

流れを考慮した屈折・回折方程式の誘導と数値計算例

間瀬 肇*・古田 幸也**・岩垣 雄一***

1. まえがき

Berkhoff¹⁾によって導かれた緩勾配方程式 (mild slope equation) は、波の反射が無視できる条件下では、放物型方程式で近似できる²⁾。この方程式は屈折と回折を同時に考慮することができ、また数値計算が容易なことから、近年非常に注目を浴びている。

放物型方程式は、波の進行方向と座標軸の一つとのなす角が小さい場合に特に有効であり、この角度が大きくなると近似精度が悪くなる。この欠点を解消するために、波向線と波峰線を用いた直交曲線座標系で放物型方程式を表現する方法^{3),4)}、Padé 近似あるいは minimax 法により波数の近似度を上げる方法^{5),6)}等がある。また、波の非線形性、底面摩擦、碎波によるエネルギー逸散、流れといった効果を考慮した放物型方程式が研究⁵⁾⁻¹⁰⁾されている。

本研究では、流れと海底地形を同時に考慮できる線形の屈折・回折方程式を multiple scales 法によって誘導し、一例として、離岸流が存在する一様勾配海底地形における波浪変形の数値計算を行う。一方、Kirby¹⁰⁾が既に誘導した流れの効果を含んだ屈折・回折方程式を検討するとともに、その数値計算を行い、著者らが導いた方程式による計算結果と比較・検討する。

2. Multiple Scales 法による流れを考慮した放物型方程式の誘導

流れ U が存在する場における波の速度ポテンシャル ϕ の支配方程式、および線形の境界条件式は次のとおりである¹¹⁾。

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla_h \right)^2 \phi = 0, \quad z = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\nabla_h \phi \cdot \nabla_h h, \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (3)$$

式 (2) は、自由表面における運動学的条件と力学的条

件から自由表面変位を消去した式である。ここで、 ∇ は 3 次元勾配ベクトル、 ∇_h は水平面内における勾配ベクトル、 z は静水位を 0 とし鉛直上向きを正とする鉛直座標、 g は重力加速度、 h は水深である。

まず、式 (1)~(3) を解くに当って、微小パラメータ ε を用いて、以下に示される独立変数を導入する。

$$\left. \begin{aligned} x, \quad x_2 = \varepsilon^2 x; \quad y_1 = \varepsilon y, \quad y_2 = \varepsilon^2 y; \quad z; \\ t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

波は x 方向に伝播する場合を考えるので、 y はない。

流れ $\mathbf{U} = (U, V)$ の大きさは $O(1)$ とし、その空間変化の程度は $O(\varepsilon^2)$ 、すなわち、 $\mathbf{U}$ は (x_2, y_2) の関数とする。水深 h および波数 k はゆるやかに変化するとし、 (x_2, y_1) の関数とする。速度ポテンシャル ϕ は次のように展開する。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x_2, y_1, t_2, z) e^{i\phi} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、

$$\phi = \int^x k dx - \omega t \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。式 (1)~(3) に含まれる x, y, t についての微分は次のようにする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

以上のオーダーリングと微分公式を用いて式 (1)~(3) を変形すると、次式が得られる。

$$\phi_{n,zz} - k^2 \phi_n = F_n, \quad -h < z < 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$g \phi_{n,z} - \sigma^2 \phi_n = G_n, \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\phi_{n,z} = B_n, \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$\sigma = \omega - kU \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad \dots\dots\dots (12)$$

* 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科

** 学生会 京都大学大学院工学研究科

*** 正会員 工博 名城大学教授 理工学部土木工学科

であり、下付き添字の変数は微分を意味する。 $n=1, 2$ の F_n, G_n, B_n を示すと、

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= G_1 = B_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (13) \\ F_2 &= B_2 = 0 \\ G_2 &= 2i\omega V\phi_{1y_1} - ikUV\phi_{1y_1} - UV(ik\phi_1)_{y_1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。 $n=1$ の場合、式(8)~(10)は斉次方程式となっており、その解は

$$\phi_1 = -\frac{ig}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} A'(x_2, y_1, t_2) \quad \dots\dots (15)$$

と求められる。 n が 2 以上の非斉次方程式に対しては、解を持つための条件として、次の solvability condition が必要である。

$$\int_{-h}^0 F_n \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz + \frac{B_n}{\cosh kh} = \frac{G_n}{g} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$n=2$ の場合、式(14)を式(16)に代入すると、

$$V\{2i\omega\phi_{1y_1}|_{z=0} - ikU\phi_{1y_1}|_{z=0} - U(ik\phi_1)_{y_1}|_{z=0}\} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。式(17)が成立するためには、 $V=0$ あるいは中カッコ内が 0 となる必要があるが、流れが存在する場を考えているので $V=0$ は不合理であるし、また中カッコ内は 0 にはならないため、 $z=0$ において次のようなオーダーリングを仮定し、これらの項は 1 次オーダーの高い方程式に現れるようにする。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1y_1}|_{z=0}, & \quad (ik\phi_1)_{y_1}|_{z=0}, \\ \phi_{2y_1}|_{z=0}, & \quad (ik\phi_2)_{y_1}|_{z=0} \sim O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

