

有限振幅波動下における底面摩擦係数の評価に関する研究

浅野敏之*・雨宮 功**・岩垣雄一***

1. はじめに

波動場における底面摩擦係数を評価する際には, Jons-son¹⁾ や Kamphuis²⁾ による公式がよく用いられているが, こうした公式は正弦振動流を用いた実験結果に基づいて導かれたものであり, 底面近傍の水粒子運動に含まれる有限振幅性の効果については全く考慮されていない. また乱流境界層方程式の式に含まれる非線形性の効果について考察した研究もほとんどなく, わずかに Johns³⁾, Trowbridge-Madsen⁴⁾ による解析があるにすぎない. また数値解析では, 滝川・田淵⁵⁾ による一様水深ならびに一様斜面上の層流および乱流境界層を解析した研究があり, そこでは波の諸元と底面せん断応力の岸向き・沖向きの割合等が議論されている. しかしこうした研究においても Reynolds 応力項を渦動粘性係数を導入して準線形化したものが多く, 境界層方程式中の非線形性のすべてについて考慮されているわけではない.

このように, 境界層外縁での流速変動に含まれる有限振幅性や, 境界層方程式中の非線形性が, 底面摩擦係数に与える効果についての説明はいまだ十分ではない. 最近, 著者らは有限要素法を用いて上記の課題を検討し, 上述の二つの効果が底面近傍の水粒子速度分布や底面摩擦係数に大きく影響することを示したが⁶⁾, そこで用いた波動理論の適用性や, 結果の整理法にいくらか問題が残されていた. 本研究は, 前報の計算を精密化するとともに, 底面摩擦係数の特性の変化を, 摩擦係数及びエネルギー減衰係数の形で評価したものである.

2. 乱流境界層方程式の非線形計算

2.1 基礎方程式と無次元化

非定常な非圧縮性流体に対する 2 次元の乱流境界層方程式は, Reynolds 応力を Prandtl の混合距離理論によって表示すると次式で与えられる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\kappa z)^2 \frac{\partial u}{\partial z} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで, 波の進行方向に x 軸, 底面から鉛直上方に z 軸を取り, おのおの方向における速度成分を u および w とする. また, t : 時間, p : 圧力, ρ : 流体の密度, κ : カルマン定数である. 右辺第 1 項の圧力項は, 境界層外縁の水粒子速度 u_p から次式で計算される.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

さらに, 連続式と連立することにより, 未知量 u, w が求められる.

いま, 水平方向の水粒子速度の代表値として $\bar{u}$, 波数 k , 及び波速 c を導入して,

$$u = \bar{u} \bar{u}, \quad w = (\bar{u}/c) \bar{u} \bar{w}, \quad x = \xi/k, \quad z = (\bar{u}/c) \zeta/k \\ t = \tau/\sigma, \quad u_p = \bar{u}_p \bar{u} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と置き換えると, (1) 式は次式で表される.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \epsilon \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \right) \\ = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial \tau} + \epsilon \bar{u}_p \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \kappa^2 \zeta^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \right| \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに ϵ は $\bar{u}/c$ であり, 境界層方程式の移流項にかかる微小量であることがわかる. また, 以下では (3) 式の水粒子速度の代表値 $\bar{u}$ として, 境界層外縁における水粒子速度振幅の基本周波数成分 $\bar{u}_p$ で与えることにする.

境界層の解析においては, いくつかの微小パラメータが現れる⁷⁾. 境界層外縁での水粒子速度を有限振幅波動理論によって与える際には, ストークス波に対しては ka , ハイパボリック波に対しては H/h が展開パラメータとして現れる. また粗度高さ z_0 ($z_0 = k_b/30$, k_b : Nikuradse の粗度高さ) の無次元量は, (3) 式の z の無次元表示に従えば,

$$\zeta_0 = \frac{\bar{u}_p}{\sigma z_0} \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられることがわかる.

