

斜面上の波の碎波特性に関する研究

田 渕 幹 修*・滝 川 清**

1. ま え が き

斜面上の波の碎波特性に関する研究は、近年数値実験（数値波動水槽）を主とした研究が多く行なわれるようになってきており、その特性も明らかにされつつある¹⁾。

著者の1人も最近有限要素法により斜面上を進行する波が碎波に到る過程を計算して、水粒子運動等の時・空間変化特性を調べ、碎波型との対応でその定性的な傾向を明らかにした²⁾。

しかし、数値実験を主とした多くの研究にもかかわらず、斜面上の碎波に関してその機構や定量的特性に関する成果は非常に少なく、特に工学的に有用なものとして実験に基づく合田³⁾の碎波指標が発表されて既に十数年を経た現在、なおこれの理論面からの説明さえ十分できていない現状といえる。

本研究は、解析的あるいはこれに近い手法、すなわち数値実験とは異なった解析法によるアプローチも必要と考え、著者らがこれまでにやってきたモード結合方程式による波動解析法^{4),5)}を斜面上の波に適用し、この碎波特性を明らかにしようとするものである。本報告ではその緒として、解析方法の概説、津波のような長周期波や緩勾配海岸構造物上で見られる遡上波⁶⁾、碎波と非碎波遡上を分ける限界波形勾配の決定、および碎波の特性を調べる時間問題となる極限波の限界条件と碎波発生機構に関する簡単な考察を計算例に基づいて行う。

2. 解析方法

静水面上に x 軸、鉛直上方に z 軸をとり、水深 h は x の関数でその勾配を α とおく。非圧縮・完全流体の非回転2次元運動を考えると、速度ポテンシャル Φ が存在し、流体域で成立すべき基礎式は次の連続方程式（Laplace 方程式）と圧力方程式で示される。

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Phi_t + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで p , ρ , g はそれぞれ圧力、流体の密度、重力の

加速度で、下付添字はその変数による偏微分を表わす。

また、水底および水面における境界条件はそれぞれ次のように与えられる。なお ζ は水面変動量である。

$$z = -h \quad \text{で} \quad \alpha\Phi_x + \Phi_z = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$z = \zeta \quad \text{で} \quad \Phi_t + g\zeta + (\Phi_x^2 + \Phi_z^2)/2 = 0 \quad \dots\dots (4)$$

$$z = \zeta \quad \text{で} \quad \zeta_t + \Phi_x\zeta_x - \Phi_z = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

α は余り大きくないとして、式（1）と式（3）を α の1次のオーダーで満足する速度ポテンシャルは次式のようにおける。

$$\frac{k\sigma}{g}\Phi = -i \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} F_m(z)\phi_m e^{i\theta_m} + (x - \alpha z)U \quad \dots (6)$$

$$F_m(z) = \frac{\cosh k_m(h+z) - i\alpha\delta_m \sinh k_m(h+z)}{\cosh k_m h - i\alpha\delta_m \sinh k_m h}$$

$$\theta_m = \int k_m dx + \sigma_m t, \quad k_{-m} = -k_m, \quad \sigma_{-m} = -\sigma_m$$

$$\delta_m = 1 \quad (m \geq 0), \quad -1 \quad (m < 0), \quad i = \sqrt{-1}$$

また、水面変動量は次式のようにおく。

$$k\zeta = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f_m e^{i\theta_m} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式（6）、式（7）で σ , k は基準となる角周波数と複素波数で基本波等の代表成分波の値をとる。 s_m は m 成分波の進行方向を規定する符号で、 σ_m , k_m は m 成分波の角周波数と複素波数である。 f_0 , U , ϕ_0 は平均水面の上昇量や質量輸送の補償流に関係する量で、計算に要求される条件に応じて質量や運動量流束の連続性等を考慮した関係式を導入して決定する。本報では、式の展開では U と ϕ_0 を無視し、さらに数値的計算では $f_0 = 0$ としている。

