

エネルギー平衡方程式の積分に伴う数値分散について

西 村 仁 嗣*

1. 緒 論

波の屈折変形の計算には、初期の段階では波向線法のみが用いられていた。しかしながら、計算機使用の便宜上、また波の場の計算結果を海浜流や地形変化の計算に結びつける目的で、昨今では格子点法による解析がしばしば行われている。この場合、波高分布の算定には、直交座標系で記述されたエネルギー平衡方程式が用いられる。

Karlsso 方程式¹⁾は、方向スペクトルを有する波の場を対象として、エネルギー・フラックスの連続性を記述したものである。これを用いれば、marching scheme の積分により、一般の波浪の屈折計算が比較的容易に行われる²⁾。結果も現実の波浪場によく合致すると言われ、実用に供されているが、波向角方向のエネルギー分布を考慮するため、計算量は単一波のとり扱いに比してかなり大きくなる。また、回折が配慮されていないにもかかわらず、障害物背後への波の回り込みが生じたり、計算格子間隔等の条件によって結果に有意な差が認められるなど、数値解の信頼性に疑問が感じられる場合も多い。

本論文においては、まず単一波に関する空間 2 次元の基礎方程式系と Karlsso 方程式との関係が示される。ついで、エネルギー平衡方程式に基づく波の場の数値計算に際して問題となる 2 種の数値分散の定量的な把握が試みられる。これらの解析は、計算条件の設定、ならびに計算結果の解釈上の示唆を得る目的で行われたものである。

2. エネルギー平衡方程式

方向スペクトルを有する一般の波の場を考える。ここでは、波の場は定常状態にあり、減衰は生じていないものとする。また、全域にわたって単一周波数の波のみが存在する場合を想定するが、周波数帯相互間には干渉がないので、これによって議論の一般性が損なわれることはない。実際の計算でも、周波数帯毎の解析を切り離して実行する方が計算機容量の面で有利である。

水平面内に直交座標系 (x, y) をとり、 x 軸方向の区

間 $x \sim x+dx$ 、 y 軸方向の区間 $y \sim y+dy$ なる微小要素内の波のうち、波向角が $\theta \sim \theta+d\theta$ の方向帯に属するもののエネルギーを $e(x, y, \theta)dx dy d\theta$ とする。すなわち、 e は 3 次元空間 $\{x, y, \theta\}$ 内に分布する波のエネルギー密度である。このエネルギーが $C_g = \{C_{gx}, C_{gy}, C_{g\theta}\}$ なる速度で空間内を移動するとき、エネルギー保存則は次のように書かれる。

$$\frac{\partial e C_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial e C_{gy}}{\partial y} + \frac{\partial e C_{g\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ある成分波の波向線に沿ってとった s 軸が x 軸に対してなす角、すなわち波向角を θ とする。ある地点 (x, y) で波向 θ であった波のエネルギーは、時間間隔 Δt の後に距離 Δs だけ伝播し、その間に波向角は

$$\Delta \theta = \frac{1}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta \right) \Delta s \quad \dots\dots\dots (2)$$

だけ変化する。ここに、 C は波の位相速度である。以上により、エネルギーの伝播速度は

$$\left. \begin{aligned} C_{gx} &= \Delta s \cos \theta / \Delta t = C_g \cos \theta \\ C_{gy} &= \Delta s \sin \theta / \Delta t = C_g \sin \theta \\ C_{g\theta} &= \Delta \theta / \Delta t \\ &= \frac{C_g}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。 $C_g = \Delta s / \Delta t$ は波の群速度である。ただし、上式は波が分散しないという前提に立って導かれている。

