

グリーン関数を用いた港内波方向スペクトルの計算法

近藤 浩右*・清水 琢三**・山田 耕一***

1. 緒 言

波の入射角を考慮して港内の構造物に作用する波力を評価したり、港内に係留された浮体の動揺を精度良く推定するためには、港内における波高のみならず、波エネルギーの方向分布特性に関する検討が不可欠である。このような検討に対しては平面水槽を用いた水理模型実験が有力であるが、必要とする労力・費用が大きく、また、入射波の方向分散性を反映することが難しいという欠点を有し、精度の高い数値計算手法の確立が望まれている。

規則波の回折現象を取扱う数値計算手法としては、伊藤・谷本^{1),2)}の数値波動解析法や渡辺・丸山³⁾の非定常緩勾配方程式を解く方法等がすでに提案され、比較的単純な地形に対しては浅水・屈折変形をも含めて優れた計算精度を有することが示されているが、複雑な港湾形状への適用が難しいという難点を有する。

一方、波動運動に関する Helmholtz 型方程式の Green 関数表示解を応用して解く方法は、水深変化への対応は不十分であるが、解法の特長上、複雑な境界内の波浪場を比較的容易に取扱うことができる。Gaillard⁴⁾は本手法を方向スペクトルを有する不規則波浪場に適用し、港内の波高、平均波向および方向分散角の分布を求めた。しかしながら、入射波の波向と港内波の波向との間に1対1の写像関係を前提としたため、反射波が発生して多方向から波が到達する場の方向スペクトル推定に関して問題が残されている。本研究では、港内の波を伝播経路別に分離することにより上記問題点の解決を試み、基礎的な港湾形状を対象とするモデル計算により計算手法の妥当性を明らかにする。

2. 港内波方向スペクトルの計算法

2.1 Green 関数法の概要

周波数 f の規則波の入射により、港内では同一周波数を有する定常的な水位の変動が生じる。港内任意地点 O における水面変動の相対複素振幅 ζ は、一定水深領

域内で式 (1) により示される Helmholtz 方程式の解であり、領域境界上 M における法線方向勾配と第2種の Green 関数により式 (2) のように表現される。

$$\nabla^2 \zeta + k^2 \zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\zeta_0 = -\frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)_M G_2(OM) dS \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 、 k は波数、 $i = \sqrt{-1}$ 、 Γ は領域境界、 $\partial/\partial n$ は領域内向きを正とする境界上の法線方向微分、 $G_2(OM)$ は領域内の地点 O と境界上の地点 M に関する第2種の Green 関数を表し、添字 O 、 M はそれぞれの地点に属する量であることを示す。

半平面領域に対して式 (1) に対応する Green 関数は円筒波すなわち0次の第1種 Hankel 関数となる。

$$G_2(OM) = 2H_0^{(1)}(k\gamma), \quad \gamma = \overline{OM} \quad \dots\dots\dots (3)$$

したがって、次式を得る。

$$\zeta_0 = -\frac{i}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)_M H_0^{(1)}(k\gamma) dS \quad \dots\dots\dots (4)$$

領域が多角形で形成されるとき、式 (4) による各辺単位の種分値はその辺 (面) から O 点に到達する波の振幅および位相を表現する。また、 O 点における水面の空間勾配は、式 (4) の両辺を微分し、符号の反転を考慮することにより次式のように導かれる。

$$\nabla \zeta_0 = -\frac{ik}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)_M H_1^{(1)}(k\gamma) \begin{Bmatrix} \cos \mu \\ \sin \mu \end{Bmatrix} dS \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\mu = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$ であり、 $H_1^{(1)}(k\gamma)$ は1次の第1種 Hankel 関数を表す。

O 点の実際の波は、規則波が入射する場合でも一般に港内では多方向からの入・反射波の合成であるが、これを波高 $2a$ 、位相 θ の単一代表波で置換え、実効波数を k_e 、局所的な同位相線に直角な方向を代表波向 α_0 と定義すると、以下の関係式が成り立つ。

$$\zeta_0 = a \exp(i\theta) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\theta = xk_e \cos \alpha_0 + yk_e \sin \alpha_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = k_e \cos \alpha_0 = I_m \left\{ \frac{1}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = k_e \sin \alpha_0 = I_m \left\{ \frac{1}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