なお、 α は小さいとしているので、 k_m , ϕ_m , f_m 等の x による微分、さらに本報では定常解を扱うことにして t による微分も無視できるものとする。

式（6）、式（7）を式（4）、式（5）に代入、整理した上で $e^{-i\theta_m}$ を乗じて平均操作を行うと次式を得る。ただし、次式以降 k_m , σ_m は k , σ で除して無次元化してある。

$$\begin{aligned} 0 = & f_n + s_n \sigma_n \alpha \phi_n \\ & + \sum_{m_1, m_2} \{ \beta_{m_1 m_2} s_{m_1} \sigma_{m_1} k_{m_1} \phi_{m_1} f_{m_2} \\ & + (gk/2\sigma^2) \alpha_{m_1, m_2}^{(2)} k_{m_1} k_{m_2} \phi_{m_1} \phi_{m_2} \} \\ & \times e^{i(\theta_{m_1} + \theta_{m_2} - \theta_n)} \end{aligned}$$

* 正会員 熊本大学講師 工学部環境建設工学科

** 正会員 工博 熊本大学講師 工学部土木工学科

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} \{ (1/2!) \alpha_{m_1} s_{m_1} \sigma_{m_1} k_{m_1}^2 \phi_{m_1} f_{m_2} f_{m_3} \\
& + (gk/2\sigma^2) \beta_{m_1, m_2}^{(2)} k_{m_1} k_{m_2} (k_{m_1} - k_{m_2}) \phi_{m_1} \phi_{m_2} f_{m_3} \} \\
& \times e^{i(\theta_{m_1} + \theta_{m_2} + \theta_{m_3} - \theta_n)} \\
& + \dots \\
& + \sum_{m_1} \dots \sum_{m_r} \{ [1/(r-1)!] \\
& \times \alpha_{m_1}^{\varepsilon_{r-1}} \beta_{m_1}^{\varepsilon_r} s_{m_1} \sigma_{m_1} k_{m_1}^{r-1} \phi_{m_1} f_{m_2} \dots f_{m_r} \\
& + (gk/2\sigma^2) \{ 1/(r-2)! \} (\alpha_{m_1, m_2}^{(2)})^{\varepsilon_r} (\beta_{m_1, m_2}^{(2)})^{\varepsilon_{r-1}} \\
& \times k_{m_1} k_{m_2} (k_{m_1} - k_{m_2})^{r-2} \phi_{m_1} \phi_{m_2} f_{m_3} \dots f_{m_r}] \\
& \times e^{i(\theta_{m_1} + \theta_{m_2} + \dots + \theta_{m_r} - \theta_n)} \\
& + \dots \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \dots \dots \dots (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & (\sigma^2/gk) s_n \sigma_n f_n + \beta_n^{(1)} k_n \phi_n \\
& + \sum_{m_1} \sum_{m_2} \alpha_{m_1} k_{m_1} (k_{m_1} + k_{m_2}) \phi_{m_1} f_{m_2} e^{i(\theta_{m_1} + \theta_{m_2} - \theta_m)} \\
& + \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} \beta_{m_1} k_{m_1}^2 \{ (1/2!) k_{m_1} + k_{m_2} \} \phi_{m_1} f_{m_2} f_{m_3} \\
& \times e^{i(\theta_{m_1} + \theta_{m_2} + \theta_{m_3} - \theta_n)} \\
& + \dots \\
& + \sum_{m_1} \dots \sum_{m_r} \alpha_{m_1}^{\varepsilon_{r-1}} \beta_{m_1}^{\varepsilon_r} k_{m_1}^{r-1} \\
& \times [\{ 1/(r-1)! \} k_{m_1} + \{ 1/(r-2)! \} k_{m_2}] \\
& \times \phi_{m_1} f_{m_2} \dots f_{m_r} e^{i(\theta_{m_1} + \theta_{m_2} + \dots + \theta_{m_r} - \theta_n)} \\
& + \dots \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \dots \dots \dots (9)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_r = \begin{cases} 0 & (r \text{ が奇数の時}) \\ 1 & (r \text{ が偶数の時}) \end{cases}$$