以上より, 計算に関与する微小量は, 境界層厚 δ_w が波長に比して十分小さいとすると, $\epsilon = \bar{u}_p/c$, ka , H/h , $\bar{u}_p/\sigma z_0$ であるが,

* 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 兵庫県庁

*** 正会員 工博 名城大学教授 理工学部土木工学科

$$\varepsilon = \hat{u}_p / c = ak \frac{\cosh k\delta_w}{\sinh kh} \simeq ak / \sinh kh$$

$$= \text{func.}(ka, H/h) \dots\dots\dots (6)$$

であるから、結局、計算結果は ka (あるいは H/L)、 H/h 、 $\hat{u}_p/\sigma z_0$ をパラメータとして表されることがわかる。

2.2 計算方法および計算条件

計算は有限要素法によって行った。解析領域として、水平方向に1波長分、鉛直方向に境界層厚をとり、それぞれ40、10分割して、全800個の三角形要素群を設定した。底面付近の水粒子速度をより精密に求めるために、メッシュを底面近くで細かくとった。計算の詳細については、前報⁶⁾を参照されたい。

底面せん断応力 τ_b を求めるためには、底面での水粒子速度の z 方向勾配 $\partial u / \partial z|_{z=z_0}$ を計算する必要がある。しかし、水粒子速度は各節点において離散的にしか求められていないので、ここではスプライン関数によって、 $\partial u / \partial z|_{z=z_0}$ を算出し、これより τ_b を求めることにした。

境界層外縁流速および圧力を与えるにあたっては、アーセル数 U_r が25以下の場合については、ストークス波の3次近似解を、 U_r が25以上の場合には、クノイド波の代わりに岩垣・塩田⁸⁾が導いたハイパボリック波の2次近似解を与えた。こうした波動理論の適用限界は、水面での境界条件の適合性から定められたものであり、水粒子速度場を表現するにあたっては、必ずしもこれをそのまま適用できないことが知られているが^{9),10)}、この点に関する信頼すべき知見もないことから、ここでは $U_r=25$ をもって適用する波動理論を区別した。また計算条件は Kamphuis²⁾ による領域区分で、粗面乱流領域に入るよう定めた。

図-1は、底面における水粒子速度の波形について、ストークス波理論とハイパボリック波理論による計算結果を比較したものである。

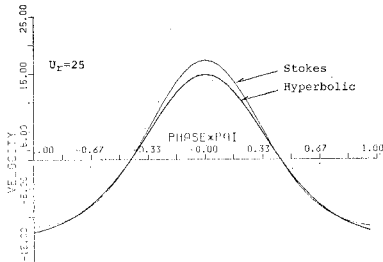


図-1 水粒子速度の位相変化

2.3 摩擦係数の定義

本研究は、波の有限振幅性や方程式中の非線形性が、底面摩擦力に与える効果を、摩擦係数の形で評価しようとするものである。そのためには実用上使いやすく、さらに定義の仕方に結果が依存しないようなものをとる必

要がある。波の1周期間における底面摩擦力の最大値 $\tau_{b, \max}$ は、底質の移動限界などを論ずる上で重要な指標と考えられることから、まず $\tau_{b, \max}$ と境界層外縁における波の峰での水粒子速度 $u_{p, c}$ を結ぶ係数として摩擦係数 f_w を定義した。すなわち、

$$\tau_{b, \max} = \frac{\rho}{2} f_w u_{p, c}^2 \dots\dots\dots (7)$$

次に、底面せん断応力 τ_b の波の1周期間の平均値 $|\tau_b|$ から摩擦係数 $\bar{f}_w$ を次式のように定義した。

$$|\tau| = \frac{\rho}{2} \bar{f}_w \hat{u}_p^2 \dots\dots\dots (8)$$

ここでは、水粒子速度の代表値として、境界層外縁における水粒子速度の基本周波数成分の振幅 $\hat{u}_p$ を取るのが妥当であろう。

次にせん断応力によってなされる仕事 $\bar{P}$ について検討する。層流境界層の場合には、微小振幅波の範囲で $\bar{P}$ は次式で算出されることが明らかにされている¹¹⁾。

$$\bar{P} = \overline{\tau_b \hat{u}_p \cos \sigma t} \dots\dots\dots (9)$$

しかしながら、 $\bar{P}$ は厳密には、

$$\bar{P} = - \int_{-h}^{\eta} \tau \frac{\partial u}{\partial z} dz \dots\dots\dots (10)$$

で計算されなければならない。上式は簡単な変形を行うと、

$$\begin{aligned} \bar{P} &= - \int_{-h}^{\eta} \tau \frac{\partial u}{\partial z} dz = - \left[\tau u \right]_{-h}^{\eta} - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \\ &= \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \simeq \int_{-h}^{\delta_w} \frac{\partial \tau}{\partial z} u dz \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