このようなオーダーリングを行うと、 F_n, G_n, B_n は $n=1$ の場合式(13)、 $n=2$ の場合式(14)で G_2 を 0 としたものとなり、 $n=3$ に対しては、

$$F_3 = -ik\phi_{1x_2} - (ik\phi_1)_{x_2} - \phi_{1y_1} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$G_3 = 2i\sigma\phi_{1t_2} + 2iU\sigma\phi_{1x_2} + 2iV\sigma\phi_{1y_1} - i\phi_1\{F_h(kU) \cdot U\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$B_3 = -ik\phi_1 h_{x_2} - \phi_{1y_1} h_{y_1} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。

$n=1$ の場合の解は、既に式(15)で与えられている。 $n=2$ の場合も斉次方程式となり、その解 ϕ_2 は式(15)と同形である。これを ϕ_1 に含めて考えることにより、無視できる。式(19)~(21)を式(16)の solvability condition に代入し、左辺第 1 項に対してライプニッツの微分公式を用い、また次の式

$$\int_{-h}^0 \left\{ \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right\}^2 dz = \frac{CC_g}{g} \quad \dots\dots\dots (22)$$

を利用して、以下の放物型方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} 2i\sigma \left(\frac{A'}{\sigma} \right)_{t_2} + 2i(kCC_g + \sigma U) \left(\frac{A'}{\sigma} \right)_{x_2} \\ + 2iV\sigma \left(\frac{A'}{\sigma} \right)_{y_2} + i\{(kCC_g)_{x_2} + F_h\sigma \cdot U\} \left(\frac{A'}{\sigma} \right) \end{aligned}$$

$$+ \left\{ CC_g \left(\frac{A'}{\sigma} \right)_{y_1} \right\}_{y_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 C は波速、 C_g は群速度である。定常状態では、 $2i\sigma(A'/\sigma)_{t_2}$ を 0 とおけばよい。

上式を、式(6)の位相関数のかわりに基準点での位相関数 $k_0x - \omega t$ を用いた場合の表現式に直す。速度ポテンシャル ϕ_1 は

$$\phi_1 = -\frac{ig}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} A e^{i(k_0x - \omega t)} \quad \dots\dots (24)$$

$$A = A' e^{i(\int^x k dx - \int^t \omega dt)} \quad \dots\dots\dots (25)$$

と書けるので、式(23)に

$$A' = A e^{i(k_0x - \int^x k dx)} \quad \dots\dots\dots (26)$$

を代入すれば、 A に関する放物型方程式となる。その結果は次のとおりである。

$$\begin{aligned} 2i(kCC_g + \sigma U) \left(\frac{A}{\sigma} \right)_{x_2} + 2iV\sigma \left(\frac{A}{\sigma} \right)_{y_2} \\ - 2(k_0 - k)(kCC_g + \sigma U) \left(\frac{A}{\sigma} \right) \\ + i\{(kCC_g)_{x_2} + F_h\sigma \cdot U\} \left(\frac{A}{\sigma} \right) \\ + \left\{ CC_g \left(\frac{A}{\sigma} \right)_{y_1} \right\}_{y_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

この式で、オーダーリングのために用いたパラメーター ε は 1 とおくことができ、 $x_2 \rightarrow x, y_1, y_2 \rightarrow y$ とみなせばよい。

式(27)が流れと海底地形が変化する場における波の屈折・回折方程式である。ここで、 $U=V=0$ の流れが存在しない場合を考えると、式(27)は

$$\begin{aligned} 2ikCC_g A_x - 2k(k_0 - k)CC_g A + i(kCC_g)_{x_2} A \\ + (CC_g A_y)_y = 0 \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

となり、これは Radder²⁾ が導いた放物型方程式となる。

3. Kirby の流れを考慮した放物型方程式

Kirby¹⁰⁾ は、まず変分法によって次の緩勾配方程式を誘導した。

$$\begin{aligned} \frac{D^2\phi}{Dt^2} + (F_h \cdot U) \frac{D\phi}{Dt} - F_h \cdot (CC_g F_h \phi) \\ + (\sigma^2 - k^2 CC_g) \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここで、 D/Dt は $(\partial/\partial t + U \cdot F_h)$ である。速度ポテンシャル ϕ を

$$ig^{-1}\phi = R e^{i(\int^x k dx - \omega t)}, \quad R = \frac{A'}{\sigma} \quad \dots\dots\dots (30)$$