$$\alpha_m = \frac{\cosh k_m(kh + f_0) - i\alpha \sinh k_m(kh + f_0)}{\cosh k_m kh - i\alpha \sinh k_m kh}$$

$$\beta_m = \frac{\sinh k_m(kh + f_0) - i\alpha \cosh k_m(kh + f_0)}{\cosh k_m kh - i\alpha \sinh k_m kh}$$

$$\alpha_{m_1, m_2}^{(2)} = \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} - \beta_{m_1} \beta_{m_2}$$

$$\beta_{m_1, m_2}^{(2)} = \alpha_{m_2} \beta_{m_1} - \alpha_{m_1} \beta_{m_2}$$

式(8), 式(9)で上付バーは平均操作をほどこすことを意味し, また $m_1 = -\infty$ から ∞ までの総和を $\sum_{m_1}$ 等と略記した。ただし, $m_1 = 0$ は除く。

以下, 定常問題を考える。また上式はそのまま重複波や多成分波へも適用できるが, ここでは単一の進行波を考えることにすると, 基本波は1個でよい。これを, $n=1$ と -1 に割りつける(符号が違うのみの同一番号の波は対で1つの成分波を表す)。干渉関係を有する考慮すべき成分波は, 式(8), 式(9)の e の指数部が0となるような位相関係を有する, いわゆる整合条件を満足する波として設定され, 同時にこの波の波数と周波数は基本波を含む他の成分波の波数, 周波数と関係づけられる。今の場合, $k_n = \sigma_n = n$ なる, k, σ の整数倍の波数と周波数をもつ高調波が自動的に設定されることになる。

次に, 基本波に関して, 例えば周波数に関する情報($\sigma^2 h/g$ など)と波高に関する情報(f_1 と f_{-1} など)を与えると, 式(8), 式(9)から未知量の数だけの, 独立変数 x, t は含まない非線形方程式が得られる。これを解くには, 数次程度のオーダーであれば $\alpha=0$ の場合

に示した⁵⁾ように, 非線形性を残したまま代入消去法によって解析解を示すことができる。

今回は高次の解を得る必要があるので, 上に得られた方程式系を直接 Newton-Raphson 法によって解いた。式の展開や微分等は, 数式処理プログラム Reduce 3.2 を用いて行った。

3. 計算例

図-1と図-2に, 水面波形および波峯と波谷下の流速分布に関する滝川^{2), 6)}による実験結果と, 上述の方法による8次の解との比較例を示す。実験データは(A)(C)は砕波点での, (B)も砕波点に非常に近い点での測定値である。また計算では戻り流れは考慮していない。

計算の次数不足と思われる不一致もみられるが, 実験値が極限波であることを考えると, 計算方法の妥当性は確認できる。なお, L_0 は線形沖波波長, H は波高である。

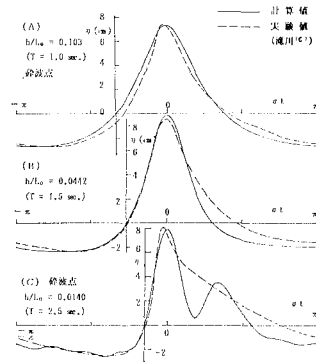


図-1 水面変動の実験値との比較 ($\alpha=1/20$)

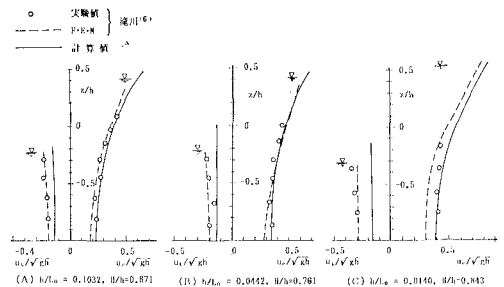


図-2 波峯と波谷下の流速分布の実験値との比較 ($\alpha=1/20$)