水深 $h(x, y)$ が与えられれば、 C および C_g が定まり、従って式 (1) を e について解くことにより、波の場の完全な記述が得られる。

いま、3 次元空間 $\{x, y, \theta\}$ 内のある曲面 $\theta = \alpha(x, y)$ を考え、この曲面上の任意の点における波のエネルギーの移流方向がその接線方向となるようにするためには (図-1)、

$$C_{gx} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_{gy} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} - C_{g\theta} = 0 \quad \text{on } \theta = \alpha \quad \dots\dots\dots (4)$$

あるいは

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \sin \alpha = \frac{1}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \alpha \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

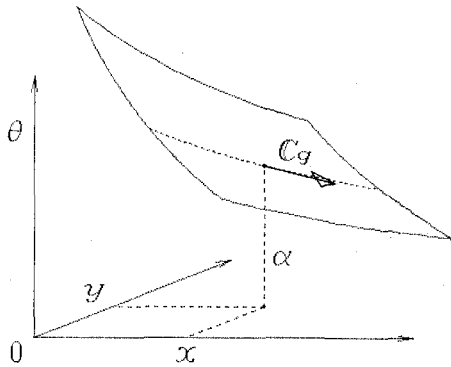


図-1

このような曲面はエネルギーの移流経路をつなぎ合わせるによって作られ、これを横切るエネルギー移流は生じ得ない。

ある地点 (x, y) で1つの波向 α の波だけが存在するような単一波の場合を $\{x, y, \theta\}$ 空間で見ると、式(4)の解のうち、与えられた境界条件を満たす曲面 $\theta = \alpha(x, y)$ 上にエネルギーが集中していることになる。実際、式(5)は単一波の屈折計算に通常用いられる方程式で、Fermatの原理もしくは波数ベクトル場の非回転性からも導かれる。

上述の集中エネルギーを $E(x, y)dx dy$ とすれば、

$$e(x, y, \theta) = E(x, y)\delta(\theta - \alpha) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 δ は Dirac のデルタ関数である。これを式(1)に代入し、 θ について0から 2π まで積分すると、通常の物理平面内のエネルギー保存則

$$\frac{\partial EC_g \cos \alpha}{\partial x} + \frac{\partial EC_g \sin \alpha}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。

式(5)および(7)からなる通常の系³⁾をあらゆる波向について重ね合わせ、一般化を図った結果が式(1)であることは、これらの議論から明らかである。ここでは、水深変化に伴う波の屈折ならびに浅水変形のみがとり扱われており、反射、回折、分散等は全く考慮されていない。

3. 数値分散の定量的評価

式(1)は、既述のいくつかの仮定の下で、厳密に波の屈折現象を書き表わしている。しかしながら、これを差分表示で近似して数値的に解く場合には、数値分散により解の精度が低下する。同じ問題は式(7)の数値積分に際しても起こる。前項の方程式系によれば、1点から出発してある方向に伝播する波のエネルギーは、屈折するとしても常に1本の波向線上に集中していなければならない。ところが、方程式の差分化、すなわち変数の離散化に伴い、格子点以外の任意地点のエネルギー密度

は近傍の複数格子点に分布する形でしか表現できなくなる。こうして波向線は幅をもち、計算の進行とともにその幅は広がって行く。

式(5)および(7)の連立系によって単一波をとり扱う場合には、各地点における波向角 α は式(5)で規定されるので、式(7)から生じる分散は波向角には影響せず、単にエネルギー分布が広がる形態をとる。本論文においては、この種の数値分散を側方分散と呼ぶことにする。

式(1)に基づく計算では、 θ 方向にも変数を離散化するので、単一の波向角を有する波も複数の波向角を有する波の重合として表現することになる。こうして計算の進行とともに、エネルギーが分布する波向角の帯域が必然的に拡大する。これを方向分散と呼んで、上述の側方分散と区別することにしよう。

