

二次元傾斜海浜上における波による質量輸送に関する 理論的研究 (第2報)

平 山 秀 夫*

1. 結 論

波による質量輸送現象の究明は、海浜流系や海浜地形の変形機構を探る上で不可欠な要素であって、従来から多くの研究がなされてきていることは周知のとおりである。しかしながら、これらの研究のほとんどは、水平床上の場合の結果であって、傾斜面上での質量輸送に関する研究はあまり見られず、特にその理論的取扱いとしては、Bijker ら¹⁾の研究や平山²⁾の研究があるにすぎなく、しかも、それらの理論結果は、両者とも実験値との差異が著しく、現象を十分に説明しきれていないように思われる。

本研究では、このような観点から、前報²⁾に引き続いて、傾斜面上での質量輸送現象を理論的に解明しようとするものである。特にここでは、まず最初に、前報に示した傾斜面上での質量輸送に関する基礎式の再検討を行うとともに、従来の実験値と比較してその結果の妥当性を検証する。次いで、本理論の根本である傾斜底面上における波動境界層厚の場所的変化特性についても若干の検討を加える。

2. 傾斜面上での質量輸送に関する基礎式の再検討

前報²⁾で、図-1 に示すような座標系の下に、Bijker¹⁾らと類似な方法に基づいて境界層内の運動量方程式から質量輸送速度の基礎式を導いた。それが Bijker らの方法と異なる主要な点は、①境界層内部での圧力勾配に重力の影響を考慮したこと、②層内水平流速の微小変化に鉛直速度勾配 $\left(\frac{\partial u}{\partial z} dz\right)$ の影響を考慮したこと、③傾斜面上での底面波動境界層厚が変化すると仮定したこと、などであった。しかしながら、得られた理論結果はより実際的にはなかったもの、必らずしも実験値を説明できるものではなかった。その後、本理論の欠陥を見出すべく基礎方式の再検討を試みてきた。その結果、圧力勾配 $(\partial \bar{p} / \partial x)$ の表示式 (前報²⁾の式 (8)) に若干の修正を必要とすることが明らかになった。すなわち、図-1 に示

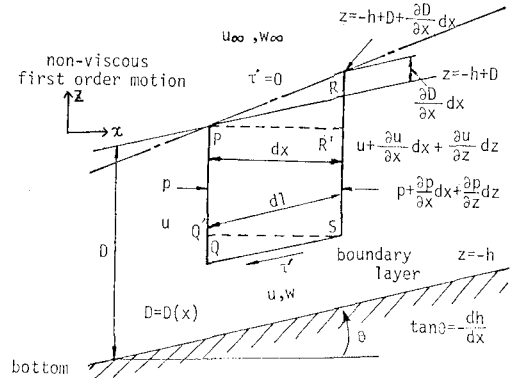


図-1 境界層内の微小要素に作用する力

すように、微小要素 PQRS における運動量方程式を立てるにあたって、面 PQ に作用する圧力 (p) に対して面 RS の位置での圧力は、厳密には $\frac{\partial p}{\partial z} dz$ をも考慮した $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right)$ とすべきであると思われる。

このことから、前報²⁾で示した圧力勾配の関係式 (式 (8)) は、次式のようにになる。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial v_{\infty}^2}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $v_{\infty}^2 = u_{\infty}^2 + w_{\infty}^2$ (u_{∞} , w_{∞} : 境界層外縁での水平及び鉛直水粒子速度) である。 w_{∞} を微小として無視すれば、式 (1) は結局 Bijker ら¹⁾が示した $\partial p / \partial x$ の表示式と全く同じになる。

以上の修正の下に、前報²⁾と全く同様にして、微小要素 PQRS についての運動量方程式から傾斜面上における質量輸送速度を導く。

まず、微小矩形の各面に作用する圧力及びせん断力による x 方向の外力の総和 (F) は、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} F = & p \times \overline{PQ} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \times \overline{RS} \\ & - p \times \overline{QR} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \times \overline{RR'} \\ & - \tau' dx \\ \div & - \int_z^{-h+D} \frac{\partial p}{\partial x} dx dz - \tau' dx \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 大阪府立工業高等専門学校教授

ここで, $\overline{PQ}$, $\overline{QQ'}$, etc. は各地点間の長さを示す.