4. 非砕波遡上の限界波形勾配について

斜面上を汀線に向かって遡上する波は, 必ずしも砕波するとは限らないことは, 潮汐や津波のような長周期の波の海岸への遡上や, 緩勾配海岸堤防等へ寄せる波の例で知られる。このような汀線まで非砕波で遡上する波と途中で砕波する波の限界について考察する。

図-3は, 斜面上の波の線形計算による波速比 c/c_0

述したように空間的位相差の小さい流動成分が卓越してくるため、図に示すように K_s が非常に大きくなる事はないと思われる。計算方法の再検討が必要であろう。

5. 砕波限界^{(1),(2)}と砕波発生の機構に関する考察

本計算法は、計算自体は(結果の正誤は別にして)砕波限界を越えた波についても可能であるので、砕波限界の条件を明確にしておくこと、並びに砕波特性を議論するのに必要十分な精度を有しているか否かの判断と必要な精度を確保するための計算次数等の検討を行っておく必要がある。

しかしながら、これは非常に難しい問題でもあり、実験結果や他の解析手法を援用しつつ研究の進行と共に明らかにされてゆくものでもあると思われる。従って現時点で議論できることは少く、簡単な考察にとどめざるをえない。

まず、砕波限界条件について考える。従来の研究成果より、規則波の少くとも深海波については、波峯で次の関係が成立する。

(i) 波峯の水平流速 u は波速 c に等しく鉛直流速 w は 0 である。

(ii) 極限波では波峯は尖点をなし、内部波峯角は 120 度となる(いわゆる Stokes (1848) の限界角)。

また、波峯では水滴が容易に空中に飛散し、また水中に空気泡を取り込むことから

(iii) 波峯の圧力勾配は 0 である。すなわち

$$\partial p / \partial x = 0, \quad \partial p / \partial z = 0.$$

さらに、この関係を Euler の運動方程式に代入して

(iv) 波峯部の水粒子には重力以外の外力は作用せず、

$$du/dt = 0, \quad dw/dt = -g.$$

これらの (i) から (iv) の条件は Stokes の複素速度ポテンシャルを用いた検討によって、全て矛盾なく成立

することが確かめられ、深海波では同時生起的条件といえる。

一方、水底勾配の影響をうけ波形が前傾した波については不明で、上記 (i) の条件と

(v) 波の前面が垂直に切り立った時点

がよく用いられる。

次に計算例をみてみる。計算は 8 次まで考慮した結果である。圧力分布に注目して種々の計算を行ってみると、波高が小さい時は p が負の値で結節点を有し、波高が非常に大きい時は p が正の値で結節点を有することが分った。図-8 は丁度 $p=0$ で結節点を持った時の計算結果である。また図-9 は p が正(この場合、 $p/\rho gh=0.034$)で結節点を有する場合の波峯付近の流速および圧力分布である。(両図で矢線ベクトルで示した流速の水平方向成分が図-8 では u/c 、図-9 では $(u-c)/c$ となっているので注意。)

両図で、 $p=0$ を水面とみれば、水面形および等圧力線の前傾している様子が出ており、斜面上の波の特徴を示している。なお、図-8 のように $p=0$ で結節点をもつ時が計算上の極限波と考えられる。