と表し、これを式(29)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} i \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial t} R + 2\sigma \frac{\partial R}{\partial t} + 2\sigma U \cdot F_h R + F_h \cdot (\sigma U) R \right. \\ \left. + \frac{\partial(\sigma C_g)}{\partial x} R + 2\sigma C_g \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) \right\} \\ - \frac{D^2 R}{Dt^2} - (F_h \cdot U) \frac{DR}{Dt} + F_h \cdot (CC_g F_h R) = 0 \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

上式において時間に依存する項を無視し、また $\partial/\partial x \sim \epsilon(\partial/\partial y)$ を仮定し、さらに CC_g に対して $|U|^2$ は小さいとして、次の放物型方程式が導かれるとした。

$$\begin{aligned} & 2i(C_g + U)A'_x + 2iVA'_y \\ & + i\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g + U}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{\sigma} \right) \right\} A' \\ & + \frac{1}{\sigma} (CC_g A'_y)_y = 0 \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

式 (31) の虚数部 (虚数単位 i がかった項) は、時間微分項を無視して、確かに式 (32) の虚数部に一致する。式 (31) の実数部は、時間微分項以外は省略せずに書き下すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{式 (31) の実数部} \\ & = R_x \{ (CC_g)_x - (UV)_y - (U^2)_x \} \\ & + R_y \{ (CC_g)_y - (UV)_x - (V^2)_y \} - UV(R_{xy} + R_{yx}) \\ & + R_{xx}(CC_g - U^2) + R_{yy}(CC_g - V^2) \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$\partial/\partial x \sim \epsilon(\partial/\partial y)$ は、 x についての微分項は y についての微分項より小さいと仮定して無視することを意味するので、

$$\begin{aligned} & \text{式 (33) の右辺} \\ & = R_y \{ (CC_g)_y - (V^2)_y \} + R_{yy}(CC_g - V^2) \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $CC_g \gg V^2$ を仮定すると、

$$\text{式 (34) の右辺} = (CC_g R_y)_y \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる。このことから、式 (32) の左辺の最後の項は $\{CC_g(A'/\sigma)_y\}_y$ としなければならない。また、 $\partial/\partial x \sim \epsilon(\partial/\partial y)$ の仮定に厳密に従うとすれば、式 (32) の左辺第 1 項、および第 3 項の中カッコ内の第 1 項も省略しなければならない。

以上のように、式 (32) の誘導過程においてはオーダーリングが不明瞭であり、また式 (32) の左辺の最後の項に誤りがある。なお、式 (26) を用いて式 (32) を書き直すと、

$$\begin{aligned} & 2i(C_g + U)A_x + 2iVA_y - 2(k_0 - k)(C_g + U)A \\ & + i\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g + U}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{\sigma} \right) \right\} A \\ & + \frac{1}{\sigma} (CC_g A_y)_y = 0 \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる。

4. 数値計算結果

4.1 計算条件

計算領域は x 方向に 1200 m、 y 方向に 800 m の長方形領域とした。海底地形は、 y 方向には水深が変化しない

$$h(x, y) = 24 - x/50 \quad \dots\dots\dots (37)$$

で表される、勾配が $1/50$ の一様勾配地形とした。

流れの場としては、次式で示される離岸流を模したものをを用いた¹²⁾。

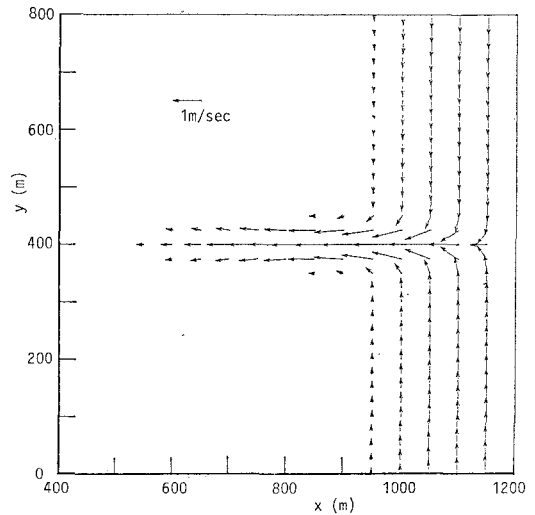


図-1 流れのベクトル図

$$\begin{aligned} U = & -0.0721(1200 - x)F\left(\frac{1200 - x}{250}\right)F\left(\frac{y - 400}{25}\right) \\ & \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & -1.8 \left\{ 2 - \left(\frac{1200 - x}{250} \right)^2 \right\} F\left(\frac{1200 - x}{250}\right) \\ & \times \int_0^{(y-400)/25} F(\alpha) d\alpha \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\alpha^2/2) \quad \dots\dots\dots (40)$$