一方, x 方向の運動量の変化の総和 (M) は,

$$\begin{aligned} M = & \rho \left\{ u^2 \cdot \overline{PQ} - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 \cdot \overline{RS} \right\} \\ & + \rho \{ uw - (uw)_\infty \} dx \\ & \div - \rho \int_z^{-h+D} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial z} \tan \theta \right) dx dz \\ & - \rho u^2 \frac{\partial D}{\partial x} dx + \rho \{ uw - (uw)_\infty \} dx \quad \dots (3) \end{aligned}$$

となる. 従って, これらの式 (2), (3) の関係から時間平均の運動量方程式 ($\bar{F} + \bar{M} = 0$) が次式のように導出される.

$$\begin{aligned} & - \int_z^{-h+D} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dz - \frac{\tau'}{\rho} \\ & - \int_z^{-h+D} \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \tan \theta \right) dz \\ & - \bar{u}^2 \cdot \frac{\partial D}{\partial x} + \{ \bar{uw} - (\bar{uw})_\infty \} = 0 \quad \dots (4) \end{aligned}$$

さらに, $\bar{\tau} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \bar{\tau}' \cos \theta$ の関係を用いて, 式 (4) から Euler の定常流成分 $\bar{u}$ を算出し, かつ Stokes' drift $\bar{u}_s$ ($= \frac{\partial u}{\partial x} \int^t u dt + \frac{\partial u}{\partial z} \int^t w dt$) を考慮すれば, 結局, Lagrange 的質量輸送速度 $\bar{U}$ の基礎式は次式のように求まる.

$$\begin{aligned} \bar{U} = & \bar{u} + \bar{u}_s \\ = & \left[\frac{1}{\nu} \int_{-h}^z \{ \bar{uw} - (\bar{uw})_\infty \} dz \right. \\ & + \frac{1}{\nu} \int_{-h}^z \int_z^{-h+D} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \right) dz dz \cdot \cos \theta \quad \textcircled{1} \\ & - \frac{1}{\nu} \int_{-h}^z \int_z^{-h+D} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \sin \theta \cdot dz dz \quad \textcircled{2} \\ & \left. - \frac{\cos \theta}{\nu} \frac{\partial D}{\partial x} \int_{-h}^z \bar{u}^2 dz + \frac{\partial u}{\partial x} \int^t u dt + \frac{\partial u}{\partial z} \int^t w dt \quad \textcircled{3} \right] \quad \dots (5) \end{aligned}$$

上式中の ①~③ の ~~~ 線部分が Bijker らの結果と異なるところである. ここで, ν : 動粘性係数, D : 境界層厚 [= $\delta \alpha$, α : 変数 (水平床上では $\alpha \doteq 4.0$), $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}$, $\sigma = 2\pi/T$, T : 周期], $\tan \theta$: 底面勾配, (u, w) は境界層内における水平及び鉛直水粒子速度であって, それぞれ次式のように与えられる.