3.1 側方分散

側方分散の実態を端的にとらえるには、 θ 方向のエネルギー移流が生じない条件を考えればよい。すなわち、一様水深の水域を想定し、直線状の波向線を取り扱う。この場合、 $C_{g\theta} = 0$ であり、式(1)は式(7)と全く同形となる。また、 C_g および α はともに一様であるから、

$$\frac{\partial e}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial e}{\partial y} \sin \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

x 軸方向の間隔 Δx 、 y 軸方向の間隔 Δy なる直交格子を設定し、格子点 $(i\Delta x, j\Delta y)$ におけるエネルギー密度を $e_{i,j}$ とする ($i, j = 0, 1, 2, \dots$)。ここでは実用性を重視し、格子点間のエネルギー・フラックスが波源側の格子点におけるエネルギー密度に比例するという後方差分表記を採用すれば(図-2)、 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ なる α に対して式(8)は次のように書き改められる。

$$\{(e_{i,j} - e_{i-1,j})/\Delta x\} \cos \alpha + \{(e_{i,j} - e_{i,j-1})/\Delta y\} \sin \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

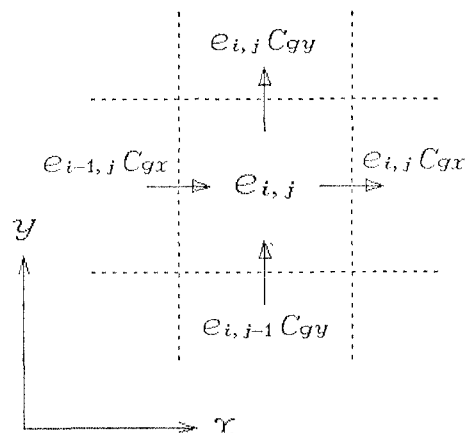


図-2 計算格子

すなわち,

$$\left. \begin{aligned} e_{i,j} &= p e_{i-1,j} + (1-p) e_{i,j-1} \\ p &= 1 / \{1 + (\Delta x / \Delta y) \tan \alpha\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

波源側の境界からの流入エネルギー・フラックスがすべて与えられれば、上式から全域の $e_{i,j}$ が逐次算定される。原点から発する1本の波向線を数値的にとり扱うには、 $e_{0,0}$ として単位のエネルギー密度が存在し、他の境界からはエネルギー供給がないという条件を与えればよい。とくに、 $\alpha=0$ あるいは $\pi/2$ ならば、エネルギーは x 軸あるいは y 軸に沿って集中し、当然のことながら分散は生じない。斜めに入射する波に対しては、式(10)の解は二項分布の形で次のように得られる。

$$e_{i,j} = \binom{N}{i} p^i (1-p)^j \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $N=i+j$ である。

