

港内波高分布の数値計算における境界条件に関する研究

磯部 雅彦*・佐藤 典之**・杉浦 淳***・泉宮 尊司****

1. 序 論

港内の静穏性を確保することは、港の計画・設計上で最も重要な問題の1つである。特に小規模な港をとると、水深が必ずしも一定ではなく、また入射波の周期が共振周期に近くなる場合もあり得る。このような場合、それらを考慮に入れた静穏度解析が必要となるが、解析に要する労力の問題などのために必ずしも十分に検討が行なわれているとは限らない。従って、より効果的で精度のよい数値計算法の開発が望まれる。

任意形状の港の静穏度計算法としては、ヘルムホルツ方程式を直接解く方法¹⁾、ヘルムホルツ方程式に対するグリーン関数を導入して解く方法²⁾、数値波動解析法^{3),4)}、非定常緩勾配方程式による方法^{5),6)}、緩勾配方程式による方法⁷⁾、高山の方法⁸⁾、3次元グリーン関数による方法⁹⁾等がある。このうち、ヘルムホルツ方程式は一樣水深の場合に得られる基礎方程式であるから水深が変化する場合には、グリーン関数を導入する方法も含めて、適用できない(ただし、領域を分割することにより、グリーン関数法によって水深変化を考慮した解析を行うための工夫がなされている¹⁰⁾)。数値波動解析法と非定常緩勾配方程式法は、任意形状・任意水深分布の港に適用可能であるが、計算時間が長く、また共振現象の解析にはあまり適していない。高山の方法でも共振現象の解析は不可能である。緩勾配方程式は水深変化の影響を含む方程式であり、適切な境界条件を設定し、それを効率的に解くことができるようにすれば、湾水振動の解析も含めた応用範囲の広い計算手法となり得る。

本研究においては、港内波高分布の数値計算の精度と効率を向上させることを目的として、緩勾配方程式を基礎方程式とし、主に境界条件の設定法に関して改良を行った。これにより、いわゆる湾水振動現象および屈折・回折・任意反射率での反射という要素を同時に含む港内波高分布の計算法を提案する。

2. 基礎方程式と境界条件

(1) 基礎方程式

複素水面変動振幅を未知関数として、緩勾配方程式⁷⁾は、

$$\nabla(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

と書ける。ここに、 C は波速、 C_g は群速度、 k は波数であり、 ∇ は水平2方向への微分作用素 ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$) を表す。ここで Radder¹¹⁾ にならい、

$$\phi = \sqrt{CC_g} \psi \quad \dots\dots\dots (2)$$

と変数変換すれば、

$$\nabla(CC_g \nabla \psi) = \sqrt{CC_g} \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 (\sqrt{CC_g}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

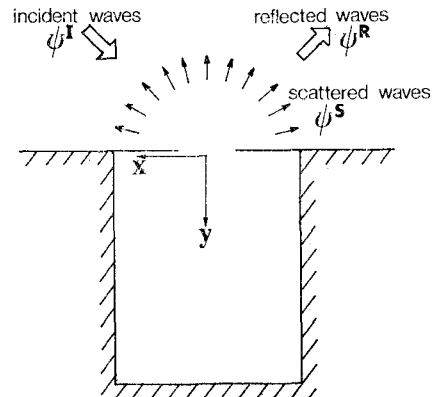
となる。緩勾配方程式を導くために用いた仮定により、海底勾配の2次のオーダーの微小量となる上式の右辺第2項は省略されるので、式(1)は

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

という、ヘルムホルツ方程式に帰着される。

(2) 境界の種類

図—1 は港を模式的に表したものである。楕円型の偏微分方程式(4)を解くためには、計算領域の周辺すべてにおいて境界条件が必要となる。図—1 において、港内の構造物前面での境界は固定境界と呼ばれ、構造物の反射率を与えることになる。また、港口では、外側における解と滑らかに接続するための条件、すなわち開境界条件が必要となる。このために数値計算においては種々



図—1 計算領域と境界の種類

* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科
** 正会員 工修 東亜建設工業(株)設計部
*** 正会員 工修 特許庁
**** 正会員 工博 東京大学助手 工学部土木工学科

