

# 多方向不規則波浪の波別解析法に関する理論的考察

磯 部 雅 彦\*

## 1. 序 論

不規則波浪を記述する方法として、スペクトル解析法と波別解析法とが用いられている。単一方向へ進行する不規則波浪、いわゆる長波峯不規則波浪の場合、それぞれの解析法で主に対象とするのは、周波数スペクトルおよび波高分布である。しかし、実際の海の波は無数の方向へ進行する成分波を含む多方向不規則波浪となっている。この場合、スペクトル解析法では方向スペクトルが用いられ、これに関して種々の研究がなされている。これに対し、多方向不規則波浪を波別解析法によって取り扱うとすれば、個々の波の波高と波向の結合分布を中心にして議論を進めることになるが、実際にこのようなことを行なった例はない。ところで、多方向不規則波浪による波力、漂砂量、碎波現象などの解析には、波別解析法に基づくものが有用であると考えられる。特に、單一方向不規則波浪の場合と同様に、ある波高と波向を有する個々の波をそれと同等な規則波におきかえることにより、便宜的にではあるが非線形性をとり入れることができる。

本研究においては、多方向不規則波浪の波別解析法に関し、波高と波向の結合確率密度関数などを理論的に導き、限られた条件であるが現地観測結果との比較を行う。

## 2. 包絡線関数の結合確率密度

### (1) 水面変動と水平成分水粒子速度の包絡線関数

個々の波の波向を定義するために用いる観測記録の種類と定義法は種々考えられる。その中で、同一地点における水面変動と水平2成分水粒子速度を用いるものに着目すると、その結果が波力・漂砂量・碎波条件などに、より直接的に使えると考えられるし、また現地観測も比較的容易である。そこで、本研究では、この場合に限って議論を進めることにする。

多方向不規則波浪場は、周波数と波向の異なる無数の成分波の重ね合わせによって表現できる。 $(i, j)$  番目の成分波の周波数を  $f_i$  (対応する波数を  $k_i$ )、波向を  $\theta_j$  とすれば、平面上の位置  $(x, y)$  における水面変動  $\eta$ ,

$x$  および  $y$  方向の水粒子速度  $u$  および  $v$  は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \cos \phi_{ij} \\ u(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{H}_i \cos \theta_j \cdot c_{ij} \cos \phi_{ij} \\ v(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{H}_i \sin \theta_j \cdot c_{ij} \cos \phi_{ij} \end{aligned} \right\} \dots \quad (1)$$

ここに、 $t$  は時間を表わし、

$$\phi_{ij} = k_i(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) - 2\pi f_i t - \varepsilon_{ij} \quad \dots \quad (2)$$

$$\hat{H}_i = 2\pi f_i \frac{\cosh k_i z}{\sinh k_i h} \quad \dots \quad (3)$$

であり、 $h$  は水深、 $z$  は底面からの高さである。成分波の振幅  $c_{ij}$  は、その成分波が代表する周波数と波向の範囲を  $Af_i$  および  $A\theta_j$  とすれば、方向スペクトル  $S(f, \theta)$  との関係において

$$\langle c_{ij}^2 \rangle / 2 = S(f_i, \theta_j) Af_i A\theta_j \quad \dots \quad (4)$$

となる。ここに、 $\langle \cdot \rangle$  は統計的期待値を表す。また、成分波の位相  $\varepsilon_{ij}$  は  $0$  から  $2\pi$  の間を一様に分布する。

ここで、周波数スペクトルが狭帯域であるものと仮定し、成分波の周波数  $f_i$  が平均周波数  $\bar{f}$  とそれからの微小な変動量  $f'_i$  との和で表わされるものとする。

$$f_i = \bar{f} + f'_i \quad \dots \quad (5)$$

式(5)を式(2)に代入し、さらにそれを式(1)に代入してから三角関数の加法定理を用いて整理すれば、

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= \eta_c \cos 2\pi \bar{f} t + \eta_s \sin 2\pi \bar{f} t \\ u(t) &= u_c \cos 2\pi \bar{f} t + u_s \sin 2\pi \bar{f} t \\ v(t) &= v_c \cos 2\pi \bar{f} t + v_s \sin 2\pi \bar{f} t \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6)$$