* 正会員 工修 五洋建設(株) 技術部技術企画課

** 正会員 工修 五洋建設(株) 土木設計部

*** 正会員 五洋建設(株) 土木設計部

以上の議論では $(\partial\zeta/\partial n)_M$ が未知数のままであるが、これらは以下の境界条件により決定される。

① 入波境界

港口部あるいは計算領域の入射部で与える条件であり、回折理論の解析解を用いて法線方向勾配として決定する。

② 反射境界

構造物の反射率を r とすると、入射波 ζ_I と反射波 ζ_R は $\zeta_R = r\zeta_I$ の関係にある。したがって、水面の法線方向勾配に関しては 図-1 (a) の座標系において次式が成立する。

$$\partial\zeta_R/\partial n_1 = -r \cdot \partial\zeta_I/\partial n_1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

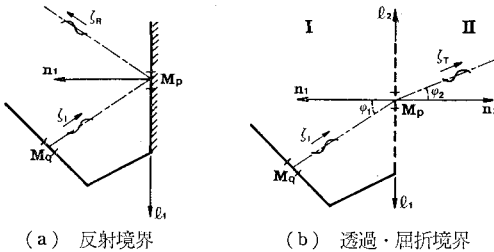


図-1 座標系の定義

③ 透過・屈折境界

隣接する領域 I, II の水深を h_1, h_2 , 屈折係数を K_r , 透過係数を K_T とすると、入射波 ζ_I と透過波 ζ_T は $\zeta_T = K_r K_T \zeta_I$ で関係づけられる。したがって、図-1 (b) の座標系において次式が導かれる。

$$\frac{\partial\zeta_T}{\partial n_2} = -K_r K_T \frac{k_2 \cos \phi_2}{k_1 \cos \phi_1} \cdot \frac{\partial\zeta_I}{\partial n_1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

さらに、 ϕ_1 と ϕ_2 の関係および K_r について Snell の法則を利用すれば、群速度 C_θ を用いて式 (11) は次式のように表現される。

$$\frac{\partial\zeta_T}{\partial n_2} = -K_T \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{C_{\theta 1} \cos \phi_2}{C_{\theta 2} \cos \phi_1} \right)^{1/2} \cdot \frac{\partial\zeta_I}{\partial n_1} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (10) および式 (12) の右辺 $\partial\zeta_I/\partial n_1$ の値は、先の式 (5) により領域境界上他地点の ζ の法線方向勾配と関係づけられる。実際の計算では必要に応じて港内をいくつかの凸多角形領域に分割した後、入波境界の $\partial\zeta/\partial n$ を与えて式 (5) により各境界要素上で $\partial\zeta/\partial n$ を計算し、式 (10) または式 (12) により領域内に新たに発生する波および隣接領域に伝播する波を計算する。これを順次、全領域について行う。この過程で新たな波が発生すると、式 (5) の関係が境界要素間で変化するので、再び最初のステップに戻り、各領域で式 (5) の関係が収束するまで繰返し計算を実行する。最後に式 (4), (5), (8), (9) を用いて各地点の波高ならびに波向が計算される。

2.2 不規則波浪場への適用

入射波の方向スペクトルを $\bar{D}(f, \bar{\theta})$ 、港内波の周波数

スペクトルおよび方向スペクトルを $S(f)$ および $D(f, \theta)$ と置く。ここに、 f は周波数、 θ は波向を表し、 $\sim$ は入射波に関する量であることを意味する。周波数間におけるエネルギーの移行が無ければ、 $S(f)$ は次式により表される。

$$S(f) = \int_0^{2\pi} |\zeta(\mathbf{x}, f, \bar{\theta})|^2 \cdot \bar{D}(f, \bar{\theta}) d\bar{\theta} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $\zeta(\mathbf{x}, f, \bar{\theta})$ は港内地点 $\mathbf{x}$ における水面変動の相対複素振幅であり、2.1 の方法により求められる。