の工夫がなされ¹²⁾、計算領域を若干外側に拡張するなどの方法がとられてきた。しかし、ここでは計算量を少なくするために、湾水振動の計算に使われてきたグリーン関数を用いた定式化²⁾を行うことにする。これにより、計算領域を拡張することなく、港内のみを計算領域として数値計算を進めることができる。

(3) 開境界条件

図-1 において、港外側から見ると港口においては、入射波、反射波および散乱波の各成分が重なっていると見なすことができる。それぞれに対応する ϕ の成分を ϕ^I , ϕ^R および ϕ^S とすれば、

$$\phi = \phi^I + \phi^R + \phi^S = \phi^{IR} + \phi^S \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。今、入射波成分の振幅を 1 とし、防波堤外側での反射率を r_0 とすれば、 ϕ^I および ϕ^R は

$$\phi^I = \exp\{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi^R = r_0 \exp\{ik(x \cos \theta - y \sin \theta)\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

と表される。ここに、 θ は入射波の波向であり、図-1 のように x 軸が反射面となるように座標がとられている。

ここで、散乱波成分については、防波堤外側において完全反射に相当する境界条件が成り立つものと仮定する。すなわち、図-1, 2 において、

$$\partial \phi^S / \partial y = 0 \quad (\text{on } \Gamma_1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

である。後に述べる固定境界条件と関連し、散乱波はほぼ防波堤に沿う波であるから、完全反射ではないとしても、式 (8) が近似的に成り立つことになる。図-2 の Γ_2 で表される無限遠での境界条件は放射条件と呼ばれ、港口から外側へ向かう進行波に近づくという条件であって、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi^S}{\partial r} - ik \phi^S \right) = 0 \quad (\text{on } \Gamma_2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

と書ける。

港外側では水深を一定と仮定して波数を一定とすれば、原点を除いてヘルムホルツ方程式 (4) を満足し、境界条件式 (8) および (9) を成立させるグリーン関数 G は、0 次の第 1 種ハンケル関数 H_0 を用いて

$$G(r) = H_0(kr) \quad \dots\dots\dots (10)$$

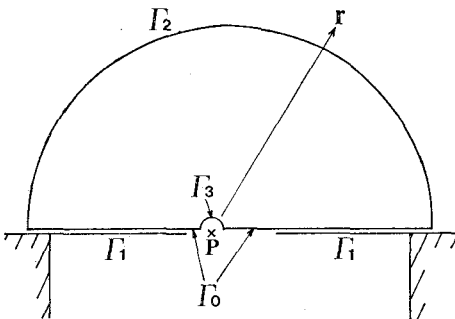


図-2 グリーンの公式の適用領域

と表される。そこで、港口上の任意の点 P に対し、図-2 に表されるような積分領域に対してグリーンの定理を適用すれば、

$$\begin{aligned} & \iint \{ \phi^S L[G] - GL[\phi^S] \} dS \\ &= \int_{\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \left(\phi^S \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi^S}{\partial n} \right) ds \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここに、線形作用素 L は

$$L[f] = \nabla^2 f + k^2 f \quad \dots\dots\dots (12)$$

と定義される。また、 n は境界の外向き法線であり、式 (11) の左辺は面積積分、右辺は線積分を表す。

G および ϕ^S は積分領域内でそれぞれヘルムホルツ方程式を満たすので、式 (11) の左辺は 0 である。また、右辺の積分のうち Γ_1 と Γ_2 に対しては、式 (8) および (9)、ならびにそれらの中の ϕ^S を G にかえたものが成立することにより 0 となる。さらに、 Γ_3 に対しては、 $r \rightarrow 0$ のとき

$$G(r) = H_0(kr) \rightarrow \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) + 1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

γ : オイラー定数 (=0.57722...))

