

ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定

橋 本 典 明*

1. ま え が き

海の波の基本的性質を表示するために、波のエネルギーが周波数および方向角に対して分布している状態を表示する方向スペクトルが用いられる。方向スペクトルの推定方法としては、これまでもいくつかの方法が提案されている。しかしながら、いずれの方法も、方向スペクトルを推定するために必要なクロススペクトルに誤差が含まれる場合については考慮されていない。

一方、近年、方向スペクトルの関心が高まり、また、その必要性からも、かなり大規模な観測が行われ、多くの波動量が観測されるようになって来た。理論的には多くの波動量を観測することにより、より分解能の良い方向スペクトルが推定されるはずである。しかしながら、このような場合に既往の方法を用いれば、観測波動量の増大とともに、クロススペクトルの誤差に起因する異常な方向スペクトル推定値の出現割合も増大し、必ずしも分解能の良い、安定した方向スペクトルが得られるとは限らない。むしろ方向スペクトルが異常な値を示すことにより、波浪現象の誤った解釈がなされる場合もある。したがって、これまでのように少ない観測波動量から精度の良い方向スペクトルを推定することのみならず、観測誤差、推定誤差に対しても強く、安定した方向スペクトルを推定できる方法を開発する必要がある。

そこで、著者は既往の方向スペクトルの推定理論を、クロススペクトルの誤差に対する不安定性の立場から再考し、上記の問題点を解消する新しい方向スペクトルの推定理論として、ベイズ型モデルを導入した方向スペクトルの推定理論を検討した。ベイズ型モデルは統計モデルによるデータ解析法の一方法として赤池¹⁾により導入され、その後、様々な分野の統計的データ解析法として実際応用が進められている方法である。ここでは、これらの応用例の中から、特に、石黒によって応用されたベイズ型スプライン回帰²⁾および電波望遠鏡データに基づく像の回復の問題^{3),4)}を参考にして、ここで用いられた方法を方向スペクトルの推定問題に適用することにより、方向スペクトル推定法の定式化を行うこととした。

本論文では、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定法について、推定理論の定式化、数値計算法、および数値シミュレーションによりその適用性について検討した結果等を報告する。

2. 推定理論の定式化

微小振幅の不規則波の水面変動、水面勾配、水面曲率、水圧変動などの任意の波動量間のクロススペクトル $\Phi_{mn}(\sigma)$ と、波数・周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \sigma)$ の関係は、磯部ら⁵⁾と同様な表示を行えば、

$$\Phi_{mn}(\sigma) = \int_{\mathbf{k}} H_m(\mathbf{k}, \sigma) H_n^*(\mathbf{k}, \sigma) \times \exp \{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)\} S(\mathbf{k}, \sigma) d\mathbf{k} \dots\dots\dots (1)$$

と表示される。ここに、 $\mathbf{x}$: 平面座標、 $\mathbf{k}$: 波数ベクトル、 σ : 角周波数、 i : 虚数単位、 $*$: 共役複素数である。また、 $H_m(\mathbf{k}, \sigma)$ は水面変動から任意の波動量への伝達関数であり、一般に次のように書ける⁵⁾。

$$H_m(\mathbf{k}, \sigma) = (\cos \theta)^{\alpha_m} (\sin \theta)^{\beta_m} h_m(k, \sigma) \dots\dots\dots (2)$$

式(2)中の h_m 、 α_m 、 β_m を主な波動量に対して示したものが表-1である。

以下では、式の誘導の便宜上、式(1)の2次元的表示式(m 番目と n 番目の波動量間のクロススペクトルを Φ_{mn} と表示する方式)を、1次元的表示式(Φ_i と表

表-1 主な波動量の水面変動に対する伝達関数⁵⁾

項 目	記 号	$h_m(k, \sigma)$	α_m	β_m
水 面 変 動	η	1	0	0
水 圧 変 動	p	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$	0	0
水面鉛直加速度	η_{tt}	$-\sigma^2$	0	0
水面勾配(x)	η_x	ik	1	0
" (y)	η_y	"	0	1
水粒子速度(x)	u	$\sigma \frac{\cosh kz}{\sinh kd}$	1	0
" (y)	v	"	0	1
" (z)	w	$-i\sigma \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$	0	0

k : 波数、 σ : 角周波数、 d : 水深、 z : 底面からの高さ、 ρ : 流体の密度、 g : 重力加速度。

* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所水工部主任研究官

示する方式)に再構成して取り扱う。また、 Φ_{mn} から構成される行列 Φ がエルミート行列であることを考慮し、行列 Φ の上三角の部分のみを用いて定式化を行う。このとき、式 (1) は次式のようになる。

$$\Phi_i(f) = \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) G(\theta|f) d\theta \quad (i=1, \dots, N) \quad (3)$$