となる。ここに、 $\eta_c$ 、 $u_c$ 、 $v_c$  などは、時間とともに緩やかに変化する包絡線関数であり、

$$\left. \begin{aligned} \eta_c &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \cos \phi'_{ij} \\ u_c &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{H}_i \cos \theta_j \cdot c_{ij} \cos \phi'_{ij} \\ v_c &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{H}_i \sin \theta_j \cdot c_{ij} \cos \phi'_{ij} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

$$\phi'_{ij} = k_i(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) - 2\pi f'_i t - \varepsilon_{ij} \quad \dots \quad (8)$$

となる。なお、 $\eta_s$ 、 $u_s$  および  $v_s$  は、式(7)において、 $\cos \phi'_{ij}$  を  $\sin \phi'_{ij}$  としたものである。

$\eta_c$ 、 $\eta_s$ 、 $u_c$ 、 $u_s$ 、 $v_c$ 、 $v_s$  の 6 種の包絡線関数の値の組み

\* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科



$$+ (1 - r_{10}^2)(V_p^2 + V_q^2) - 2r_{10}N_p U_p - 2r_{01}N_p V_p \\ + 2r_{10}r_{01}(U_p V_p + U_q V_q)\} \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

となる。上式の右辺は  $\delta$  に無関係なので、 $2\pi$  倍することにより  $p(N_p, U_p, U_q, V_p, V_q)$  が求められる。

図-1 はこれらの変数の意味を模式的に示したものである。図中では、 $N_p$ ,  $U_p$ ,  $U_q$ ,  $V_p$ ,  $V_q$  はそれぞれ対応する次元量  $\eta_p$ ,  $u_p$ ,  $u_q$ ,  $v_p$ ,  $v_q$  に変えて表示されている。一般に、流速ベクトル  $(u, v)$  は橿円形の軌跡を描くことになるが、その長軸方向に流速ベクトルが一致する瞬間が水面変位が最大となる瞬間（峯または谷）と同時に起こるとは限らない。そこで、波向の定義として 2 通り考えられることになる。1 つは橿円の長軸方向を個々の波の波向とするもので、主波向の考え方と同じものである。もう 1 つは、水面変位が最大となる瞬間、つまり波峯通過時の流速ベクトルの方向  $\alpha$  を波向とするものである。これは水面変動と同位相の流速成分の振幅  $u_p$  および  $v_p$  の比によって波向を決定することになるから、平均波向の考え方と同じである。ここでは、この種の理論解析の第 1 歩として後者を採用することにするが、碎波条件への応用などに適した定義となるであろう。

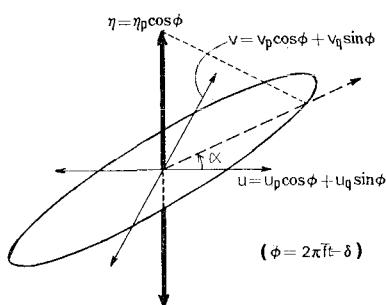


図-1 水面変動と水平乙2成分水粒子速度との関係

平均波向的な定義の場合、波向  $\alpha$  は  $U_q, V_q$  と無関係であるから、 $p(N_p, U_p, U_q, V_p, V_q)$  をさらに  $U_q$  と  $V_q$  について  $-\infty \sim \infty$  で積分してしまう。その結果は

$$= \frac{N_p}{2\pi\sqrt{A}} \exp \left[ -\frac{1}{2A} \{ N_p^2 + (1-r_{01}^2)U_p^2 + (1-r_{10}^2)V_p^2 \right. \\ \left. - 2r_{10}N_pU_p - 2r_{01}N_pV_p + 2r_{10}r_{01}U_pV_p \} \right] \quad \dots \quad (28)$$

である。

### 3. 波高と波向の結合確率

$\alpha = \tan^{-1}(v_p/u_p)$  で定義される波向を含む確率密度関数を求めるため、 $(U_p, V_p)$  を極座標  $(W, \alpha)$  に変換する。

$$U_p = W \cos \alpha, \quad V_p = (W/\gamma) \sin \alpha \dots \dots \dots (29)$$

