

波・流れ共存場に拡張した非定常緩勾配方程式による 波動場の数値計算

大 中 晋*・渡 辺 晃**・磯 部 雅 彦***

1. はじめに

近年、浅海域における波浪変形計算を対象とした研究が精力的に行われている。波の屈折、回折、反射を同時に取り扱うことのできる方程式として、緩勾配方程式がある。さらに渡辺・丸山¹⁾はこれを数値的に解き易くした非定常緩勾配方程式を導いた。この中では砕波による波の減衰も考慮され、より一般性のある方程式となっている。ただし、これらの方程式には流れが波動場に及ぼす影響はまったく無視されている。しかし、海浜流が問題となる波の場や河口付近の波・流れ共存場においては、流れの影響を無視することはできない。

一般的な流れの場における波浪変形を扱ったものに、Noda²⁾によるモデルがある。しかしこのモデルでは波浪場をエネルギー方程式を用いて評価しているために、回折、反射を含む重合場に対して適用することはできない。

水深変化による屈折、構造物等による回折、反射、さらに流れによる波の変形を同時に取り扱うことのできる方程式として、Booi³⁾、Liu⁴⁾、Kirby⁵⁾らによるものがある。これらの方程式は緩勾配方程式と同様に、時間項を分離した速度ポテンシャルに対する楕円型方程式として表されている。これらを実際に数値計算する場合、方程式系が数値的に解きにくい形であること、また流れの問題を取り扱う際に必ず問題となる波数ベクトルの取り扱いの困難さゆえ、放物型方程式に簡略化し、波向が一義的に決まる単一進行波の波動場に限定して計算を行っている。しかし放物型方程式への変換により、反射波が考慮できなくなる上に、計算のときに用いる座標系と実際の波の進行方向が異なると精度が落ちることが知られている。

海浜流場のような場合、流れの向きが局所的に変化するため、それに伴い波向も局所的に変化すると考えられる。したがってこのような場合には、放物型近似をすることなしに解くことが望ましい。そこで、本研究ではこ

れらの波の変形をすべて考慮できる波浪計算手法を確立し、その妥当性を検討することを目的とする。

2. 基礎方程式

流れによる波の変形に、水深変化や構造物等による屈折、回折、反射を含めて取り扱うためには、運動方程式のレベルで議論しなければならない。非定常緩勾配方程式¹⁾は、水面変動 ζ と線流量ベクトル Q の2変数に対する1階の連立偏微分方程式であるため、数値的に解き易い形となっている。また、砕波減衰項や任意反射率境界の導入が、2階の偏微分方程式で表されるもとの緩勾配方程式に比べて容易である。このようなことから、非定常緩勾配方程式と同様に ζ と Q で表されるような波・流れ共存場における方程式を導く。

非定常緩勾配方程式を誘導する過程では、まず線流量ベクトル Q の定義に用いる水平波動流速の鉛直分布形を仮定する。これを用いることにより、複素速度ポテンシャル ϕ に対する緩勾配方程式を、 ζ 、 Q に関する2つの式に分離している。本研究で誘導する方程式も同様の手順で導くことにする。

まず、時間項まで含めた速度ポテンシャル Φ を

$$\Phi(x, z, t) = \phi(x, t)f(z) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

と表示し、線流量ベクトル Q を次式で定義する。

$$Q = \int_{-d}^0 \nabla \Phi dz \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここで式(1)中の鉛直分布関数 $f(z)$ として、海底勾配が0次のオーダーで流れがない場合の微小振幅波理論を満たす解として

$$f(z) = \cosh k(z+d)/\cosh kd \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

と仮定する。ここで k は波数、 d は水深である。式(1)、(3)を式(2)に代入し、 z 方向に積分することにより次式が得られる。

$$Q = C^2 \nabla \phi / g \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

ただし C は波速を表す。一方、流れを含む場合の自由表面での境界条件は、 U を流れの流速ベクトルとして次式で与えられる。

$$\zeta = -(1/g) D\phi/Dt \quad (D/Dt = \partial/\partial t + U \cdot \nabla) \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