さらに、 $\bar{\theta}$ と θ の間に連続かつ1対1の写像関係が成り立つならば、 $\bar{D}(f, \bar{\theta})$ と $D(f, \theta)$ は次式により関係づけられる⁵⁾。

$$D(f, \theta) \frac{\partial\theta}{\partial\bar{\theta}} = |\zeta(\mathbf{x}, f, \bar{\theta})|^2 \cdot \bar{D}(f, \bar{\theta}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

港内に反射波が発生する場合には、たとえば図-2 に示すように同一地点に対して複数の波の伝播経路が存在するため、1つの $\bar{\theta}$ に対して複数の θ が対応し、上式は成立しない。しかしこの場合

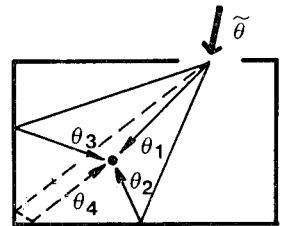


図-2 波の伝播経路

にも、伝播経路の異なる個々の θ_i ($i=1, 2, \dots$) に対応して新たに $D_i(f, \theta_i)$ を定義すれば、各々が上式と同様の関係により $\bar{D}(f, \bar{\theta})$ と結びつけられる。すなわち、

$$D_i(f, \theta_i) \frac{\partial\theta_i}{\partial\bar{\theta}} = |\zeta_i(\mathbf{x}, f, \bar{\theta})|^2 \cdot \bar{D}(f, \bar{\theta}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

実際の港内波の方向スペクトルは

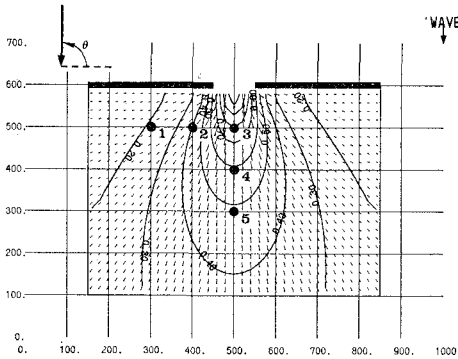
$$D(f, \theta) = \sum_i D_i(f, \theta_i) \quad \dots\dots\dots (16)$$

として求められる。

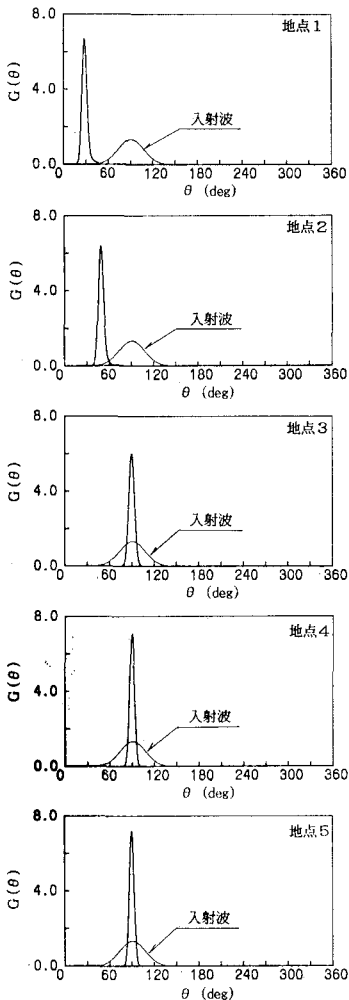
先述のように、Green 関数法では、港内任意地点の水面変動が港内領域境界上における $\partial\zeta/\partial n$ を用いた周回積分により算出されるが、領域が多角形で近似されるとき、各辺単位の積分値はその辺(面)から到達する波の振幅および位相を表現する。したがって、複数の反射面が存在する場合には、単一反射面上の積分値には1次反射波のみならず、より高次の反射波の影響が含まれることとなる。これを分離するためには、式 (5) により境界上の $\partial\zeta/\partial n$ を計算する際にも積分を各辺単位で行い、それぞれを別個に扱わなければならない。しかし、通常の港湾では、波エネルギーの方向分布は主に入射・回折波とその1次反射波により決定され、2次以降の反射波の寄与は少いのが一般的である。そこで本研究では、ある地点への波の伝播経路の数は領域を構成する $\partial\zeta/\partial n$ が0でない辺の数に一致すると仮定し、以下の検討を行った。