ここに、 $\gamma$ は、 $u_p$ と $v_p$ の無次元化における基準量の違いによる補正量で式(21)より

$$\gamma = \sqrt{m_{02}/m_{20}} \quad \dots \dots \dots \quad (30)$$

となる。これは、long-crestedness パラメタである。式(29)より

$$dU_p dV_p = (W/\gamma) dW d\alpha \quad \dots \dots \dots \quad (31)$$

であるから、式(28)は

$$p(N_p, W, \alpha) = \frac{N_p W}{2\pi\sqrt{A}\gamma} \exp \left[ -\frac{1}{2A} \left\{ N_p^2 + (1-r_{01}^2)W^2 \cos^2 \alpha + (1-r_{10}^2)W^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} - 2r_{10}N_p W \cos \alpha - 2r_{01}N_p W \frac{\sin \alpha}{\gamma} + 2r_{10}r_{01}W^2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\gamma} \right\} \right]$$

となる。波高と波向の結合確率密度関数  $p(N_p, \alpha)$  を求めるためには、上式を  $W$ について  $0 \sim \infty$  で積分すればよい。これは次式を利用して行われる。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty W \exp \left[ -\frac{1}{2A} (aW^2 - 2bN_p W) \right] dW \\ &= \frac{A}{a} + \frac{\sqrt{A} b N_p}{a^{3/2}} \exp \left[ \frac{1}{2A} \frac{b^2 N_p^2}{a} \right] \\ & \quad \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{b N_p}{\sqrt{4A}} \right) \right) \dots \quad (33) \end{aligned}$$

ここに,  $\text{erf}$  は誤差関数で,

$$\operatorname{erf}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\zeta} \exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2}\right) d\zeta' \quad \dots \dots \dots \quad (34)$$

と定義される。式(33)を利用して式(32)の積分を行った結果を示すと次のようになる。

$$p(N_p, \alpha) = \frac{1}{2\pi\gamma} \left\{ \frac{\sqrt{A}}{a} N_p \exp \left[ -\frac{N_p^2}{2A} \right] + \frac{b}{a^{3/2}} N_p^2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{c}{a} N_p^2 \right] \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \text{erf} \left( \frac{b N_p}{\sqrt{A} a} \right) \right) \right\} \dots \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= (1 - r_{01}^2) \cos^2 \alpha + 2r_{10}r_{01} \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\gamma} \\ &\quad + (1 - r_{10}^2) \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \\ b &= r_{10} \cos \alpha + r_{01} \frac{\sin \alpha}{\gamma} \\ c &= \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

従って、 $r_{10}$ ,  $r_{01}$  および  $\gamma$  を与えることにより、波高と波向の結合確率密度関数  $p(N_p, \alpha)$  が完全に決定されることになる。図-2 はその例を示している。

なお、対称波浪系の場合は  $r_{01}=0$  であり、しかも方向分散が小さいものとして  $r_{10} \rightarrow 1$  とすると、式(35)は

$$p(N_p, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \frac{N_p^2}{\cos^2 \alpha} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\gamma^2} \right) N_p^2 \right]$$

$$(\cos \alpha > 0) \quad \dots \dots \dots (37)$$

となる。この場合について、波向別平均波高  $2\bar{N}_p(\alpha)$  を

$$2\bar{N}_p(\alpha) = 2 \int_0^\infty N_p p(N_p, \alpha) dN_p / \int_0^\infty p(N_p, \alpha) dN_p$$

$$\dots \dots \dots (38)$$

によって求めてみると、

$$2\bar{N}_p(\alpha) = 8 / \sqrt{2\pi \left( 1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\gamma^2} \right)} \quad \dots \dots \dots (39)$$