となることを利用すれば、 Γ_3 の半径を無限小としたとき、

$$\int_{\Gamma_3} \left(\phi^S \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi^S}{\partial n} \right) ds = -2i \phi^S(P) \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。これらと、 Γ_0 上では $\partial G / \partial n = 0$ となることを考え合わせれば、式 (11) は

$$\phi^S(P) = \frac{i}{2} \int_{\Gamma_0} H_0(kr) \frac{\partial \phi^S}{\partial n} ds \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。この式に式 (5) を代入して整理すれば、

$$\begin{aligned} \phi(P) - \frac{i}{2} \int_{\Gamma_0} H_0(kr) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \\ = \phi^{IR}(P) - \frac{i}{2} \int_{\Gamma_0} H_0(kr) \frac{\partial \phi^{IR}}{\partial n} ds \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

を得る。 $\phi^{IR} = \phi^I + \phi^R$ が既知であることより、上式は港口における ϕ の相互関係を表す式であり、これが港口での境界条件となる。

(4) 固定境界条件

緩勾配方程式に対する任意反射率での固定境界条件は、波向が境界線に対して直角または 60° であるとして導かれてきた^{13), 3)}。しかし、ここでは任意の波向角に対する任意反射率条件を導く。ただし、一般の波動場では多重反射により多数の成分波が重なり合っていると考えられるが、ここでは入・反射波ともに一成分のみであると仮定する。

図-3 に示すように、壁面に対する入射波の波向を α とし、入射波の振幅を a 、反射率を r とすれば

$$\phi = \phi^I + \phi^R \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\phi^I = a \exp\{ik(s \cos \alpha + n \sin \alpha)\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\phi^R = ra \exp\{ik(s \cos \alpha - n \sin \alpha)\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

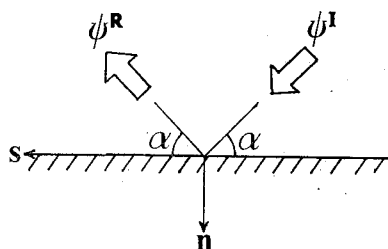


図-3 固定境界条件

となる。これより、

$$\phi|_{n,s=0} = (1+r)\alpha \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{n,s=0} = (ik \sin \alpha)(1-r)\alpha \quad (21)$$

であるから、 ϕ と $\partial \phi / \partial n$ の関係式として

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1-r}{1+r} (ik \sin \alpha) \phi \quad (\text{壁面}) \quad (22)$$

を得る。

境界条件式 (22) において、波向角 α は未知であるから、数値計算においては繰り返し計算を必要とする。式 (17)~(19) より、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = -(k \sin \alpha)^2 \phi \quad (23)$$

であるから、

$$k \sin \alpha = \sqrt{-\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} / \phi} \quad (24)$$

となる。これにより、繰り返しの各段階における解を用いて、次の段階で用いるべき $k \sin \alpha$ の値を計算することができる。

3. 数値計算の方法

数値計算では、第1段階として、図-1 に示されるような単純な港のみを取り扱った。

x 方向および y 方向の格子間隔を Δx および Δy とすれば、基礎方程式 (4) の差分式は、

$$\frac{\phi_{l+1,m} - 2\phi_{l,m} + \phi_{l-1,m}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{l,m+1} - 2\phi_{l,m} + \phi_{l,m-1}}{(\Delta y)^2} + k_{l,m}^2 \phi_{l,m} = 0 \quad (25)$$

である。開境界条件式 (16) については、港口を結ぶ線上で $m=1$ 、その外側で $m=0$ 、内側で $m=2$ とすれば、

$$\phi_{l,1} - \sum_{l'=1}^{l_0} A_{l,l'} (\phi_{l',2} - \phi_{l',0}) = \phi_{l,1}^{RN} - 2\Delta y \sum_{l'=1}^{l_0} A_{l,l'} \phi_{l',1}^{RN} \quad (26)$$

ここに、

$$A_{l,l'} = \begin{cases} \frac{i}{4} \frac{\Delta s}{\Delta y} H_0(|l-l'| k \Delta x) & (l \neq l') \\ \left[\frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{k \Delta x}{4} - 0.42278 \right) \right] \frac{\Delta s}{\Delta y} & (l = l') \end{cases} \quad (27)$$

ただし、 $l' \neq 1, l_0$ のとき $\Delta s = \Delta x$ であり、 $l' = 1$ または l_0 のとき $\Delta s = \Delta x/2$ とする。また、

$$\phi_{l,1}^{RN} = (1+r_0) \exp(ik \Delta x \cos \theta) \quad (28)$$

$$\phi_{l,1}^{RN} = (1-r_0)(ik \sin \theta) \exp(ik \Delta x \cos \theta) \quad (29)$$