* 正会員 工修 東亜建設工業(株)設計部

** 正会員 工博 東京大学工学部土木工科学教授

*** 正会員 工博 東京大学工学部土木工科学助教授

式(4), (5)を表面での速度ポテンシャル ϕ について書き換えると,

$$D\phi/Dt = -g\zeta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\nabla\phi = (g/C^2)Q \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。次に速度ポテンシャル ϕ を

$$\phi = \hat{\phi}(x)e^{i\chi} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\chi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t, \quad \omega = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \quad \dots\dots\dots (9)$$

とおく。ここで χ は位相関数を表し, $\mathbf{k}$ は波数ベクトル, ω は固定座標から見た波の周波数, σ は $\mathbf{U}$ で移動する座標系から見た周波数を表す。ここで位相の変化率に比べて振幅の変化率は十分小さいとし, $\nabla\hat{\phi} \approx 0$ を仮定すると, 式(8), (9)より

$$D\phi/Dt = -i\sigma\phi \quad \dots\dots\dots (10)$$

と近似できる。上式と式(6)より

$$\phi = (-ig/\sigma)\zeta \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。これを式(4)に代入し, t で微分することにより, 運動方程式に相当する式として, 次式が得られる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \omega C^2 \nabla \left(\frac{\zeta}{\sigma} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

次に流れを含む緩勾配方程式として, 1. で述べたように3つのモデルが提案されている。これらの中で流れが存在する場合の wave action 保存則を厳密に満たす方程式は, Kirby⁵⁾ による式で次のように表される。

$$\frac{D^2\phi}{Dt^2} + (\nabla \cdot \mathbf{U}) \frac{D\phi}{Dt} - \nabla \cdot (\mathbf{C} \mathbf{C}_g \nabla \phi) + (\sigma^2 - k^2 \mathbf{C} \mathbf{C}_g) = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし, $\mathbf{C}$ は波速ベクトル, $\mathbf{C}_g$ は群速度ベクトルを表す。式(13)を用いて連続式に相当する方程式を導くために, 式(6), (7), (10)を上式に代入すると次式が得られる。

$$a(\partial\zeta/\partial t) + \nabla \cdot (\mathbf{U}\zeta) + \nabla \cdot (\mathbf{n}Q) = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに

$$a = 1 + (\sigma/\omega)(n-1), \quad n = \mathbf{C}_g/\mathbf{C} \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(12), (14)が本研究で提案する, 流れを考慮した非定常緩勾配方程式である。なお, 式(10)を導く際に $\nabla\hat{\phi} \approx 0$ の仮定を用いた。この仮定を用いなくとも式(14)に相当する式が導かれるが, 式の中に $\partial\zeta/\partial t$ の項とともに $\partial Q/\partial t$ の項も加わってしまう。したがって数値計算が困難になることが予想されるため, $\nabla\hat{\phi} \approx 0$ の仮定を基に式(14)を導いた。

なお, 式(12), (14)は流れの流速ベクトル $\mathbf{U} = 0$ とすると, 従来の非定常緩勾配方程式に一致する。

3. 数値計算法

式(12), (14)を用いて数値計算を行う方法は, 基本的には従来の非定常緩勾配方程式¹⁾と同様である。すなわち, 空間に関しては, ζ と Q を交互に配置するスタッガードメッシュを用い, 時間的には ζ と Q を交互に計

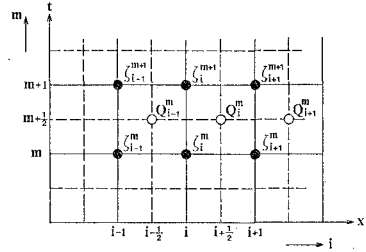


図-1 計算格子の取り方

算する(図-1参照)。しかし式(14)の中に移流項, $\nabla(\mathbf{U}\zeta)$ が含まれるため, ζ を計算する式(14)の差分スキームをどのように決定するかが問題である。この差分スキームを決定するため, 式(12), (14)を一次元に簡略化した後に差分化する。 $Q = Q_i$ とし, 下添字 i を空間を表す点とし, 上添字 m を時間ステップを表すものとする。すなわち, ζ_i^m, Q_i^m を

$$\begin{aligned} \zeta_i^m &= \zeta(i\Delta x, m\Delta t) \\ Q_i^m &= Q\left\{\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