ところで、図-8 の全体波形をみると、波峯付近で $p=0$ と式 (7) による波形に差異がみられ、特に波峯高の差は z/h の値で約 0.3 と大きい。これは極限波に対しては 8 次の解では計算精度が不足していることを意味する。しかし、波峯高の差も圧力 $p/\rho gh$ では約 0.04 にすぎず、また 8 次の高調波の速度ポテンシャル及び水面変動量の 1 次の波のそれに対する比、すなわち $|\phi_1|$ の $|\phi_1|$ および $|f_8|$ の $|f_1|$ に対するは比それぞれ 0.00117 と 0.0673 となっている事を考えると、速度ポテンシャルの計算結果の精度はある程度確保されていると考えられる。従って速度ポテンシャルを用いて計算した諸量による以下の定性的考察は許されるであろう。

まず限界条件については、既述 (i), (iii), (iv) につ

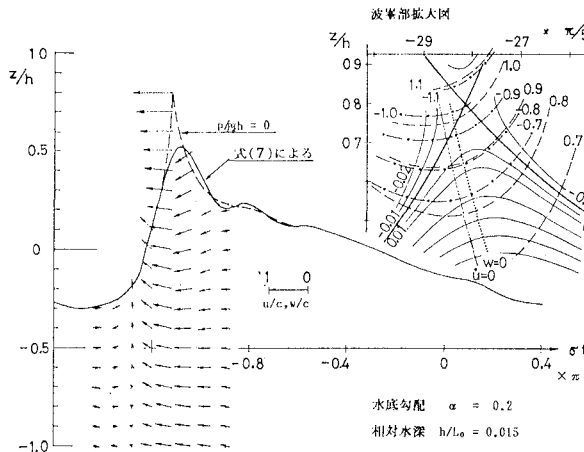


図-8 極限波の波形流速分布と波峯近傍における圧力分布等の特性

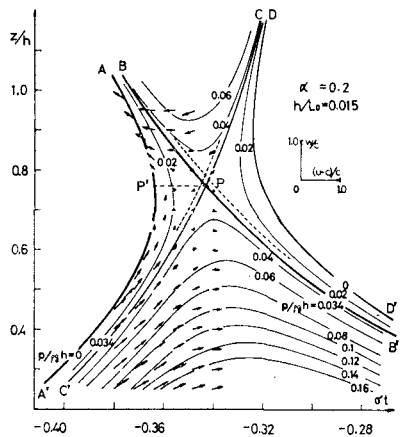


図-9 極限条件を超えた波の波峯部の流況

いては、1次的には成立しているとみられるが、鉛直加速度と同図では量的判断が困難な圧力勾配を除き、若干の差異も認められる。しかしこれが本質的なものか計算誤差によるものかこれだけでは判断できない。また、波峯角は、時間波形が局所的に空間波形に等しいとして計算すると約96度となり(ii)は成立していない。

ところで、図-8と図-9から定性的ではあるが碎波の機構に関して以下のような1つの推論が可能である。

波高が小さい時は、結節点を結ぶ等圧線は負の値であるから、水面形すなわち $p=0$ の線は、図-9でみると C/PB' より下方にある等圧線と似た波形が得られる。ところが波高が大きくなり、図-8の極限波を越えて図-9の状況になると、同図で C/P より左方の流体とそれのもつエネルギー（以下仮に過剰エネルギーという）は C/PC を越えて右方の波の背面へ流入することはできず、 P/P より上方、すなわち波運動の系外へ流出する。これが碎波である。過剰エネルギーが小さい時（結節点をとる等圧力線の値が0に近い正值の時）は P/P の距離は小さく、過剰分の流体は P 点に近い所で初速度 $u \approx c$, $w \approx 0$ で自由落下（直ちに波面上の落下に移行）運動を行うであろう。いわゆる崩れ波碎波である。過剰エネルギーが大きい時は、図-9に示すように P/P を越えて前面上方へ流出、しばらくポテンシャル運動を持続し、波の前方へ落下する（巻き波碎波）。この時は A/P' はかなり正確に、そして P/A も近似的に波前面の水面形を表現しているものと思われる。