となる。これは、主波向からずれるに従って平均波高が減少することを示している。

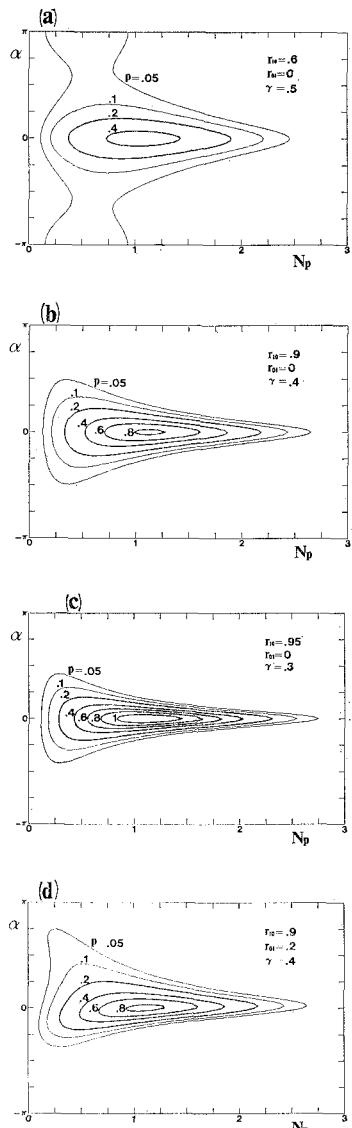


図-2 波高と波向の結合確率密度関数

#### 4. 波峯通過時の水平2成分水粒子速度の結合確率

次に、波峯通過時の水平2成分水粒子速度  $(U_p, V_p)$  の結合確率密度関数を求めてみる。このためには、式(28)を  $N_p$  について  $0 \sim \infty$  で積分すればよいが、この積分には式(33)と同様な関係式が利用できる。その結果

$$p(U_p, V_p) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{A} \exp \left[ -\frac{1}{2A} ((1-r_{01}^2)U_p^2 + 2r_{10}r_{01}U_pV_p + (1-r_{10}^2)V_p^2) \right] + (r_{10}U_p + r_{01}V_p) \exp \left[ -\frac{1}{2}(U_p^2 + V_p^2) \right] \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \text{erf} \left( \frac{r_{10}U_p + r_{01}V_p}{\sqrt{A}} \right) \right) \right] \quad \dots \dots \dots (40)$$

を得る。この場合には、 $r_{10}$  および  $r_{01}$  の値によって  $p(U_p, V_p)$  が完全に決定されることになる。ただし、 $U_p$  および  $V_p$  は異なる基準値  $\sqrt{m_{20}}$  および  $\sqrt{m_{02}}$  によって無次元化されているため、実際の流速に換算した場合の両者の比を求めるためには、補正值として long-crestedness パラメタ  $\gamma$  が必要となる。

図-3は、 $p(U_p, V_p)$  の例を図示したものである。 $r_{10}$  の値が大きくなるほど、波峯通過時の  $U_p$  が負になる確率が減少する様子がわかる。

対称な波浪系、すなわち主波向と平均波向が一致する場合を考え、式(40)において  $r_{01}=0$  とすると、

$$p(U_p, V_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sqrt{1-r_{10}^2} \exp \left[ -\frac{U_p^2}{2(1-r_{10}^2)} \right] + r_{10}U_p \exp \left[ -\frac{U_p^2}{2} \right] \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \text{erf} \left( \frac{r_{10}U_p}{\sqrt{1-r_{10}^2}} \right) \right) \right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{V_p^2}{2} \right] \quad \dots \dots \dots (41)$$

となる。従って、 $U_p$  と  $V_p$  とは独立であることがわかる。そして、それについて rms 値を計算すると、

$$(U_p)_{\text{rms}} = 1 + r_{10}^2 \quad \dots \dots \dots (42)$$

$$(V_p)_{\text{rms}} = 1 \quad \dots \dots \dots (43)$$

となる。

さらに、 $r_{10} \rightarrow 1$  の極限をとると

$$p(U_p, V_p) = U_p \exp \left[ -\frac{U_p^2}{2} \right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{V_p^2}{2} \right] \quad \dots \dots \dots (44)$$

となり、 $U_p$  については Rayleigh 分布、 $V_p$  については正規分布となる。この場合について、波峯通過時の水粒子速度の絶対値の平均値を波向別に求めるため、式(29)

による変数変換を行い、 $p(W, \alpha)$ を表示したところで

$$\bar{W}(\alpha) = \int_0^\infty W p(W, \alpha) dW / \int_0^\infty p(W, \alpha) dW \dots (45)$$

を計算すれば

$$\bar{W}(\alpha) = 2 / \sqrt{\frac{\pi}{2} \left( \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \right)} \dots (46)$$