と定義すれば, 式(12), (14)の差分形は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{Q_i^{m+1} - Q_i^m}{\Delta t} + \omega C_i^2 \frac{(\zeta/\sigma)_{i+1}^m - (\zeta/\sigma)_i^m}{\Delta x} &= 0 \quad \dots\dots\dots (17) \\ a_i \frac{\zeta_i^{m+1} - \zeta_i^m}{\Delta t} + \frac{\partial(U\zeta)}{\partial x} + \frac{n_i Q_i^m - n_{i-1} Q_{i-1}^m}{\Delta x} &= 0 \\ (a_i &= 1 + (n_i - 1)\sigma_i/\omega) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式(17)によれば, ζ が計算されれば Q_i^{m+1} が陽的に計算できる。問題は式(18)中の $\partial(U\zeta)/\partial x$ をどのように与えるかである。そこではじめに最も安定でかつ数値誤差を最小におさえることのできる修正 Euler 法を用いて計算を行う。修正 Euler 法は時刻 $(m+1)$ の計算を行う際に, 時刻 $(m+1/2)$ で移流項の空間微分を与え, これを陰的に解いていく方法である。ここで, 空間的に風上差分を用いたもの(表-1の Type I)と中央差分を用いたもの(Type II)とで比較する。試行計算の結果, Type I では数値的な著しい波高の減衰を生じたが, Type II ではこのような減衰は生じなかった。そこで, 式(18)の各項を $(i, m+1/2)$ まわりに Taylor 展開し, 安定解析を行うと, Type I では表-1に示すような数値粘性項が加わっていることがわかる。

次に端部(汀線境界)の取り扱いについて述べる。スキームの検討においては端部の境界条件として透過境界を考える。はじめに従来の方法¹⁾と同様に, 谷本・小舟⁶⁾による方法を用いる。すなわち, 下添字 I を境界上の点を表すすると, 境界上の線流量 Q_I を特性曲線より τ 時間前の1メッシュ内側の Q_{I-1}^m より求める方法である。式(18)中の移流項について, 領域内と同様に中央差分で近似すると, 端部では領域外の値である ζ_{I+1} が

表-1 差分スキーム一覧表

Type	$\partial(U\zeta)/\partial x$ の差分形	格子モデル	数値粘性項	B.C.	端部の $\partial(U\zeta)/\partial x$ の差分形	格子モデル	結果
陰解法 (修正オイラー法)	I $\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_{i+1}^{m+1} - \zeta_i^{m+1}}{\Delta x} + \frac{\zeta_{i+1}^m - \zeta_i^m}{\Delta x} \right)$ $U \geq 0$ $\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_{i+1}^{m+1} - \zeta_{i-1}^{m+1}}{\Delta x} + \frac{\zeta_i^m - \zeta_{i-1}^m}{\Delta x} \right)$ $U < 0$		$-\frac{U}{2} \Delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ "	Q	$\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_I^{m+1} - \zeta_{I-1}^{m+1}}{\Delta x} + \frac{\zeta_I^m - \zeta_{I-1}^m}{\Delta x} \right)$ "		波高の著しい減衰 + 反射波
	II $\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_{i+1}^{m+1} - \zeta_{i-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{\zeta_{i+1}^m - \zeta_{i-1}^m}{2\Delta x} \right)$		—	Q	"	"	反射波
	III "	"	—	ζ	$\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_i^{m+1} - \zeta_{i-1}^{m+1}}{\Delta x} + \frac{\zeta_{i+1}^m - \zeta_i^m}{\Delta x} \right)$		○
陽解法	IV $\frac{\zeta_{i+1}^m - \zeta_i^m}{\Delta x}$ $U \geq 0$ $\frac{\zeta_i^m - \zeta_{i-1}^m}{\Delta x}$ $U < 0$		$-\frac{U}{2} \Delta x$ $\times \left(1 - \frac{U}{a} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)$ $\times \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ $+\frac{U}{2a} \Delta t \frac{\partial^2 (nQx)}{\partial x^2}$ $-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 (nQx)}{\partial x \partial t}$	Q	$\frac{\zeta_I^m - \zeta_{I-1}^{m-1}}{\Delta x}$		波高の著しい減衰 + 反射波
	V $\frac{\zeta_{i+1}^m - \zeta_{i-1}^m}{\Delta x}$		$\frac{U^2}{2a} \Delta t \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ $+\frac{U}{2a} \Delta t \frac{\partial^2 (nQx)}{\partial x^2}$ $-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 (nQx)}{\partial x^2}$	Q	"	"	減衰 + 反射波
	VI $\frac{\zeta_{i+1/2}^{m+1/2} - \zeta_{i-1/2}^{m+1/2}}{\Delta x}$ $\zeta_{i+1/2}^{m+1/2} = (\zeta_i^{m+1} + \zeta_{i+1}^m)/2$ $\zeta_{i-1/2}^{m+1/2} = (\zeta_{i-1}^m + \zeta_i^{m+1})/2$		—	ζ	$\frac{\zeta_{I+1/2}^{m+1/2} - \zeta_{I-1/2}^{m+1/2}}{\Delta x}$		○