3. モデル計算結果

図-3 (a), (b) は開口防波堤背後における方向スペクトルの計算結果を示したものであり, (a) は波高比・



(a) 波高比・波向分布



(b) 代表地点の方向分布関数

図-3 開口防波堤背後における方向スペクトルの計算結果 ($S=25$)

波向分布を, (b) は (a) 中に示す代表地点の波エネルギーの方向分布関数を示している。入射波は次式で与えられる光易型方向関数 ($S=25$) を有する波長 $L=100$ m の単一周波数方向分散波である。

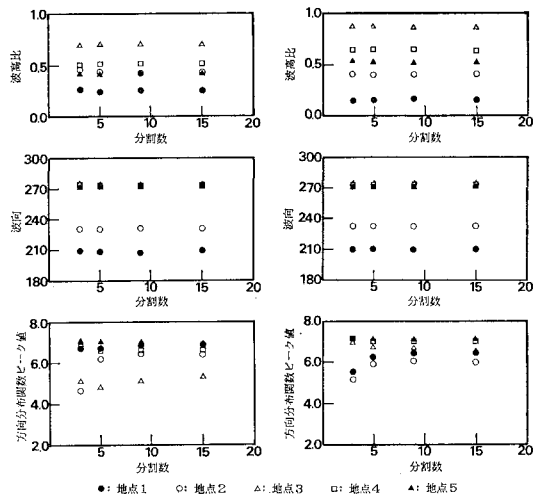
$$\tilde{D}(\theta) = \left[\cos \left(\frac{\theta - \theta_p}{2} \right) \right]^{2S}, \quad \theta_p: \text{卓越波向} \quad \dots\dots\dots (17)$$

開口幅と波長の比率 B/L は 1.0 で, 港内は一様水深としている。入射波の角度分割は等エネルギーの 9 分割で, 港内の方向分布関数は計算結果を平滑化して示した。境界要素長 ϵ は $L/10$ である。いずれの地点の波も入射波に比べてかなり高い方向集中度が算出されている。地点 1~3 または地点 3~5 の比較から解るように, 開口部から離れるに従う波向の変化傾向および方向集中度の増加傾向は良好に再現されている。

入射波の角度分割数が計算精度に及ぼす影響を調べるため, $S=10$ および 75 の入射波を対象に, 等エネルギーの角度分割数を 3~15 に変化させ, 図-3 と同じく開口防波堤背後, 代表 5 地点の波高, 波向, 方向分布関数ピーク値を整理したものが 図-4 (a), (b) である。波高比と波向に関しては, 波向分割数が 3 以上であれば計算結果にさほど変化は無いが, 方向分布関数のピーク値については, $S=10$ の場合地点 2 で, $S=75$ の場合地点 1 と 2 で角度分割数が 3 のとき低下傾向が現れており, 少なくとも 5 以上の分割数で計算する必要がある。

また, 開口部に近い地点 3 を除くと, 各地点の波向および方向分布関数ピーク値はほとんど S の値に依存せず, S の変化は主として波高比に強く影響することが解る。

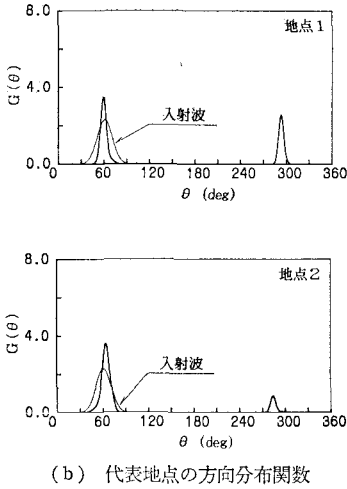
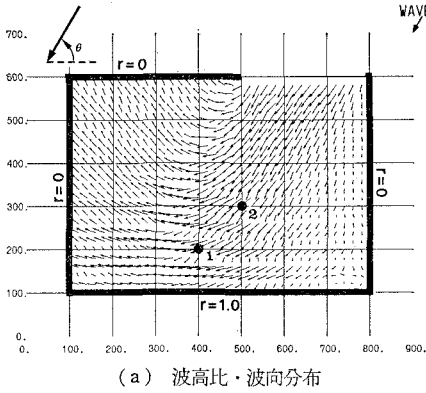
図-5 (a), (b) は完全反射面を有する矩形領域に対