図-1 は式 (38)~(40) の結果をベクトルの的に示したものである。このような場においては、 $y=400$ m の線上で波向線が交差する。

入射波の振幅 $|A|_0$ は 1.0 m と一定にし、その周期は 6, 8, 10 および 12 sec の 4 種類とした。

計算に当っては、メッシュ間隔を $\Delta x = 10$ m、 $\Delta y = 5$ m とした。側方 ($y=0$ m および $y=800$ m) における境界条件は次のようにした。

$$\partial A / \partial y = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

波の碎波条件については詳しく考慮しておらず、ここでは一様勾配海浜地形上の規則波の碎波条件を参考にし、それによって計算を打ち切る水深をおおまかに決めた。

4.2 数値計算結果

図-2 (a) は入射波の周期が 8.0 sec の場合の波の等振幅線を示したものであり、図-2 (b) および (c) はそれぞれ $x=1050$ m における y 軸方向の振幅の変化 ($y=400$ m に対して対称である) および $y=400$ m における x 軸方向の振幅の変化を示したものである。なお、図-2 (b)、(c) には Kirby の式 (36) を用いた数値計算結果も同時に示してある。

図-2 (b) から、 $y=400$ m の地点で振幅は最大とな

入射波の周期を変えた場合の、 $y=400$ m における x 軸方向の振幅変化の計算結果を図-3 に示した。これらの図から、水深が大きい領域では両者の方程式による計算結果は一致すること、水深が浅くなってくると両者に差が現われてきて、入射波の周期が小さい 6 sec の場合には全体的に Kirby の式による計算結果の方が大きくなること、周期が大きい 10 sec の場合は著者らの式を用いた計算結果の方が大きくなる（図には示していないが、入射波周期が 12 sec の場合も著者らの式の計算結果の方が大きくなる）ことが読み取れる。

図-4 は、Kirby の式 (36) において、左辺の最後の項をそのままにした場合の計算結果（破線）と $\{CC_g(A/\sigma)_y\}_y$ と修正した場合の計算結果（実線）を比較したものである。修正式を用いた場合の計算結果は、元の式の計算結果より大きくなること、その結果入射波の周期が 10 sec 以上の場合、著者らの計算結果とよく一致すること、入射波の周期が 6 sec の場合は著者らの計算結果との差が広がることがわかった。

5. あとがき

本研究は、流れが存在する場における線形の屈折・回折方程式を multiple scales 法によって誘導し、離岸流が存在する一様勾配海底地形における波浪変形の数値計算を行い、Kirby が既に誘導している方程式を用いた計算結果との比較・検討を行ったものである。その結果、水深が大きい領域では両者の方程式による計算結果は一致すること、水深が浅くなってくると両者に差が現われてきて、入射波の周期が小さい場合には全体的に Kirby の式による計算結果の方が大きくなること、周期が大きい場合には著者らの式による計算結果の方が大きくなることわかった。また、Kirby の式 (36) の左辺の最後の項を $\{CC_g(A/\sigma)_y\}_y$ と修正した場合の計算結果は、元の式の計算結果より大きくなり、入射波の周期が大きい場合、著者らの計算結果とよく一致すること示した。

最後に、京都大学工学部酒井哲郎助教授には数多くの御助言を頂き、ここに謝意を表する。また、本研究は文部省科学研究費一般研究 B（代表者岩垣雄一教授）による研究の一部であることを付記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th ICCE, pp. 471~490, 1972.
- 2) Radder, A. C.: On the parabolic equation method for water wave propagation, Jour. Fluid Mech., Vol. 95, No. 1, pp. 159~176, 1979.
- 3) Tsay, T.-K. and P. L.-F. Liu: Numerical solution of water-wave refraction and diffraction problems in the parabolic approximation, Jour. Geophys. Res., Vol. 87, No. C10, pp. 7932~7940, 1982.
- 4) 磯部雅彦: 波向線座標における放物型方程式を用いた屈折・回折の計算法, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 95~99, 1985.
- 5) Kirby, J. T.: Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 91, No. C1, pp. 933~952, 1986.
- 6) Kirby, J. T.: Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, Coastal Eng., Vol. 10, pp. 355~378, 1986.
- 7) Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple: A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly varying topography, Jour. Fluid Mech., Vol. 136, pp. 453~466, 1983.
- 8) Liu, P. L.-F.: Viscous effects on evolution of Stokes waves, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 112, No. 1, pp. 55~63, 1986.
- 9) Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple: Modeling waves in surfzones and around islands, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 112, No. 1, pp. 78~93, 1986.
- 10) Kirby, J. T.: A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, Jour. Geophys. Res., Vol. 89, No. C1, pp. 745~747, 1984.
- 11) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 529~549, 1961.
- 12) Liu, P. L.-F.: Wave-current interactions on a slowly varying topography, Jour. Geophys. Res., Vol. 88, No. C7, pp. 4421~4426, 1983.