波向線が座標軸に対してなす角が大きくなるにつれて数値分散の影響も増大するが、波向角 α が $\pi/8$ を超え

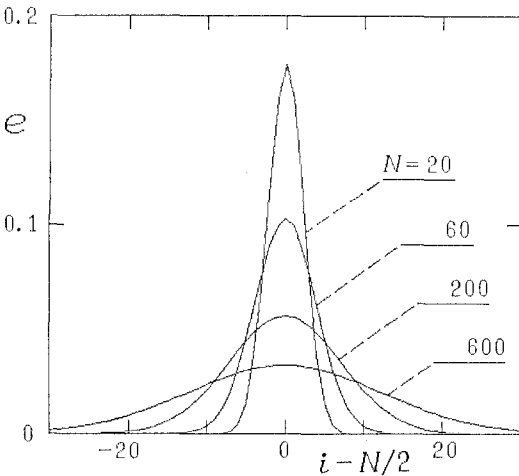


図-3 側方分散

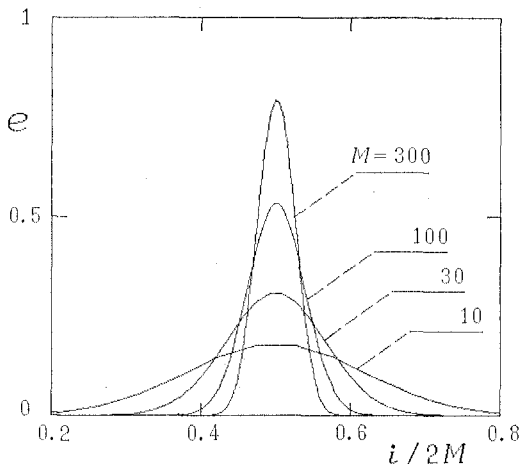


図-4 側方分散に及ぼす格子間隔の効果

ると分散幅の増大は緩やかになる。最大の分散が生じる $\alpha=\pi/4$ の場合について見ると、波峰線方向のエネルギー密度分布は、原点から離れるに従って図-3のように変化する。波の進行方向は常に一樣であるが、その存在域が広がるため、エネルギー密度は低下する。流入エネルギーが水域の境界に沿って連続的に分布する場合には、同図の密度分布をずらしながら重ね合わせることになるので、エネルギー密度の全面的低下は起こらないとしても、分布形状が漸次平坦化するものと思われる。こうした側方分散の大小は、物理的な現象とは無関係に、計算格子の設定方向によって左右されるという事実に注意されたい。

図-4は、原点から一定距離 l だけ離れた位置における波峰線方向のエネルギー分布を、きざみ数 M を変えながら計算した結果である。入射角はやはり $\pi/4$ で、波源としてはきざみ数に関係なく面積 $l^2/200$ の正方形領域に単位のエネルギー密度の分布を仮定した。格子間隔を小さくすることによって、数値分散がある程度抑えられることがわかる。

一方、計算セルの面積を一定に保ちながら x 軸ならびに y 軸方向のきざみ幅の比を変化させて同様の計算を行い、図-5を得た。きざみ幅がある程度小さければ、分布形に及ぼす格子の異方性の影響は比較的小さいようである。

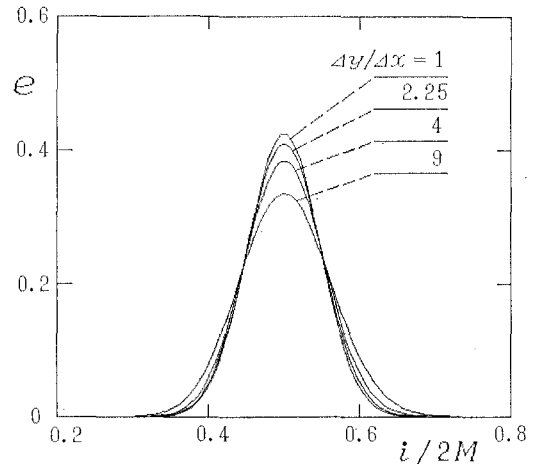


図-5 側方分散に及ぼす格子の異方性の効果

3.2 方向分散

数値的な方向分散は、空間的に1次元の屈折現象を解析することによって明確に抽出される。すべての等深線が y 軸に平行であるような水域に一樣な波が入射する状況を想定すると、等深線方向には何も変化しないので、式(1)中の y による微分項は消滅し、

$$\frac{\partial}{\partial x} (e C_g \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(e \frac{C_g}{C} \cdot \frac{dC}{dx} \sin \theta \right) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

このように問題を単純化しても、なお上式の数値解を支配する要因は、底面地形、入射波向、 x 軸方向のきざみ Δx 、 θ 軸方向のきざみ $\Delta \theta$ 等多岐に亘っている。とりわけ水深 $h(x)$ に関しては、あらゆる地形を考えることは不可能である。そこで、議論を一般化するため、 x の代りに波速 C を独立変数として用いることにすると、 $\partial/\partial x = (dC/dx)\partial/\partial C$ であるから、式 (12) は

$$\frac{\partial}{\partial C}(eC_g \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(e \frac{C_g}{C} \sin \theta\right) = 0 \quad \dots\dots (13)$$