ここに、

$$\Phi_i(f) = \Phi_{mn}(f)/S(f) \quad (4)$$

$$G(\theta|f) = S(f, \theta)/S(f) \quad (5)$$

$$H_i(f, \theta) = H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \times [\cos \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} - i \sin \{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] \quad (6)$$

$$x_{mn} = x_n - x_m, \quad y_{mn} = y_n - y_m \quad (7)$$

であり、方程式 (3) の数 N は、

$$N = M(M+1)/2 \quad (M \text{ は観測波動量の数}) \quad (8)$$

である。

方向分布関数 $G(\theta|f)$ は、その定義域 $[0, 2\pi]$ で 0 以上の関数であるが、以下では正值として取り扱う。これは、 $G(\theta|f)$ が 0 の領域でも限りなく 0 に近い正值であるとすれば、物理的にはそれ程不合理ではないと思われることと、後の展開の便宜のために設けた仮定である。

まず、方向分布関数 $G(\theta|f)$ の定義域 $[0, 2\pi]$ を十分な大きな数 K で等分割する ($K\Delta\theta = 2\pi$)。また、方向分布関数 $G(\theta|f)$ は等分割された各微小区間内では離散的な一定値関数であるとする。これは、波浪の数値シミュレーション等で周波数および方向角の異なる成分波を重ね合わせることに同じであり、分割数を大きく取れば波浪の線型性を表示する意味で妥当な仮定である。ここで、 $G(\theta|f) > 0$ であるので、

$$x_k(f) = \ln \{G(\theta_k|f)\} \quad (k=1, \dots, K) \quad (9)$$

と置くと、 $G(\theta|f)$ は次式のように近似される。

$$G(\theta|f) \doteq \sum_{k=1}^K \exp \{x_k(f)\} I_k(\theta) \quad (10)$$

ここに、

$$I_k(\theta) = \begin{cases} 1: & (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0: & \text{その他} \end{cases} \quad (k=1, \dots, K) \quad (11)$$

である。式 (10) を式 (3) に代入すると、

$$\Phi_i(f) \doteq \sum_{k=1}^K \exp \{x_k(f)\} \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \quad (i=1, \dots, N) \quad (12)$$

となる。右辺の積分は K が十分大きいとき、

$$\int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta = \int_{(k-1)\Delta\theta}^{k\Delta\theta} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \doteq H_i(f, \theta_k) \Delta\theta \equiv \alpha_{i,k}(f) \quad (13)$$

のように近似できる。

いま、 $\Phi_i(f)$ および $\alpha_{i,k}(f)$ は複素数であり、取り扱いが不便である。そこで、

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \text{Real} \{\Phi_i(f)\}, & \phi_{N+i} &= \text{Imag} \{\Phi_i(f)\} \\ \alpha_{i,k} &= \text{Real} \{\alpha_{i,k}(f)\}, & \alpha_{N+i,k} &= \text{Imag} \{\alpha_{i,k}(f)\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

のように分離し、すべてを実数に関する式として取り扱う。なお、式 (14) の左辺は周波数 f の関数であるが省略して記述した。以後、特別な場合を除き、便宜的に周波数 f は省略して扱うこととする。このとき、式 (13) および式 (14) より、クロススペクトルの誤差 ε_i をも考慮して、結局、式 (3) は次式のように表わされる。

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) + \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (15)$$

ここに、 ε_i ($i=1, \dots, 2N$) は互いに独立であり、平均 0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

このとき、 ϕ_i ($i=1, \dots, 2N$) が与えられれば、 x_k ($k=1, \dots, K$)、 σ^2 に関する尤度は、

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-N} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right\}^2 \right] \quad (16)$$