である。式 (26) の両辺に $A_{l,l'}$ の逆行列 $A_{l,l'}^{-1}$ を乗じて整理すれば、

$$\phi_{l',0} = \phi_{l',2} - \sum_{l'=1}^{l_0} A_{l',l'}^{-1} \phi_{l',1} - 2\Delta y \phi_{l',1}^{RN} + \sum_{l'=1}^{l_0} A_{l',l'}^{-1} \phi_{l',1}^{RN} \quad (30)$$

となる。次に、固定境界条件に対しては、たとえば湾奥の場合、まず式 (24) より

$$(k \sin \alpha)_{l,m} = \sqrt{-\frac{\phi_{l,m+1} - 2\phi_{l,m} + \phi_{l,m-1}}{(\Delta y)^2 \phi_{l,m}}} \quad (31)$$

であり、これを用いて式 (22) は

$$\phi_{l,m+1} = \phi_{l,m-1} + 2\Delta y \frac{1-r}{1+r} (ik \sin \alpha)_{l,m} \phi_{l,m} \quad (32)$$

となる。他の固定境界に対しても同様である。

数値計算においては、境界上および内部の格子点における ϕ の値を未知数とする。この場合、基礎方程式の差分式 (25) を境界上に適用すると、領域外の点における ϕ の値も含むことになるが、これらは式 (30) および (32) を用いて消去することができる。これによってできるマトリックスのバンド幅は、 x 方向の分割数と等しくなり、比較的容易に解くことができる。

繰り返し計算の第1ステップでは、固定境界における波向角 α を 60° と仮におき、基礎方程式 (25) を境界条件式 (30) および (32) を考慮して解く。そこで、式 (31) を用いて次の段階での波向角を求め、その波向角を使って計算をやり直す。そして、解が収束したところで計算を完了する。

4. 計算結果および考察

(1) 反射率の影響

図-4 は任意反射率を与える境界条件式 (22) に含まれる係数 $\{(1-r)/(1+r)\} \sin \alpha$ の、波向 α による変化を示したものである。従来の方法によれば $\alpha = 90^\circ$ または 60° ととっていたのであるが、 r が小さい場合にこの方法による誤差が大きくなるのがわかる。

種々の範囲の固定境界に対する反射率を7段階に変化させ、湾長波長比 l/L と入射波高に対する湾奥隅の波高 H/H_i との関係を調べた。

反射率 r を1とした場合には、式 (22) の右辺は波向 α に無関係に0となるので、繰り返し計算を必要としない。この場合、合田⁽⁴⁾による計算結果とよく一致した。その他では、通常2~3回の繰り返しにより、波高比の平均相対精度を1%以内とすることができた。た

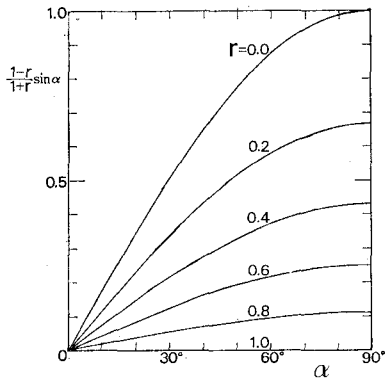


図-4 波向による任意反射率境界条件の係数の変化

だし、反射率を0.3のように小さくした場合には、解が振動して収束しない場合も見られた。このような場合には、繰り返し計算における $k \sin \alpha$ の修正量を $1/2$ あるいは $1/3$ に下げることによって収束を改良した。

図-5 は港内の固定境界全体の反射率を変化させた場合の、周波数応答曲線の違いを示したものである。実線は波向角 α に関する繰り返し計算を行った結果であり、点線は $\alpha=60^\circ$ と一定値に仮定した場合の結果である。従来の方法では、波高比を過小に計算していることになるのがわかる。これは、図-4 において、 $\alpha=60^\circ$ として与えるべき反射率から縦軸の値を与えた場合に、もし実際の波向が $\alpha < 60^\circ$ であると、それに対応する真の反射率はこれより小さなものとなることから理解される。