と書かれる。さらに、深海波速 C_0 を用いて

$$C' = C/C_0 = \tanh kh \quad \dots\dots (14)$$

$$n = C_0/C = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-C'^2}{2C'} \cdot \log \frac{1+C'}{1-C'} \right) \quad \dots (15)$$

等の無次元量を定義すれば、

$$\frac{\partial}{\partial C'}(enC' \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(en \sin \theta) = 0 \quad \dots\dots (16)$$

ただし、 k は波数であり、無次元波速 C' の値域 $0 \sim 1$ が水深 h の全領域 $0 \sim \infty$ に対応することになる。 $C'-\theta$ 平面内で現象を見ると、式 (16) はエネルギー密度 $e(C', \theta)$ が $(nC' \cos \theta, n \sin \theta)$ なる群速度で輸送されることを示している。

さて、 C' のきざみ幅を $\Delta C'$ とし、前項の式 (8) におけると全く同様の考え方に立って式 (16) を差分表記すると、

$$\begin{aligned} & (e_{i,j} n_{i+1/2} C'_{i+1/2} - e_{i-1,j} n_{i-1/2} C'_{i-1/2}) \cos \theta_j / \Delta C' \\ & + n_i (e_{i,j} \sin \theta_{j+1/2} - e_{i,j-1} \sin \theta_{j-1/2}) / \Delta \theta = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (17)$$

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} e_{i,j} &= P_{i,j} e_{i-1,j} + Q_{i,j} e_{i,j-1} \\ P_{i,j} &= n_{i-1/2} C'_{i-1/2} \cos \theta_j / R_{i,j} \\ Q_{i,j} &= (\Delta C' / \Delta \theta) n_i \sin \theta_{j-1/2} / R_{i,j} \\ R_{i,j} &= n_{i+1/2} C'_{i+1/2} \cos \theta_j + (\Delta C' / \Delta \theta) n_i \sin \theta_{j+1/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (18)$$

ここでは、係数 $P_{i,j}$ および $Q_{i,j}$ が定数ではないため、エネルギーの移流経路は曲線状となる。 $C'-\theta$ 平面に $\{P_{i,j}, Q_{i,j}\}$ ベクトル図を描くと、これらのベクトルの包絡線がすべての可能な波向角変化の状況を表わすことになる。

沖側端 $C'=1$ における1つの計算点で帯域幅 $\Delta \theta$ の方形スペクトルを与えた場合に、上式から計算されるスペクトル形状の変化の様子を図-6に示した。ここでは表示の便宜のために、鉛直軸にエネルギー・フラックスの絶対値 eC_g をとることによって浅水変形の効果が除去されている。数値的な方向分散は計算開始直後の段階で大きく現われ、その後分散幅はさらに拡大するが、極浅域に入るとすべての波が等深線に対して垂直に近い方向に進行するため、方向スペクトルは再び収束に向かう。ただし、これは波向線の取れんを意味するものでは