で与えられる。

以上の展開では方向分布関数 $G(\theta|f)$ は区分的一定値関数として近似した。この際、各微小区間ごとのエネルギーの相関については何ら考慮されていない。波の線形性からは各微小区間ごとのエネルギー分布はそれぞれ独立であると見なされるが、方向角 θ について不連続的なエネルギー分布をしているとは考えにくい。また、一般に方向分布関数 $G(\theta|f)$ は滑らかな連続関数と見なされている。したがって、方向分布関数 $G(\theta|f)$ が方向角 θ に対して滑らかであるという仮定の表現として、系列 $\{x_k\}$ が局所的には k の 1 次式でよく表現されるべきであるとする。この場合 x_k の 2 次の階差

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \quad (17)$$

は 0 に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \quad (18)$$

(ただし、 $x_0 = x_K$, $x_{-1} = x_{K-1}$)

を考えると、式 (18) が小さいほど方向分布関数の推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ は滑らかになると考えられる。したがって、方向分布関数の推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ としては、式 (18) をあまり大きくしない範囲で、尤度 (式 (16)) の大きいものが望ましい。これを定式化すると、適当なパラメータ u^2 (超パラメータ) を用いて、

$$\ln L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) - \frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \quad (19)$$

を最大化する $(x_1, \dots, x_K)$ を求めればよい。これはベイズの推論方法において、事後分布 $p_{\text{post}}(\cdot)$ の

$$p_{\text{post}}(\mathbf{x}|u^2, \sigma^2) \propto L(\mathbf{x}, \sigma^2) p(\mathbf{x}|u^2, \sigma^2) \quad \dots\dots(20)$$

の関係式において、 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_K)$ の事前分布として、

$$p(\mathbf{x}|u^2, \sigma^2) = \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^K \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad \dots\dots(21)$$

を想定したことにほかならない。

u^2 を与えれば、式 (19) を最大化する $\mathbf{x}$ は σ^2 に無関係に決まり、

$$\sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right\}^2 + u^2 \left\{ \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad \dots\dots(22)$$

を最小化することにより得られる。また、 u^2 の決定と σ^2 の推定は次式で表わされる ABIC (赤池のベイズ情報量規準)

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(\mathbf{x}, \sigma^2) p(\mathbf{x}|u^2, \sigma^2) d\mathbf{x} \quad \dots\dots(23)$$

の最小化によればよい。

3. 方向スペクトルの数値計算法

2.で述べた方法を用いて方向スペクトルを推定する場合、式 (22) の最小化、および式 (23) の積分と最小化を実行しなければならない。しかしながら、いまの場合それらを解析的に行うことは不可能である。そこで、ここでは、石黒⁹⁾、坂元⁹⁾に従って数値計算を実施した。

結果のみを示すと以下の手順となる。

- ① 適当な u^2 、および $\mathbf{x}$ の初期値 $\mathbf{x}_0$ を与えて、以下の式により、最小自乗法によって、与えられた u^2 に対する $\mathbf{x}$ の推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ を算出する。

$$J(\mathbf{x}) = \|\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{B}}\|^2 + u^2 \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|^2 \quad \dots\dots(24)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) \quad \dots\dots(25)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 \quad \dots\dots(26)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2N,1} & \dots & \alpha_{2N,K} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(27)$$

$$\mathbf{B} = (\phi_1, \dots, \phi_{2N})^T \quad \dots\dots(28)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(29)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \exp(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(x_K) \end{bmatrix} \quad \dots\dots(30)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\exp(x_1), \dots, \exp(x_K)\}^T \quad \dots\dots(31)$$

である。計算手順は、式 (25)~(26) で $\mathbf{x}$ の初期値 $\mathbf{x}_0$ を与え、式 (24) に最小自乗法を適用することにより $\mathbf{x}_1$ を算出する。次に、 $\mathbf{x}_1$ を式 (25)~(26) の $\mathbf{x}_0$ に置き換えて、 $\mathbf{x}_2$ を算出する。この演算を繰り返す、適当な収束条件を満たす解 $\hat{\mathbf{x}}$ を求め、これを与えられた u^2 に対する推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ とすればよい。