$$u = A(x) \{ \cos \phi - e^{-\mu} \cos (\phi - \mu) \} \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned} w = & A \delta k \left[\left\{ \frac{1}{2} e^{-\mu} (\sin \mu + \cos \mu) - \frac{1}{2} \right\} \cos \phi \right. \\ & + \left. \left\{ -\mu + \frac{1}{2} e^{-\mu} (\sin \mu - \cos \mu) + \frac{1}{2} \right\} \sin \phi \right] \\ & - \delta \frac{dA}{dx} \left[\left\{ \mu - \frac{1}{2} e^{-\mu} (\sin \mu - \cos \mu) - \frac{1}{2} \right\} \cos \phi \right. \\ & + \left. \left\{ \frac{1}{2} e^{-\mu} (\sin \mu + \cos \mu) - \frac{1}{2} \right\} \sin \phi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - A \frac{dh}{dx} [(-e^{-\mu} \cos \mu + 1) \cos \phi - e^{-\mu} \sin \mu \sin \phi] \\ & \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここに, $\mu = (h+z)/\delta$ (h : 水深), $\phi = \sigma t - \phi(x)$, $\partial \phi / \partial x = k$ ($k = 2\pi/L$, L : 波長), $A(x) = \hat{u}_\infty = H_0 \sigma [2 \cosh^2 kh / (2kh + \sinh 2kh)^{1/2} \sinh kh = H_0 \sigma k_s / (2 \sinh kh)$ (k_s : 浅水係数, $\hat{u}_\infty$: u_∞ の最大値) である.

次に, 上記の質量輸送の基礎式 (式 (5)) 中の (u, w) に式 (6) 及び (7) の値を代入して整理すれば, 結局, 底面境界層内及びその外縁における Lagrange 的質量輸送速度 $\bar{U}$ 及び $\bar{U}_\infty$ は, それぞれ次式のように求まる.

$$\begin{aligned} \bar{U} = & \frac{A^2 k}{\sigma} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \right. \\ & \times \{ \mu e^{-\mu} (\sin \mu + \cos \mu) - e^{-\mu} \sin \mu \} \\ & - (1 + \cos \theta) e^{-\mu} \cos \mu + \frac{1}{4} (2 + \cos \theta) e^{-2\mu} \\ & + \frac{1}{4} (2 + 3 \cos \theta) \Big] \\ & + \frac{A}{\sigma} \frac{dA}{dx} \left[\frac{1}{2} (\cos \theta - 1) \right. \\ & \times \{ \mu e^{-\mu} (\sin \mu - \cos \mu) + e^{-\mu} \cos \mu \} \\ & + 2 \cos \theta \cdot e^{-\mu} \sin \mu + \frac{1}{4} (2 + \cos \theta) e^{-2\mu} \\ & - \frac{3}{4} \cos \theta \Big] \\ & - \frac{A^2}{\sqrt{2} \nu \sigma} \sin \theta \left\{ -e^{-\mu} (\cos \mu - \sin \mu) \right. \\ & + \frac{1}{2} e^{-2\mu} + \frac{1}{2} \Big\} \\ & - \frac{\cos \theta}{\sigma} \frac{dA}{dx} A^2 \left\{ \mu + e^{-\mu} (\cos \mu - \sin \mu) \right. \\ & - \frac{1}{2} e^{-2\mu} - \frac{1}{2} \Big\} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_\infty = & \frac{5}{4} \frac{A^2 k}{\sigma} \left[\frac{1}{5} (2 + 3 \cos \theta) \right. \\ & - \frac{3}{5} \cos \theta \cdot \frac{1}{Ak} \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dx} - \frac{1}{5k} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \sin \theta \\ & - \frac{4}{5} \frac{\cos \theta}{A^2 k} \frac{dA}{dx} A^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \Big] \quad \dots (9) \end{aligned}$$

特に式 (9) は, 水平床上 ($\theta = 0$) の場合には, Longuet-Higgins³⁾ が示した結果と全く一致し, 式中の第2項以下が斜面勾配や境界層厚の変化を考慮することによって新たに出現した結果である.