を得る。

なお、式(40)を導くのに、ここでは包絡線波形を用いる方法<sup>2)</sup>によったが、波峯通過時の諸量の分布を直接求める方法<sup>3)</sup>を用いると狭帯域の仮定をせずに同じ結論を得ることができる。

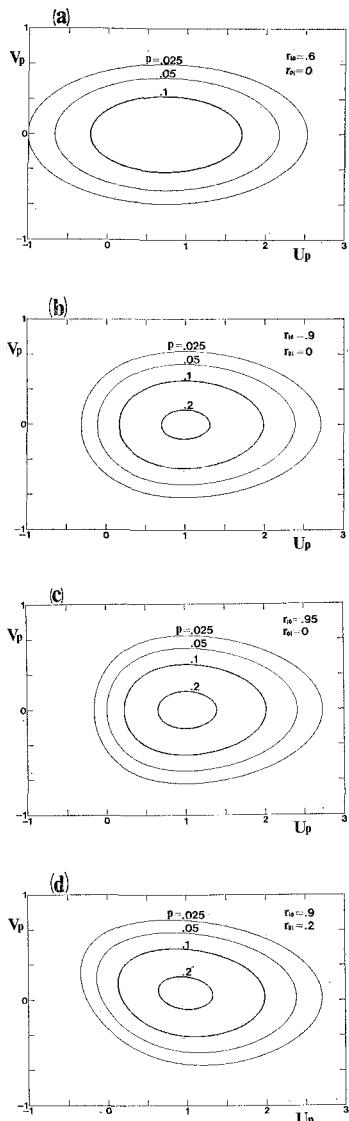


図-3 波峯通過時の水平2成分水粒子速度の確率密度関数

## 5. 現地観測結果との比較

不規則波浪の回折を調査する目的で行った現地観測<sup>4)</sup>

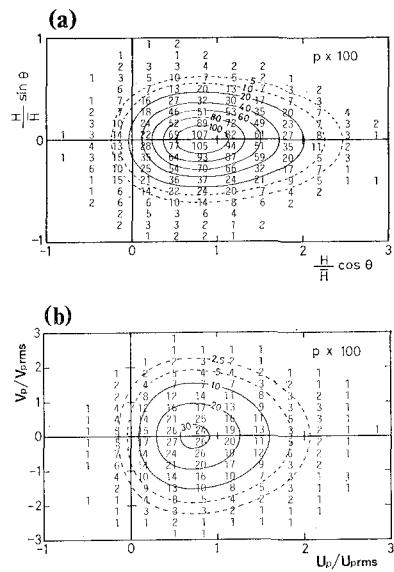


図-4 結合確率密度関数の理論値と測定値との比較

において、入射波の観測用に設置した波高計と流速計から得られたデータを示した結果が図-4(a)および(b)である。(a)では平均波高によって無次元化された波高  $H/\bar{H}$  と波向  $\alpha$  から平面座標に直した表示、また(b)では rms 値によって無次元化した変数による表示となっている。航跡波の影響を除くため、0.05~0.17 Hz のバンドパスフィルターがかけてあるので、結果としてデータを狭帯域にしてしまっていることもあり、理論曲線と非常によく一致している。

## 6. 結論および今後の課題

水面変動と水平2成分水粒子速度を用いて定義される個々の波の波高と波向の結合確率密度関数を導き、現地観測結果と比較した。今後、多くの観測結果と比較するとともに、応用面を考慮して波向の定義や種々の形の結合確率密度の誘導をさらに進めていく必要がある。

なお、この研究には五洋建設株式会社より研究費の助成を受けたことをここに記し、謝意を表する。

## 参考文献

- Rice, S. O.: Mathematical analysis of random noise, Bell Syst. Tech. J., Vol. 23, pp. 282~332, 1944.
- Longuet-Higgins, M. S.: On the statistical distribution of the heights of sea waves, J. Mar. Res., Vol. 11, pp. 245~266, 1952.
- Cartwright, D. E. and M. S. Longuet-Higgins: The statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, Vol. 237, pp. 212~232, 1956.
- 泉宮尊司・礪部雅彦・清水琢三・大下哲則: 回折領域における波浪場の現地観測, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 129~133, 1986.