- ② ①で得られた結果を用いて、次式により、与えられた u^2 に対応する ABIC を算出する。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & 2N \ln(2\pi) + 2N + 2N \ln(\hat{\sigma}^2) \\ & - K \ln(u^2) + \ln \{ \det(\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}} + u^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \} \end{aligned} \quad \dots\dots(32)$$

ここに、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2N} \{ \|\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{B}}\|^2 + u^2 \|\mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}\|^2 \} \quad \dots\dots(33)$$

である。また、 $\hat{\mathbf{A}}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}$ は ① で収束解 $\hat{\mathbf{x}}$ を算出する際に用いられた式 (25)、(26) の $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\tilde{\mathbf{B}}$ である。

- ③ u^2 の値を種々に変えて ①、② の計算を繰り返す。

- ④ ①~③ の計算結果の内、最小の ABIC を与える $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\sigma}^2$ および u^2 を最適な推定値とする。

なお、ここでは式 (24) の繰り返し計算の初期値 $\mathbf{x}_0$ として、 $\mathbf{x}_0 = \ln(1/2\pi)$ として数値計算を実施した。また、式 (24) の繰り返し計算の収束規準としては、 $n-1$ ステップ目の繰り返し計算で得られた推定値 $\mathbf{x}_{n-1}$ と、 n ステップ目の推定値 $\mathbf{x}_n$ の差の標準偏差 $\sigma_{\mathbf{x}_n}$ が $|\sigma_{\mathbf{x}_n}| \leq 10^{-3}$ となったときに収束したと見なして推定値を算出した。

超パラメータ u の設定に際しては、事前に種々の試計算を実施し、一般には、

$$u = ab^m \quad (a=0.2, b=0.5, m=1 \sim 20) \quad \dots\dots(34)$$

として、格子探索法を実施した。数値計算法の詳細等については文献⁷⁾を参照されたい。

4. 数値シミュレーションによる検討

ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法の推定精度や適用性、有効性などを検討するために、数値シミュレーションを実施した。方向スペクトルは周波数スペクトルと方向分布関数の積で表わされることから、ここでは任意の周波数 f に着目したとして、方向角 θ に関する分布 (方向分布関数) のみにについて検討した。数値シミュレーションは光易型方向分布関数を用いて、磯部ら⁵⁾と同様な方法により実施した。

図-2 は 図-1 に示す 6 種類のアレ配置を対象として、同一の波浪条件のもとに数値シミュレーションを実施した結果である。波浪条件としては $\theta_1=0^\circ$ の方向から $s_1=10$ の風波が、 $\theta_2=-100^\circ$ の方向から $s_2=100$ のうねりが来襲する状況を示したものであり、二つの波群のピークエネルギーの比が 0.5 のものである。また、波

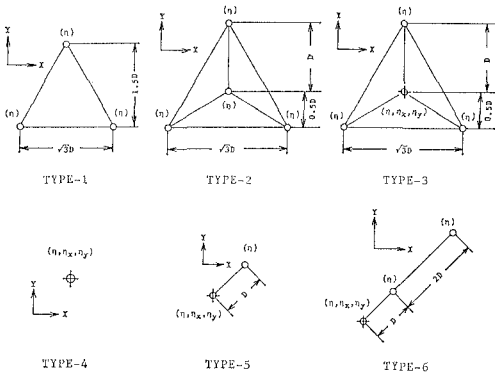


図-1 数値シミュレーションに用いたアレイ配置

高計間距離 D と波長 L の比は $D/L=0.2$ とし、式 (9) の方向分割数は $K=180$ として与えている。なお、

図-2 中の TRUE は数値シミュレーションで与えた真の方向分布関数を、BDM はベイズ型モデルを用いて推定された方向分布関数を、EMLM は拡張最尤法⁵⁾を用いて推定された方向分布関数を示している。また、図-2 の縦軸は真の方向分布関数のピーク値で正規化して描いている。

TYPE-1~TYPE-6 を比べると、図-2 に見られるように、観測波動量の増大とともに、BDM および EMLM の推定精度は向上している。この内、特に TYPE-2, TYPE-3, TYPE-6 では、BDM はほとんど TRUE に一致する推定結果となっており、EMLM に比べて推定精度が良い。なお、TYPE-2 では EMLM にはピークが三つ現れるなどの不合理が生じている。一方、三つの観測波動量から構成される TYPE-1, TYPE-4 では、BDM は EMLM に比べて推定精度が劣っている。三つ