(a) $S=10$

(b) $S=75$

図-4 波高比・波向・方向分布関数ピーク値の計算結果に対する角度分割数の影響

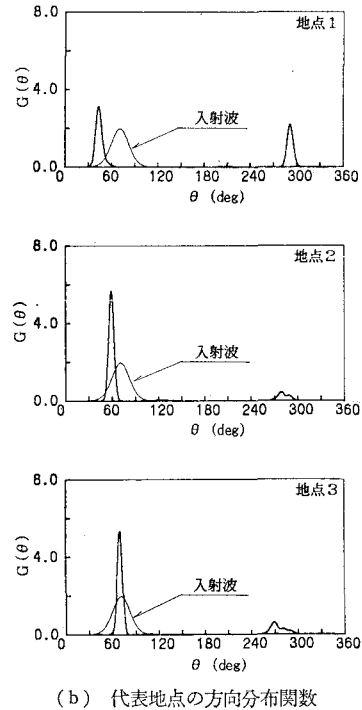
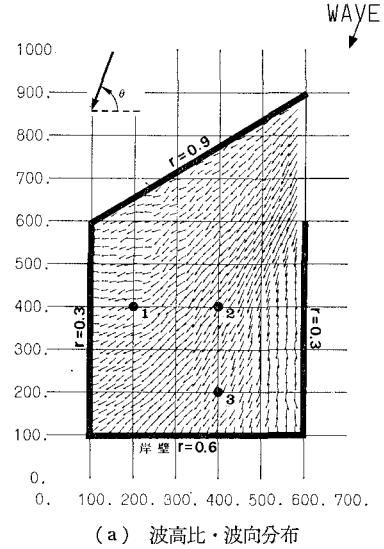


図一5 反射面を有する矩形領域内の方向スペクトル計算結果 ($S=75$)

する計算結果であり、条件は図一3のケースと同様であるが $S=75$ を採用した。(a)を見ると、入・反射波の位相干渉部の節に近い比較的波高の小さなところで一部波向が不安定となるが、左上遮蔽部では反射波の、右側遮蔽部では回折波の存在が波向に反映し、また、左下の入・反射波共存場では両者の合成方向に波向が合致しており、ほぼ妥当な結果を与えている。(b)を見ると、いずれの地点も2種類の波の伝播経路に応じて 60° および 300° 付近の2ヶ所にエネルギー・ピークが算出されている。地点1は入・反射波のエネルギーがほぼ等しいのに対し、地点2では一旦大きく回折した波が反射波として到達するため、明らかに入射波のエネルギーが卓越しており、入射波向と領域形状および計算地点の位置関係より推定される傾向を良好に再現している。

図一6(a),(b)は実港湾形状を想定した場合の計算結果であり、この場合は周波数分散性も有する入射波を対象とし、周波数別に S の値を次式で与えた。

$$S = \begin{cases} S_{\max}(f/f_p)^5 & f \leq f_p \\ S_{\max}(f/f_p)^{-2.5} & f > f_p \end{cases} \quad \dots\dots\dots(18)$$



図一6 実港湾形状を想定したモデル計算結果 ($h=17$ m, $T_{1/3}=9$ s, $S_{\max}=75$)

ここに、 f_p はピーク周波数を表す。周波数分割数は5、境界要素長 ε は5 mである。周波数分散性を考慮した結果、位相干渉領域がなくなり、先の図一5(a)に比べて港内の波向は平滑化され安定した結果を示す。方向分布関数は周波数積分値を示しているが、地点1では回折波と同程度に岸壁からの反射波が存在する様子が理解される。地点2、地点3とも 300° 付近の反射波に対応するエネルギーの方向集中度が低い³⁾、これは各周