3. 底面波動境界層厚の変化とその推定式

(1) 境界層厚が平均水位の変化に伴って変化すると仮定した場合

前述のように, 式 (8) 及び (9) 中には, 境界層厚の変化を表わす α 及び $d\alpha/dx$ を含んでいるので, それをいかにして推定するかということが問題である. こ

では、まず最初の試みとして、境界層厚が傾斜面上での平均水位の変化に応じて変化すると仮定する。すなわち、平均水位の変化量を ξ として、 $\frac{\partial D}{\partial x} \propto \frac{d}{dx}(h+\xi)$ と仮定すれば、 α 及び $d\alpha/dx$ は次式のように表わされる。

$$\alpha = 4.0 + \frac{\beta \xi}{\delta \gamma} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\beta}{\delta} \left(1 + \frac{d\xi}{dh} \right) \frac{dh}{dx} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 β , γ は任意定数であって、実験値から推定されるものである。

この式 (10), (11) を用いて境界層外縁での質量輸送速度 $\bar{U}_0$ を式 (9) から算定した結果の1例を図-2に示す。この図から明らかなように、 β の値の若干の変動に対して理論値は敏感に変化するが、適当な β , γ の値を選べば、理論値は、実験値(図中●印)をかなり良く説明できるように思われる。なお、図中には、比較のために、従来示されている水平床における Longuet-Higgins³⁾ の理論結果を1点鎖線で、傾斜面上における Bijker ら¹⁾ のそれを破線で示している。

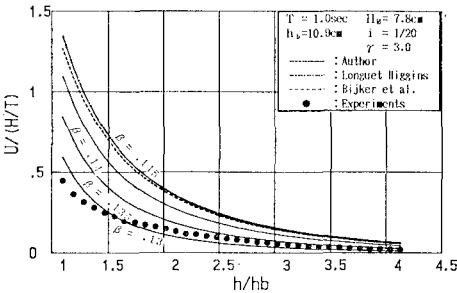
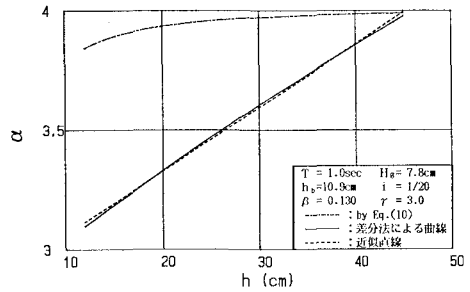


図-2 係数 β による理論値の変化

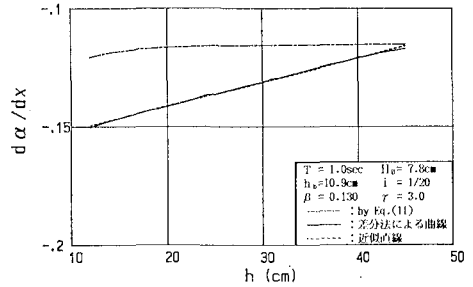
(2) 差分法に基づく推定法

ここでは、質量輸送速度の従来の実験値を用いて、式 (9) から逐次計算法に基づいて境界層厚の場所的变化特性を示す (α , $d\alpha/dx$) の値を逆算してみた。それらの結果の1例を示したのが図-3である。図中の1点鎖線は前述(1)で示した仮定式 (10) 及び (11) の結果を、実線が差分法に基づく計算結果、破線はその差分法に基づく結果の回帰直線を示す。これらの図からも明らかなように、全般的に、差分法による結果は、斜面勾配や波の特性にかかわらず、式 (10) 及び (11) で表わされる仮定式のそれとは若干異なる分布形を示しているが、一般的に、 α 及び $d\alpha/dx$ の両者とも近似的に水深 h の1次関数式で表示されるように思われる。

そこで、差分法に基づいて得られた



(1) α の値の変化



(2) $d\alpha/dx$ の値の変化

図-3 水深の変化に伴う境界層厚の変化

$d\alpha/dx$ 及び α の値の分布曲線を次式に示すように、 h の1次式で直線近似してみた。

$$\frac{d\alpha}{dx} = ah + b \dots\dots\dots (12)$$

$$\alpha = ch + d \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 a , b , c , d に任意定数であって、差分曲線(図中実線)の回帰直線(破線)から決定される定数である。