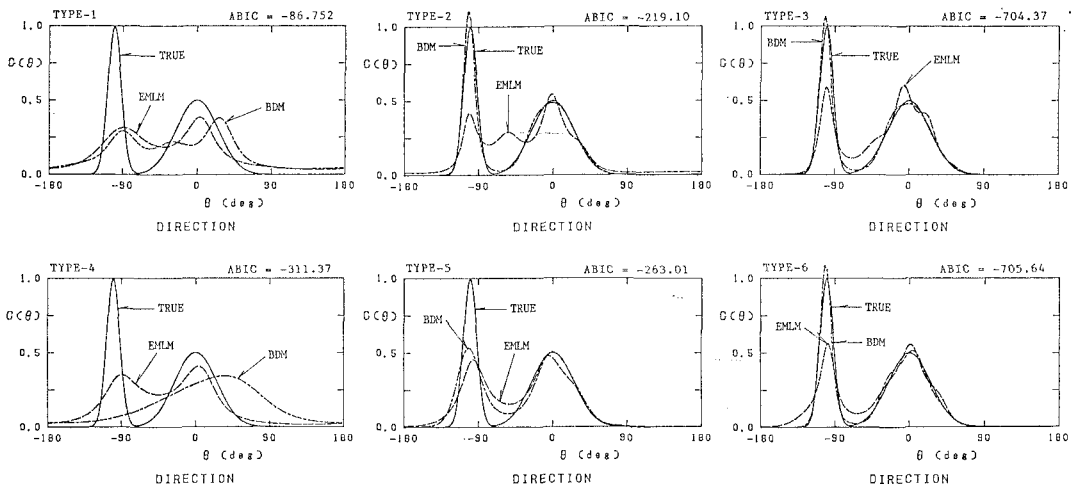
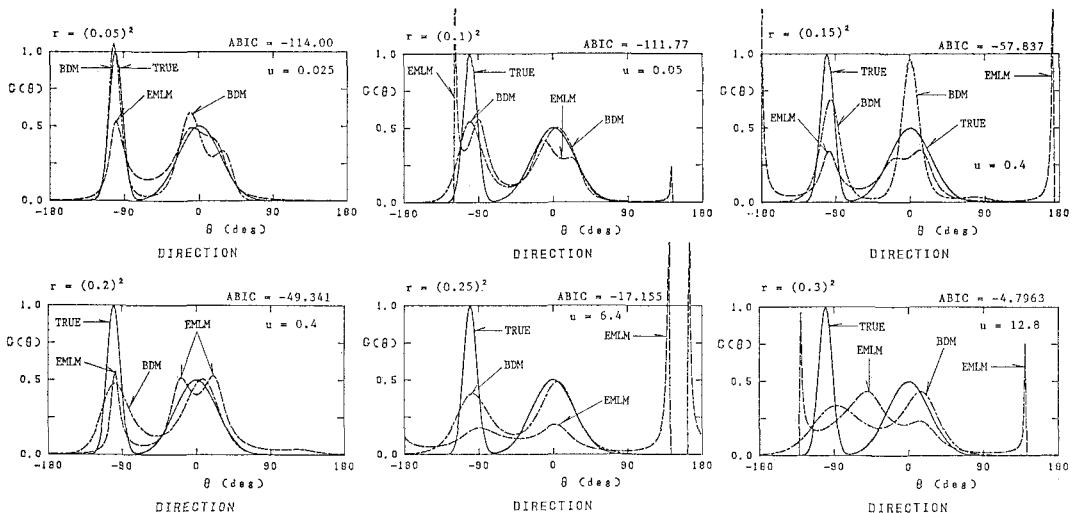


図-2 アレイ配置の相違による方向分布関数の推定値の特性


 図-3 ノイズ付加率 r の相違による方向分布関数の推定値の特性 (星型アレイ配置)