一方、波の背面は PB' の上方からの質量およびエネルギーの供給はないので PB' が水面の良い近似になっているものと思われる。

なお極限波（図-8）の $p=0$ の等圧線に比し、図-9の $p/\rho gh=0.034$ の等圧線は型は同じであるがその位置は若干下がる（図-9に図-8の $p/\rho gh=0$ の線を破線で記入してある）。これは、一坦碎波を生じた波は極限波よりも波峯が下がる事を示唆している。

ところで、斜面上を汀線へ向かって進行する波は浅水効果によって波高が変化し、また波動エネルギーの系外への流出（＝碎波によるエネルギー損失）も連続的に生じるので、過剰エネルギーの大小は、波の進行に伴う波高（エネルギー）の増加とエネルギー損失量との関係で決まる。たとえば、碎波限界に達した時点で浅水係数が急激に増加する時は過剰エネルギーは大きく、巻き波碎波となる。

ところで、図-5において水平流速がさらに大きい場合を想定すれば、これは砕け寄せ波型の碎波に対応すると思われるので、これまでの考察内容とあわせ考えると、異なった碎波形式であっても特性は連続的に説明可能であると思われる。また、巻き波碎波（過剰エネルギーの大きい波）は $p=0$ が結節点をもつ理論上の極限波

を越えた波であり、実際の波峯は図-9において PB が湾曲しその線上にあらわれるので、波峯と結節点の不一致が生じ、かつ“波峯の流速”の定義が解析的な明確さを失う。このような意味では、先に述べた碎波条件の(i)と(v)もあいまいさを有している事になる。

7. あとがき

本報告では、斜面上の碎波特性を調べる緒として、まず水底勾配の影響を考慮した解析方法を示し、碎波限界にある波についての実験結果による検証も比較的良好な一致をみた。

さらに斜面上の波の波速変化や浅水係数の特性図を示すとともに、斜面上への非碎波遡上の限界指標を与えた。

次に、計算上、圧力 $p=0$ の等圧力線が結節点を持つ状態が極限波と考えられることが分った。しかし、これを碎波限界とみなしたとき、深海波の碎波限界が斜面上の波にも成立するかは、今回の計算では断定はできなかった。

なお、碎波現象の機構に関する一つのイメージを描くことはできたと考える。すなわち、等圧力線を描くことによって、波運動として存在し得るエネルギーを越えたいわゆる過剰エネルギーが明解に分離され、これの多少によって碎波の形式（崩れ波碎波と巻き波碎波）が変わってくる事が説明される。また崩れ寄せ波は複素波数の虚数部の増大、すなわち波動とは区別される流動成分の増大に関係していることが推論される。

最後に、解析計算における式の展開・微分・整理等は(株)ソードのマイクロコンピュータ M68 上の数式処理プログラム Cambridge Lisp 68000 版 Reduce 3.2 を用いたことを付記する。

参考文献

- 1) 例えば次の解説がある。
水口 優：水の波の非線形性と碎波，ながれ 4, pp. 289～300, 1985.
- 2) 滝川 清・岩垣雄一・中川政博：有限要素法による斜面上の波の碎波変形と内部機構の解析，第30回海岸工学講演会論文集，pp. 20～24, 1983.
- 3) 合田良実：碎波指標の整理について，土木学会論文報告集，第108号，pp. 39～49, 1970.
- 4) 田淵幹修・滝川 清：浅海波浪の非線形干渉について，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 94～98, 1981.
- 5) 田淵幹修・滝川 清：有限振幅波の新しい理論解に関する研究，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 6～10, 1985.
- 6) 滝川 清：有限要素法解析による浅海波の変形特性に関する研究，京都大学提出博士論文，149 p., 1983.
- 7) 例えば次の解説がある。
樺木 亨：碎波特論，水工学シリーズ 73-13-2，土木学会水理委員会，1973.
岩田好一朗：碎波特論——碎波限界を中心として——，水工学シリーズ 84-13-3，土木学会水理委員会，1984.