このような方法に基づいて、各実験条件ごとに定数を総めて示したものが表-1である。この表から明らかなように、係数 a , c は、実験条件にかかわらず全般的に正の値をとり、かつ a の値は c のそれに比べてオーダー

表-1 直線近似式より得られた各係数の値

勾配	周期 (sec)	沖波々高 (cm)	a	b	c	d	d'
1/20	1.0	7.8	0.00102	-0.16165	0.02662	2.79619	2.81629
	1.5	10.2	0.00058	-0.12437	0.02159	3.01890	3.05890
	"	5.2	0.00074	-0.13234	0.02234	2.98836	2.98836
	2.0	4.7	0.00046	-0.10827	0.01906	3.13300	3.13300
1/10	1.0	7.5	0.00244	-0.35067	0.02816	2.72896	2.74896
	"	10.6	0.00229	-0.34429	0.02737	2.75784	2.78784
	"	13.9	0.00219	-0.33865	0.02682	2.77951	2.80951
	1.2	5.9	0.00195	-0.30955	0.02544	2.84949	2.87949
	"	7.5	0.00197	-0.31124	0.02539	2.84979	2.87979
	"	10.9	0.00182	-0.30511	0.02509	2.86132	2.89132
	1.5	7.8	0.00150	-0.26779	0.02254	2.97862	3.00862
	2.0	4.8	0.00109	-0.22566	0.01942	3.11712	3.13712

一が1桁小さくはば0に近い値をとることが明らかである。

(3) 境界層厚の推定式

前掲の表-1に示した定数 (a, b, c, d) の値に基づいて式 (12) 及び (13) から $d\alpha/dx$ 及び α の値を算定し、それを用いて式 (9) から計算される境界層外縁の質量輸送速度の理論値は実験値とかなりの差異がある場合がある。そのような場合には、定数 d だけを変化させて実験値により適合するように d の値を調整することができる。そのような方法で調整された d の値を、前掲の表-1中の d' の欄に示す。

次に、このようにして推定された最適定数 ($a, b, c, d'(d)$) が、波の特性 (例えば、 $H_0/L_0, H_0, T$, etc.) とどのような関係にあるかを調べてみた。その結果、図-4 (1)~(4) に示すように、これらの定数は波の周期 T との相関が最も高く、特に、定数 a, b, c については T の1次関数で、一方、定数 d については T の2次式でほぼ近似できることが明らかになった。

そこで、図-4に示した定数 a, b, c, d と周期 T との関係を最小2乗法を用いて最適直線 (d については2次曲線) を推定してみた。その結果、これらの定数は、斜面勾配別に次式に示すような関係式で表わされるように思われる (図中の実線が勾配 $i=1/20$ の場合の結果、一点鎖線が $i=1/10$ の場合の結果を示す)。

$i=1/20$ の場合 (cm·sec 単位):

$$\left. \begin{aligned} a &= -0.00055146T + 0.0015282 \\ b &= 0.053382T - 0.21773 \\ c &= -0.0075613T + 0.033745 \\ d &= -0.19596T^2 + 0.90459T + 2.1077 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$i=1/10$ の場合 (cm·sec 単位):

$$\left. \begin{aligned} a &= -0.0012340T + 0.0034654 \\ b &= 0.12112T - 0.45953 \\ c &= -0.0081663T + 0.035337 \\ d &= -0.23925T^2 + 1.08434T + 1.9246 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

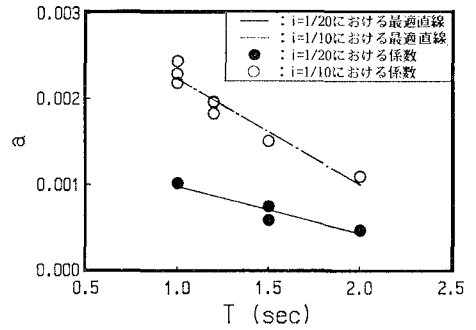
ところで、これらの式 (14) 及び (15) を用いて式 (12) 及び (13) から $d\alpha/dx$ 及び α の値を求め、さらにこれらの値を式 (9) に代入して求めた $\bar{U}_\infty$ の理論結果は、実験値と若干の差異がある場合もある。そのような場合には、これらの係数を若干補正して、より実験値に適合するような値を試行錯誤的に求めて決定した。