の観測波動量を用いて、一方向波浪を対象とした別の試計算によれば、BDMで推定される方向分布関数はほぼ妥当な推定値を示しており、二方向波浪に対しては、ここで示したように推定精度が劣る原因は、二方向波浪が持つ未知要素の大きさと、三つの観測波動量から得られる制約条件式(3)の数とのバランスにより、確率的な構造を持つ統計モデルを想定し得なくなること起因しているものと思われる。すなわち、式(15)で導入したクロススペクトルの誤差 ε_i を評価することにより、逆に、三つの観測波動量から二方向波浪を識別し得なくなったものと思われる。しかしながら、波浪条件の複雑さに応じて、ある数以上の波動量が観測される場合には、BDMは他の方法に比べて優れた推定法であると言える。

図-3はTYPE-2の星型アレイ配置を対象として、クロススペクトルに誤差を付加した場合の解析例を示したものである。誤差の付加方法としては、便宜的に、クロススペクトルの実数部、および虚数部に、平均0、標準偏差 σ の正規乱数を付加して与えている。なお、標準偏差 σ はクロススペクトルの実数部、および虚数部の絶対値を定数倍(r 倍)したものを用いている。図-3に見られるように、ノイズ付加率 r の増大とともに、方向スペクトルに関する情報はノイズの中に埋もれて行く。この影響のため、図-3に見られるようにBDMで推定される方向分布関数は、一般に、 r の増大とともに平坦な方向分布関数に推移して行く。しかしながら、BDMで推定される二つのエネルギーピークの位置は、ノイズ付加率をかなり増大させても、ほぼ妥当な位置に推定されており、BDMはノイズの混入に対しても安定した推定法であると言える。一方、EMLMはノイズの混入具合により、推定値が無限大に発散したり、負値が現れるなどの不合理が生じており、BDMに比べてノイズの混入に対して不安定である。なお、図-3でEMLMに負値が現れていないのは、負値が現れる領域では方向分布関数のエネルギーを0に置き換えているためである。

5. あとがき

以上、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法について、理論式の定式化、数値計算法、および数値シミュレーションにより本方法の推定精度や有効性、適用性について検討した結果等を報告した。

ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定理論の定式化に際しては、モデル分布として波浪の線型性を考慮して、自由度の大きい、波のエネルギーの離散分布的な構造を想定した。さらに、それらの離散的なエネルギー分布が方向角に対しては滑らかな連続関数であるという期待を事前分布として想定し、推定理論の定式化を行った。モデル分布は極めて多くの未知パラメータから構成されるが、事前分布によりそれらのパラメータは少数の超パラメータにより支配される。これは、極めて複雑に見える物理現象も、実際には単純な法則により支配されていると考える我々の物理現象に対する認識に合致しており、対象としている物理現象が実際にそのようなものであれば、ベイズ型モデルを用いた推定法は物理的には極めて自然な形の推定法であると言える。しかしながら、方向スペクトルとクロススペクトルの関係式(式.1)は波浪の線型理論のみから導かれたものであり、式(18)で想定した滑らかさの構造はその式中には内在していない。したがって、ここで示した方法もあくまで便宜的な方法であり、その妥当性は今後の研究に待つほかはない。しかしながら、その際にも、新しい知見を式(20)の事前分布に盛り込むことにより、ここに示したベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は、より正しい推定法として、今後さらに発展し続けて行くものと思われる。

参 考 文 献

- 1) Akaike, H.: Likelihood and Bayes procedure, Bayesian Statistics (Bernardo, J. M., De Groot, M. H., Lindley, D. U. and Smith, A. F. M. eds.) University Press, Valencia, pp. 143~166, 1980.
- 2) 石黒真木夫・荷畑恵美子: ベイズ型スプライン回帰, 統計数理研究所彙報, 第30巻, 第1号, pp. 29~36, 1982.
- 3) 石黒真木夫: 複雑すぎる現象をどう捉えるか——大規模なパラメトリックモデル——, 統計数理, No. 2, pp. 251~256, 1985.
- 4) Ishiguro, M.: On the Use of Multiparameter Models in Statistical Measurement Technique, Doctoral Dissertation, Tokyo University, 1984.
- 5) 磯部雅彦・近藤浩石・堀川清司: 方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 173~177, 1984.
- 6) 坂元慶行: カテゴリカルデータのモデル分析, 共立出版株式会社, 221 p., 1985.
- 7) 橋本典明: ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第26巻, 第2号, pp. 97~125, 1987.