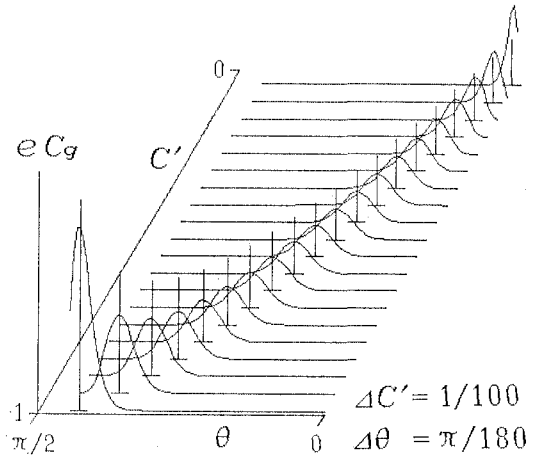


図-6 方向分散

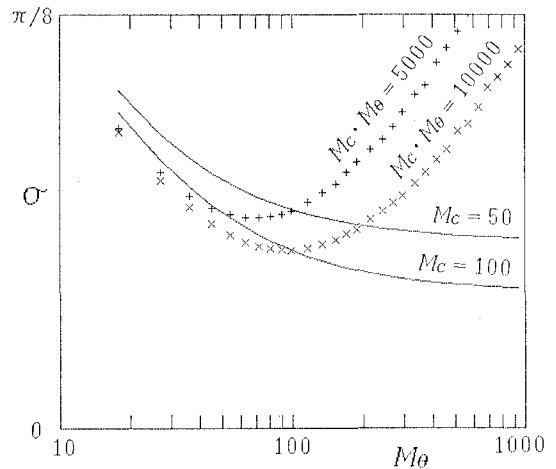


図-7 方向分散に及ぼす格子間隔の効果

ない。有限幅の波の伝播を考えれば、その幅は方向分散によって空間的に拡大し、一樣斜面上では収束することはない。同図中の鉛直線は解析解を示す線スペクトルであり、その位置は数値解のスペクトルのピーク位置にはほぼ符合している。

入射角範囲 $70 \sim 80^\circ$ で一樣なエネルギー密度を有する波について、無次元波速 C' の変域 $0 \sim 1$ を M_C 等分、波向角 θ の変域 $0 \sim \pi/2$ を M_θ 等分した格子による計算を実行し、方向スペクトルの帯域幅 $\sigma(C')$ の最大値がどのように変化するかを調べた結果が図-7である。ここに、ある地点における方向スペクトルの重心位置を θ_0 として

$$\sigma(C')^2 = \int_0^{\pi/2} (\theta - \theta_0)^2 e(C', \theta) d\theta \bigg/ \int_0^{\pi/2} e(C', \theta) d\theta \quad \dots\dots (19)$$

である。深海条件 ($C'=1$) から計算を開始した場合、分散幅 $\sigma(C')$ は概して $C'=0.8$ 前後の位置で最大となるが、波向角のきざみを粗くすると $C'=0.6$ 付近まで増

大を続ける。

図—7 によれば、一定の M_G に対し、 M_θ が 100 を超えると分散幅の減少は顕著でなくなる。また、総計算点数を一定としたときの分散幅には極小値が存在する。これは、方向分散の抑制のみを考えれば、与えられた総計算点数に応じて最適な C' および θ 方向のきざみ幅が存在することを示唆している。空間 2 次元の解析では、側方分散の影響をも併せて考慮しなければならない場合が多いので、空間格子間隔の縮小にこれ以上の比重を持たせる必要があろう。

4. 結 論

以上の議論から導かれる主要な結論は次の通りである。

- 1) エネルギー平衡方程式を数值的に解く場合、不可避免的に計算上の側方分散が生じる。これを抑制するためには、まず波向線が格子線に対してなす角がなるべく小さくなるように計算格子を設定すること、ついで格子間隔を十分小さくすることが重要である。

- 2) とくに Karlsson 方程式を解く場合には、数値的な方向分散がこれに加わるので、注意を要する。
- 3) 波の方向スペクトルをとり扱う特別の必要性がない限り、Karlsson 方程式に基づく計算は演算量の点でも不利である。

謝 辞

本稿のとりまとめに先立ち、試算段階で尽力を願った佐々木知和氏（当時筑波大学学生）に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Karlsson, T.: Refraction of continuous ocean wave spectra, Proc. ASCE, Vol. 95, No. WW4, pp. 437~447, 1969.
- 2) 丸山康樹・平口博丸・鹿島遼一：不規則波に対する屈折計算法の適用性，電力中央研究所・研究報告，No. 383034, 47 p., 1983.
- 3) Noda, E. K., C. J. Sonu, V. C. Rupert and J. I. Collins: Nearshore circulations under sea breeze conditions and wave-current interactions in the surf zone, Tetra Tech. Rep., No. TC-149-4, 216 p., 1974.