このようにして算定された最終的な定数 (a, b, c, d) を用いて、 $d\alpha/dx$ 及び α の値を推定した結果は、勾配別に次式のように示される。

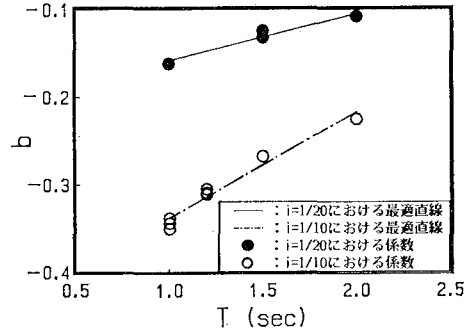
$i=1/20$ の場合 (cm·sec 単位):

$$\frac{d\alpha}{dx} = (-0.00055146h + 0.053382)T + 0.0015282h - 0.21773 \dots\dots\dots (16)$$

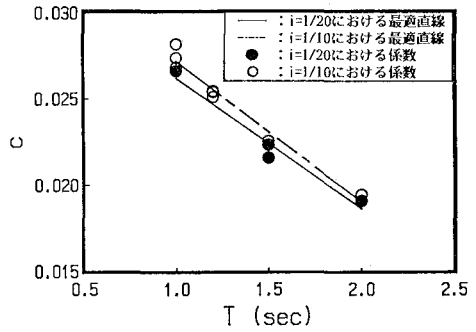
$$\alpha = 0.46054T^2 + (-0.0075613h - 1.0207)T$$



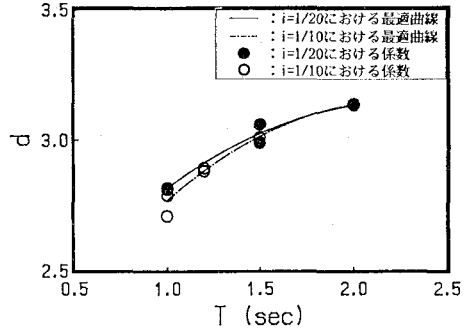
(1) 定数 a の変化



(2) 定数 b の変化



(3) 定数 c の変化



(4) 定数 d の変化

図-4 差分近似から求まる定数の周期 T による変化

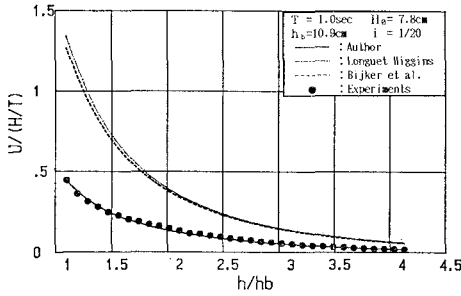
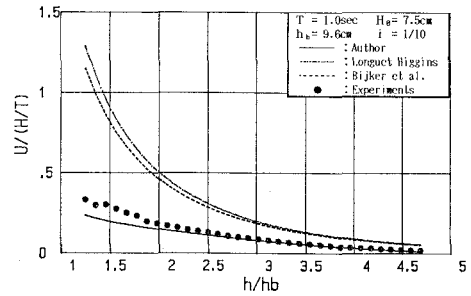
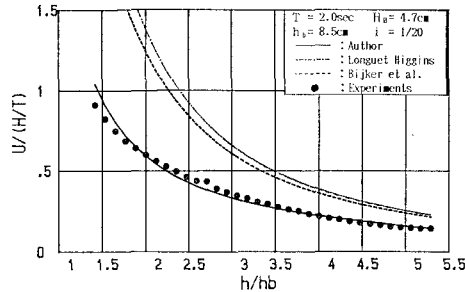
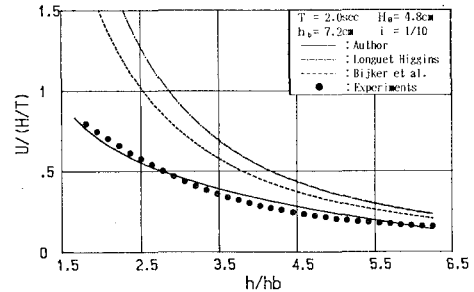
(1) $i=1/20$ ($T=1.0$ sec) の場合(3) $i=1/10$ ($T=1.0$ sec) の場合(2) $i=1/20$ ($T=2.0$ sec) の場合(4) $i=1/10$ ($T=2.0$ sec) の場合