波数別に方向分布関数を見ると、反射波エネルギー・ピークの方が若干変化するという計算結果に依るもので、必ずしも実現象を捕えているとは限らない。

4. 現地観測結果との比較

大下ら⁶⁾により実施された実港湾における港口部と港内の波浪に関する同時観測データを対象として計算を行った。計算時間の制約上、入射波方向スペクトルを入力として港内の方向スペクトルを求めることが難しかったため、ここでは波高と波向の対応データのみを対象としている。ただし、入射波の方向スペクトルは Bretschneider-光易型周波数スペクトルと光易型方向関数の組合せにより表示されるものと仮定した。また、入射波の観測地点から港内波の観測地点まで、水深は 13 m から 8 m へと変化しているが、これも 10 m の一様水深として扱った。観測期間内の平均的な波浪条件と考えられる有義波周期 $T_{1/3}=7$ s, $S_{max}=25$ を入力値とし、波向を変えて計算した結果を実測値に重ね、図-7 (a), (b) に示

す。NW 付近の入射角に対し、波高比の計算値が 0.1 程度高目となっているが、当時、主防波堤延長上約 270 m にわたり捨石マウンドが先行的に施工されていた状況を考慮すれば、波高比・波向とも計算と実測値はおおむね良好な一致を示していると考えられる。このほか $S_{max}=10$ あるいは 75 とした計算も行ったが、実測値との対応は $S_{max}=25$ よりも悪かった。

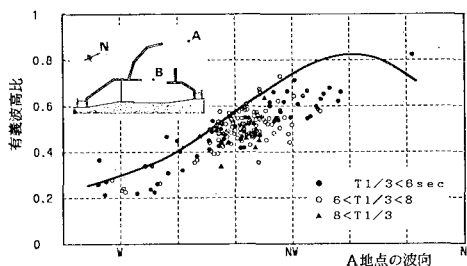
5. 結 語

Green 関数を用いた港内波動場の解析手法を基礎とし、伝播経路別に分離して港内波を取扱うことにより、反射域も含めて港内波方向スペクトルを推定し得る数値解析手法を示した。本手法は港内における波向変化や方向集中度の増大など回折領域における方向スペクトル変形の基本的傾向も再現しており、実用上十分な精度を有しているものと考えられる。今後は同一反射面からの 1 次反射波とより高次の反射波を分離し、多重反射系についても推定精度の高い方向スペクトルが得られるよう計算手法を改良するとともに、現地実測方向スペクトルを用いて本手法の計算精度を実証することが望まれる。

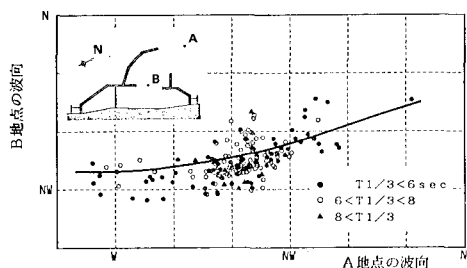
本研究を進めるに当たり、電力中央研究所の鹿島遼一氏と丸山康樹氏より数々の貴重な助言をいただいた。ここに記し深甚なる謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 伊藤善行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用——構造物周辺の波——，第 18 回海岸工学講演会論文集，pp. 67～70, 1971.
- 2) 伊藤善行・谷本勝利：波向線交差領域での波の屈折——数値波動解析法の応用 (2)——，第 19 回海岸工学講演会論文集，pp. 325～329, 1972.
- 3) 渡辺 晃・丸山康樹：屈折・回折・碎波減衰を含む波浪場の数値解析法，第 31 回海岸工学講演会論文集，pp. 103～107, 1984.
- 4) Gaillard, P.: Combined refraction-diffraction calculations with directional wave spectra, Proc. 19th Int. Conf. Coastal Eng., Houston, pp. 1040～1056, 1984.
- 5) 泉宮尊司：屈折・回折による方向スペクトルの変形計算法，第 32 回海岸工学講演会論文集，pp. 169～173, 1985.
- 6) 大下哲則・近藤浩右・関本恒浩・今井澄雄・中村光宏：港内における方向スペクトルの観測と反射率の推定，第 34 回海岸工学講演会論文集，pp. 121～125, 1987.



(a) 入射波向と波高比の関係



(b) 入射波向と港内の波向の関係

図-7 現地観測結果との比較 (開口幅: 約 500 m, 計算値は $T_{1/3}=7$ s, $S_{max}=25$ に対するもの)