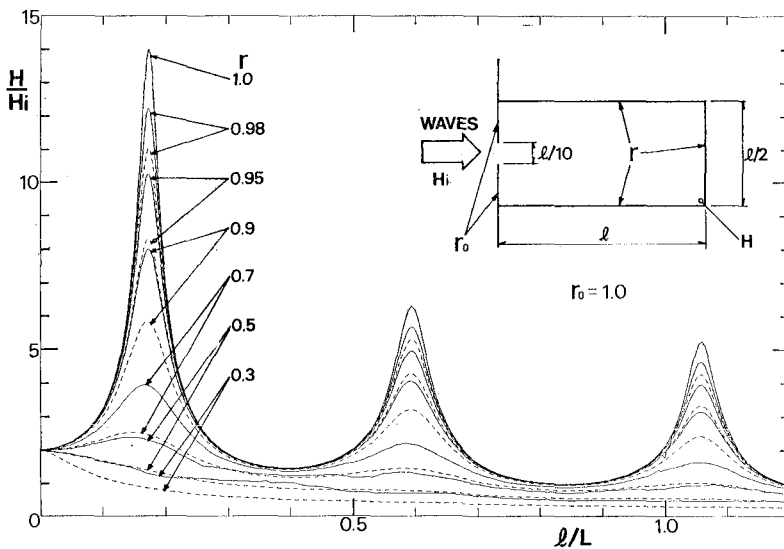


図-5 周波数応答曲線の計算例（港内全体の反射率を変化させた場合）

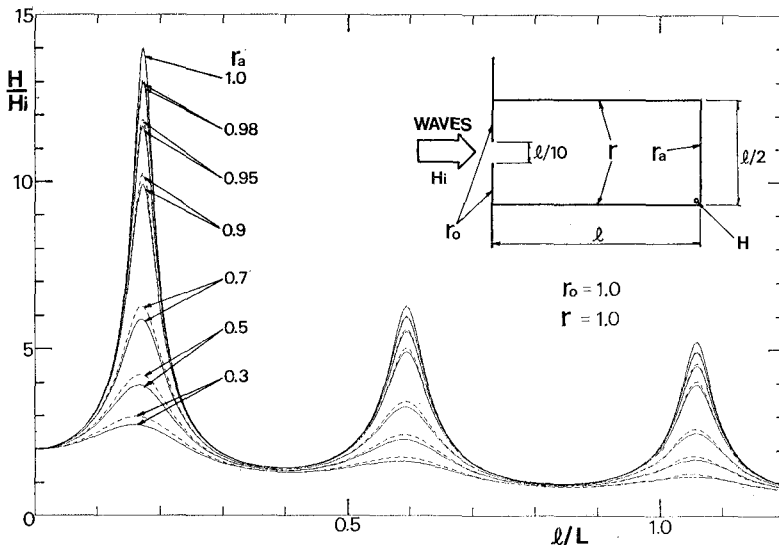


図-6 周波数応答曲線の計算例（港の奥の反射率を変化させた場合）

図-6 は、港の奥の一边のみについて反射率を変化させた場合の計算結果である。当然のことながら、図-5 の場合に比べて反射率の低下による波高減少の割合が小さくなる。しかし、共振点付近での波高増幅率の低減に対しては効果が大きいことがわかる。

図-7 は外海側の反射率 r_0 を変化させた場合の周波数応答曲線を示している。 r_0 の低下により、港口付近波高が低下するために、港内の波高も低下することがわかる。

(2) 実測値との比較

1/15 斜面上に図-8 に示す模型を設置し、周波数応答曲線および港内波高分布を求める実験を行った。港口での水深は 16.8 cm、奥では 8.8 cm である。また、外海側での反射率を下げるため、図中の太線の位置から沖側 20 cm にわたって砂利入りのかごが置かれている。図中、 L_m は平均水深に対する波長である。