図-5 境界層厚の推定式による質量輸送速度の理論値と実験値の比較

$$+0.033745h+3.4384 \dots\dots\dots(17)$$

$i=1/10$ の場合 (cm・sec 単位):

$$\frac{d\alpha}{dx} = (-0.0012340h + 0.12112)T \\ + 0.0034654h - 0.45953 \dots\dots\dots(18)$$

$$\alpha = 0.55470T^2 + (-0.0081663h - 1.2576)T \\ + 0.035337h + 3.5420 \dots\dots\dots(19)$$

従って、これらの推定式を用いれば、傾斜面上における砕波点までの底面境界層厚 $D (= \delta\alpha)$ の値は、斜面勾配別に次式のような近似式で表わされるように思われる。

$i=1/20$ の場合 (cm・sec 単位):

$$D = \delta[0.46054T^2 + (-0.0075613h - 1.0207)T \\ + 0.033745h + 3.4384] \dots\dots\dots(20)$$

$i=1/10$ の場合 (cm・sec 単位):

$$D = \delta[0.55470T^2 + (-0.0081663h - 1.2576)T \\ + 0.035337h + 3.5420] \dots\dots\dots(21)$$

そこで、以上に示した推定式の妥当性を検証するために、式 (16)~(19) を用いて da/dx 及び α を計算し、それを式 (9) に代入して得られる質量輸送速度 ($\bar{U}_\infty$) の理論値と実験値を、波の周期や斜面勾配別に比較して示したものが 図-5 (1)~(4) である。図中の実線が本推定式を用いた場合の理論結果、破線は Bijker らの理論結果、1点鎖線は水平床上における Longuet-Higgins の理論結果である。これらの図から明らかなように、本理論結果は、 da/dx 及び α を式 (16)~(19) のような近似式で表わせば、実験値をかなり良く説明できるよ

うに思われる。

4. 結 論

1) 前報で導いた理論式の欠陥を指摘し、新たに傾斜面上での境界層内及び外縁での質量輸送速度の理論式を式 (8) 及び (9) のように修正した。

2) 傾斜面上での質量輸送の理論展開においては、境界層厚の場所的变化の考慮が特に重要であって、その推定式は、勾配別に式 (20) 及び (21) のような近似式で表わされ、それに基づく質量輸送の理論値は実験値を十分説明できるように思われる。

最後に、常日頃、暖かい御指導を賜っている京都大学名誉教授岩垣雄一先生及び解析や図面の作成に協力を惜しまなかった福島博行氏 (府立高等学校技師) や中川勝寛君 (元府立高専学生) に心から感謝の意を表わすと共に、本研究は文部省科学研究費一般研究 (B) (代表者: 岩垣雄一教授) による研究の1部であることを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Bijker, E. W., et al.: Mass transport in gravity waves on a sloping bottom, 14th ICCE, pp. 447~465, 1974.
- 2) 平山秀夫: 二次元傾斜海浜上における波による質量輸送に関する理論的研究, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 49~53, 1984.
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans. Royal Soc., Series A, No. 903, Vol. 245, pp. 535~581, 1953.