦も考慮した計算結果は、実験結果とよく一致している。

計算結果と実験結果との比較から、両者が最もよく一致したのは、式 (26) の左辺第 4 項に $(1+1/\phi_1)$ をかけた場合であった。すなわち、線形の層流境界層理論によ

て底面および側壁における粘性摩擦を考慮した場合であった。層流境界層の非線形性を考慮した場合の計算結果は、図—1 から 3 の (d) 図のそれに比べ、 $x=15\text{ m}$ の地点で最大で 6% 小さくなり、実験結果との差が広がる傾向にある。

規則波の波高減衰については、線形理論の結果に基づいて、側壁での摩擦の効果を含めて検討されており、その結果、波高減衰率の実験結果は理論結果よりかなり大きいことが示されている⁷⁾。しかし、単一波群の包絡波形の振幅減衰については、NLS 方程式に線形境界層理論に基づいた摩擦項を取り入れれば、実験結果をかなりよく説明できる。

4. あとがき

本研究は、まず Liu (1986) の方法を利用して、NLS 方程式に底面における粘性摩擦の効果を表す項を取り入れ、次に側壁における摩擦の効果も考慮する方法を示した。また、波群の伝播変形に関する数値計算結果と実験結果を比較し、粘性摩擦項が入った非線形 Schrödinger 方程式の妥当性を確かめるとともに、粘性摩擦は波群の

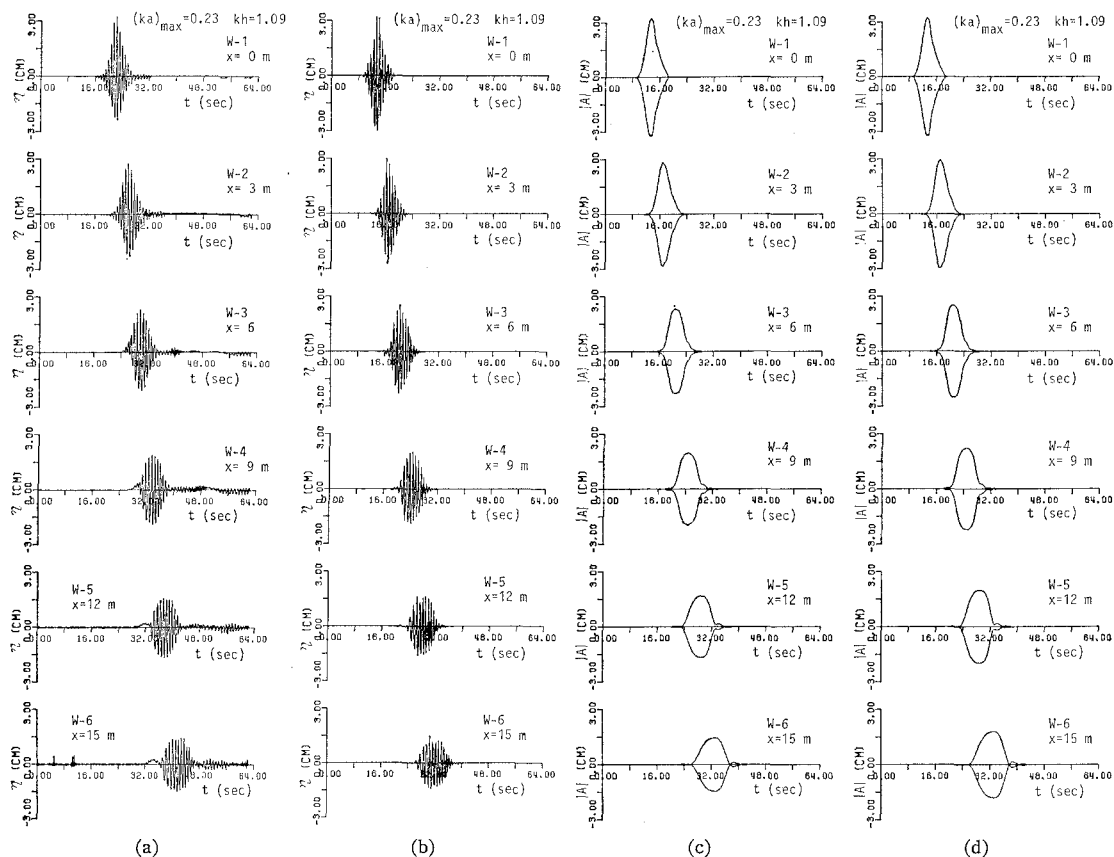


図-3 soliton 型波群の伝播変形の実験結果 (a) 図と計算結果 (b) 図: (d) 図を用いて得られる 2 次のオーダーの水位変動, (c) 図: 底面摩擦を考慮した場合の包絡波形, (d) 図: 底面摩擦と側壁摩擦を考慮した場合の包絡波形

分裂の抑制および振幅減衰に重要な役割を果たすことを示した。

最後に、本研究は文部省科学研究費奨励研究 (A) による研究の一部であることを付記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Mase, H. and Y. Iwagaki: Wave group analysis of natural wind waves based on modulational instability theory, Coastal Eng., Vol. 10, pp. 341~354, 1986.
- 2) Mase, H. and Y. Iwagaki: Evolution of wave groups in shallow water and wave group properties of random waves, Coastal Eng. in Japan, Vol. 30, No. 1, 1987 (in print).
- 3) 間瀬 肇・古室健史・岩垣雄一: 伝播に伴う Wave Group 特性の変化, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 158~162,

1984.

- 4) 間瀬 肇・古室健史・岩垣雄一: 単一波群の非線形伝播変形とうねりの波群構造, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 189~193, 1985.
- 5) Liu, P. L.-F.: Viscous effects on evolution of Stokes waves, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 112, No. 1, pp. 55~63, 1986.
- 6) 岩垣雄一・土屋義人・坂井順行: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究 (2)——底面摩擦力の測定について——, 第 11 回海岸工学講演会講演集, pp. 62~68, 1964.
- 7) 岩垣雄一・土屋義人・陳 活雄: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究 (3)——層流境界層方程式の非線形項の影響について——, 第 12 回海岸工学講演会講演集, pp. 41~49, 1965.
- 8) Mei, C. C.: The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, Wiley-Interscience, Chapter 12, 1983.