水槽全体の大きさの制約により、波長の長い場合の実測値が得られなかったが、計算値との一致は概ね良好である。

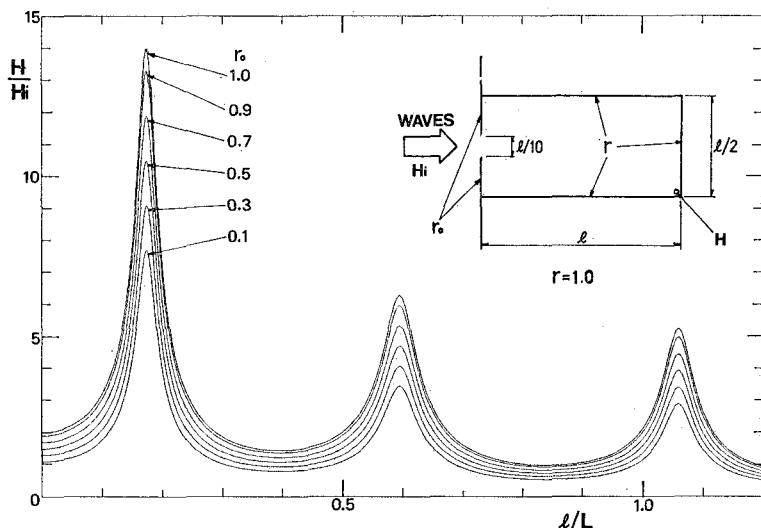


図-7 周波数応答曲線の計算例(外海側の反射率を変化させた場合)

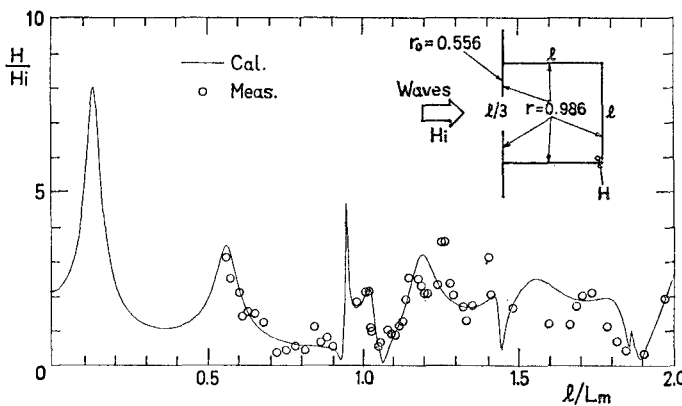


図-8 周波数応答曲線の計算値と実測値との比較

5. 結論および今後の課題

線勾配方程式に対する境界条件の設定法を改良し、屈折・回折を含む港内波高分布の計算法を提案した。計算結果を従来の方法と比較し、反射率の影響の違いを明らかにした。また、計算結果を実測結果と比較したところ、概ねよい一致を示した。今後、任意反射率境界条件の繰り返し計算法の改良や、任意形状の港への適用、不規則波への拡張などへ研究を進める予定である。

参考文献

- 1) 坂井藤一・月岡康一: 波動解析への有限要素法の適用(第2報), 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 45~48, 1974.
- 2) Lee, J. J.: Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, J. Fluid Mech., Vol. 45, pp. 375~394, 1971.
- 3) 伊藤喜行・谷本勝利: 数値波動解析法とその応用, 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 67~70, 1971.
- 4) 伊藤喜行・谷本勝利: 波向線交差領域での波の屈折, 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 325~329, 1972.
- 5) 渡辺 晃・丸山康樹: 屈折・回折・碎波減衰を含む波浪場の数値解析法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103~107, 1984.
- 6) Copeland, G. J. M.: A practical alternative to the "mild-slope" wave equation, Coastal Eng., Vol. 9, pp. 125~149, 1985.
- 7) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 471~490, 1972.
- 8) 高山知司: 波の回折と港内波高分布に関する研究, 港湾技研資料, No. 367, 140 p., 1981.
- 9) 井島武士・吉田明徳・奥薗英明・北山 斉: 消波護岸を有する港湾水面変動の数値解析, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 183~187, 1982.
- 10) Gaillard, P.: Combined refraction-diffraction calculations with directional wave spectra, Proc. 19th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 1040~1056, 1984.
- 11) Radder, A. C.: On the parabolic equation method of water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 159~176, 1979.
- 12) 檜山和男: 計算力学における線形水面波動問題に関する基礎的研究, 博士論文, 中央大学, 316 p., 1987.
- 13) Chen, H. S.: Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering, Appl. Ocean Res., Vol. 8, pp. 99~104, 1986.
- 14) 合田良実: 長方形および扇形の港の副振動について, 第10回海岸工学講演会講演集, pp. 53~58, 1963.