(●.....known, ○.....unknown)

必要となる。そこでここでは後退差分により近似するものとする。試行計算の結果、透過境界条件を用いているにもかかわらず、部分反射波が生じた。この原因として次のことが考えられる。すなわち、後退差分を用いると式(18)中の ζ の空間微分は $(I-1/2, m+1/2)$ で評価されるのに対し、 Q の空間微分は $(I, m+1/2)$ で評価されることになる。この空間的な位置の差異が不必要な反射波を生じる原因と考えられる。そこで端部においても ζ と Q の空間微分を同じ点で評価するようにするため、計算領域を Q_I の半格子分外側の ζ_{I+1} まで考える。すなわち、 Q_I で与えられていた境界条件を $(I+1)$ 番目の ζ_{I+1} で与えるようにし、次式より計算する(図-2 参照)。

$$\zeta_{i+1} = \zeta_i^{\tau} \quad (19)$$

ここで τ は時間遅れを表し、次のように与えられる。

$$\tau = \Delta x / (C + U) \quad (20)$$

ただし、 C は流れに相対的な波速である。式(19)、(20)の代わりに Δx_D 内側の、時刻 m の ζ より

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{i+1} &= \zeta_{(I+1) \Delta x - \Delta x_D} \\ \Delta x_D &= (C + U) \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

のように空間的変動から計算しても同様の結果が得られると考えられる。これらの値は計算格子上にないのでその近傍の点での値 ζ_I より内挿して与える。

次に、 I 番目における ζ_I を計算するときの差分形を表

—1 の Type III に示すように斜めにとれば、 ζ と Q の空間微分が、同じ時刻、同じ場所で与えられることになる。試行計算の結果、この方法により反射波の混入を防ぐことができることを確認できた。

ここまではすべて陰解法によるものである。しかし、二次元問題への拡張を考えた場合、陽的に計算できることが望ましい。そこで陽解法についても同様の検討を行った。Type IV, V は移流項をそれぞれ風上差分、中央差分で表し、完全陽形式としたものである。両者とも数

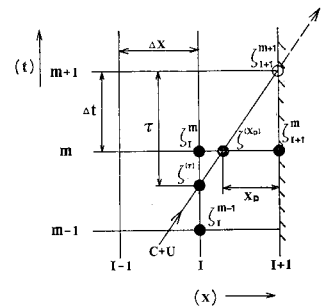


図-2 特性曲線法による透過境界

値的な減衰が見られた。そこで数値粘性項の加わらないスキームを考えたものが、Type VI である。これはADI法の“角度付き微分法”と呼ばれるもので、 $(i, m+1)$ 番目の値を計算する際に必要な $(i-1)$ 番目の値を、直前で計算された $(i-1, m+1)$ 番目の値で逐次置換していく方法である。このスキームを用いて ζ_i^{m+1} を I 番目まで計算する。端部の $(I+1)$ 番目の取り扱いは Type III と同様に、特性曲線より ζ_{I+1}^m を与える。Type VI も ζ と Q の空間微分が同じ点で評価されるため、Type III と同様に正しい解が得られると考えられる。

4. 数値計算結果および考察

本研究のモデルの妥当性を検討するため、簡単な条件下に対する数値計算を行った。差分スキームは Type III と Type VI を用いて行ったが、両者に有意な差が見られなかったため、結果はすべて Type VI の ADI 法によるものを示す。

(1) 波と流れが同方向または逆方向の場合

はじめに、波と流れが同方向または逆方向の一次元問題における計算結果を示す。計算条件等を図-3に示す。まず、従来の非定常緩勾配方程式に移流項のみ加えて計算を行ったが解析解と大きく異なる結果となった。

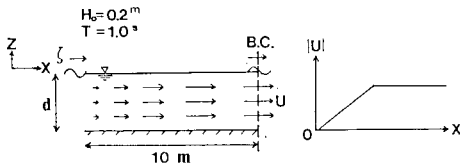


図-3 計算条件

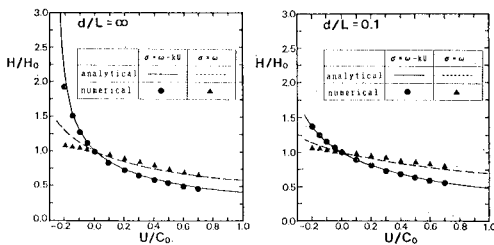


図-4 流れの違いによる波高比の数値解と解析解との比較

次に式(12)、(14)を用いて計算した結果を示す。図-4は流れの違いによる波高比の変化を wave action 保存則より求まる解析解と比較したものである。図中の実線は $\sigma = \omega - kU$ を用いて波速等を計算したときの解析解で、●印がそのときの数値解、点線は $\sigma = \omega$ を用いて計算したときの解析解で、▲印がそのときの数値解である。図中の C_0 、 H_0 はそれぞれ流れがないところでの波速、波高を表している。また、分散関係式の違いによる波速の変化を図-5に示す。図-4、5によれば、流

れによる波、速周波数の変化を考慮したものでは解析解と数値解とよく一致している。一方、流れによる波速等の変化を考えないものは、波高の変化が小さく、流れの問題を扱う際は、分散関係式の波数と流速のスカラー積を無視することはでき

ないことがわかる。図-6には流れの違いによる汀線境界における時間波形を示す。また図-7は定常状態に達した後の岸沖方向の空間波形を示し、図-8はそのときの岸沖方向の波高変化を示している。ここで流れの大きさは沖側で0とし、そこから徐々に増減させているので

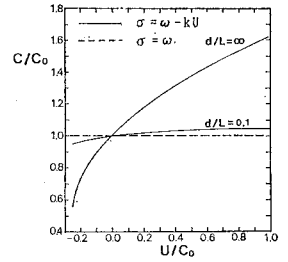


図-5 分散関係式の違いによる波速の変化

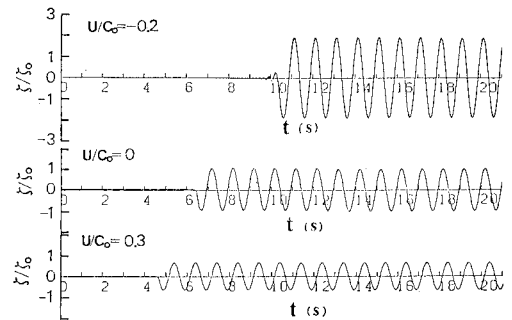


図-6 汀線境界での ζ の時間波形

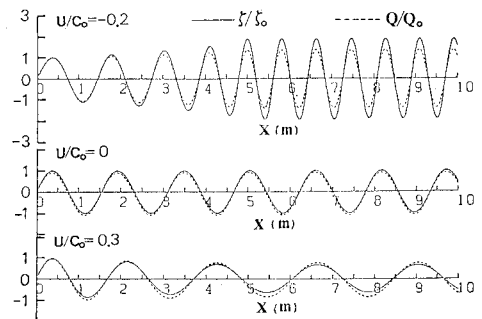


図-7 定常後の岸沖方向空間波形

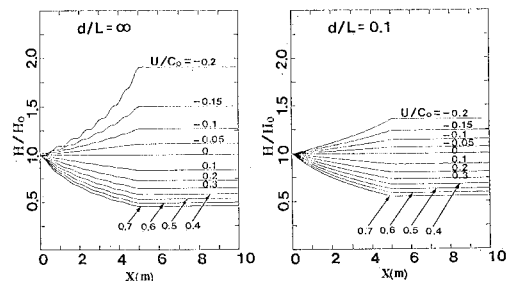


図-8 定常後の岸沖方向波高変化

(図-3), それに伴い波高が増減し, 流れが一定になると波高も一定となっている. また, 端部からの不必要な反射波による波高の振動も, 逆流の場合の波高の高いもので若干生じているものの, ほとんど問題はない.

(2) 流れによる屈折

次に図-9に示すように, x 方向のみ変化する流れに対し, 波が斜めから入射する場合の流れによる屈折計算を行った. ここで流れに相対的な波速等を計算するために必要な波向角として, Longuet-Higgins ら⁷⁾の示した解析解を与える. この波向角を用いて $\sigma = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$ より流れに相対的な波速等を求め, これを用いて, Q ($= (Q_x, Q_y)$) を計算する. 計算された Q_x, Q_y の軌道方向より波向角を計算し, はじめに与えた解析解による波向

角と比較する. 図-10 が, 入射角 $\theta_0 = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ に対する波高変化と屈折解を示し, 図-11 が, $\theta_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ$ に対するものである. 数値解と解析解はよく一致している.

5. 結論および今後の課題

非定常緩勾配方程式に流れによる波の変形を考慮した新たな基礎方程式, 式 (12), (14) を導いた. 簡単な条件で数値計算を行い, 解析解と比較したところ, 両者はよく一致した. また, 流れによる相対的な波速等の変化は無視できないことがわかった. そのために必要な波向角をどのように数値計算内で与えるかが今後の課題である.

最後に, 貴重なご助言をいただいた東京大学工学部泉宮尊司助手, ならびに図面の作成に助力してくれた東京大学大学院生の中西浩和君に感謝の意を表する.

参考文献

- 1) 渡辺 晃・丸山康樹: 屈折・回折・碎波減衰を含む波動場の数値解析法, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 103~107, 1984.
- 2) Noda, E. K., C. J. Sonu, V. C. Rupert and J. I. Collins: Nearshore circulations under sea breeze conditions and wave-current interactions in the surf zone, Tetra Tech. Rept. No. Tc-149-4, 216 p., 1974.
- 3) Booij, N.: Gravity waves on water with non-uniform depth and current, Communications on Hydraulics, No. 81-1, Dept. of Civil Eng., Delft Univ. of Tech., 131 p., 1981.
- 4) Liu, P. L. F.: Wave-current interactions on a slowly varying topography, J. Geophys. Res., Vol. 88, No. C7, pp. 4421~4426, 1983.
- 5) Kirby, J. T.: A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, J. Geophys. Res., Vol. 89, No. C1, pp. 745~747, 1974.
- 6) 谷本勝利・小舟浩治: 数値波動解析法による港内波高分布の計算, 第 22 回海岸工学講演会論文集, pp. 249~253, 1975.
- 7) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, J. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 529~549, 1961.

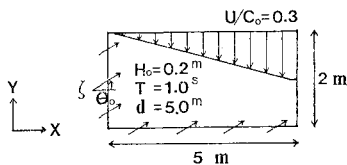


図-9 流れによる屈折の計算条件

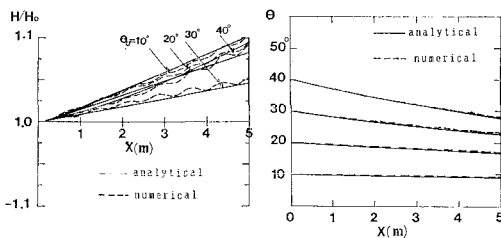


図-10 流れによる屈折に対する波高比と屈折角の変化

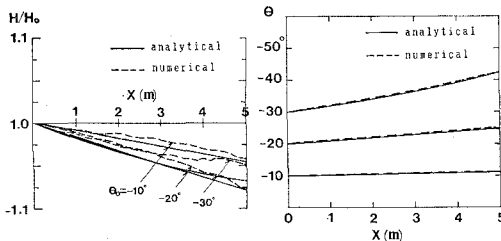


図-11 流れによる屈折に対する波高比と屈折角の変化