と変形される。この $\bar{P}$ の計算結果から、次式のようなエネルギー減衰係数 f_e を定義する。

$$f_e = \frac{3\pi \bar{P}}{2\rho \hat{u}_p^3} \dots\dots\dots (12)$$

3. 実験結果との比較

ここでは著者ら¹²⁾が、レーザードップラー流速計を用いて底面近傍の水粒子速度を実測した結果との比較から、本解析の妥当性を検討する。

図-2は、著者らによる実験結果と計算結果との比較の一例を示したものである。この場合の実験条件は水深 $h=30$ cm、波高 $H=8.2$ cm、周期 $T=1.67$ sec で、底面には $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ の断面を持つ角柱を 15 mm 間隔に並べた棧粗度を敷設している。また図中には、(1)式の代わりに移流項を省略し、さらに Reynolds 応力項を摩擦速度を導入して線形化した方程式に基づく計算結果を破線で示した。図から非線形性を考慮した本数値解が、線形解より実験値をよく説明することがわかる。特に波の峰位相において、底面から境界層外縁に近づく途中で流速分布が大きくふくらみ、外縁流速より大きくなるという over-shooting 現象が実験結果に見られるが、非線形の計算結果はこれをよく表現することがわかる。

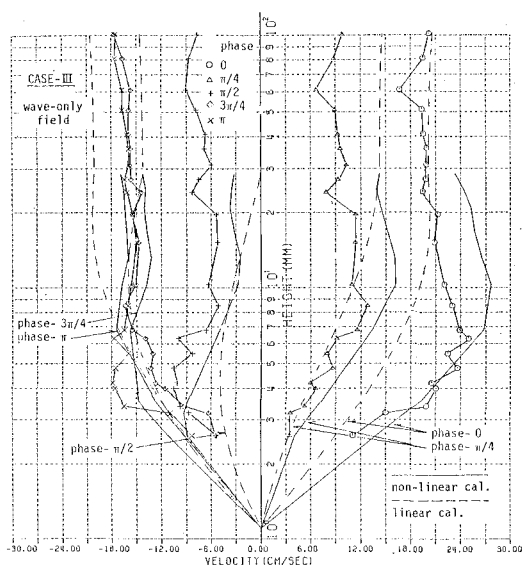


図-2 著者らの実験結果¹²⁾と(1)式に基づく数値解析結果の比較

なお、ここに示さなかったが、著者らによる他のケースの実験結果や、Bakker ら¹³⁾の実験結果に対しても、(1)式に基づく非線形の計算結果はこれらと良好な一致が得られることが確かめられている⁶⁾。

4. 摩擦係数の計算結果

まず、1周期間における底面せん断応力の最大値 $\tau_{b,max}$ から、(7)式で定義される摩擦係数 f_w についての計算結果を示す。図-3 はハイパボリック波理論を用いて得られた摩擦係数 f_w を、横軸に $\hat{u}_p/\sigma z_0$ をとって示したものである。図中には従来の摩擦係数の算定公式を曲線で示した。図から f_w は $\hat{u}_p/\sigma z_0$ が同じであれば、 H/L , H/h の値とともに増加し、ここで計算した範囲では、もっとも大きい場合で Jonsson の公式による値より 30% 大きく、Kamphuis の値より 40% 大きいことがわかった。図中の破線は、 H/L および H/h が等しい結果を結んだもので、各曲線は Kamphuis の公式から計算される曲線を上方および下方に移動したものに近い。これらの計算結果から有限振幅性を考慮したときの摩擦係数 f_w の近似式として、Kamphuis の公式と同型の次式を提案する。

$$\frac{1}{4\sqrt{f_w}} + \log_{10} \frac{1}{4\sqrt{f_w}} = -A + \frac{4}{3} \log_{10} \left(\frac{1}{30} \frac{\hat{u}_p}{\sigma z_0} \right)$$

$$: A = 50(H/L)(H/h) + 0.2(H/h) - 15(H/L) + 0.14$$

.....(13)

ただし、この式の適用性は図-3 の計算範囲でのみ保証される。すなわち、ハイパボリック波の適用できる領域で、かつ $200 \leq \hat{u}_p/\sigma z_0 \leq 500$ の範囲である。

なお、(7)式で f_w を定義する際に $u_{p,c}$ ではなく $\hat{u}_p$

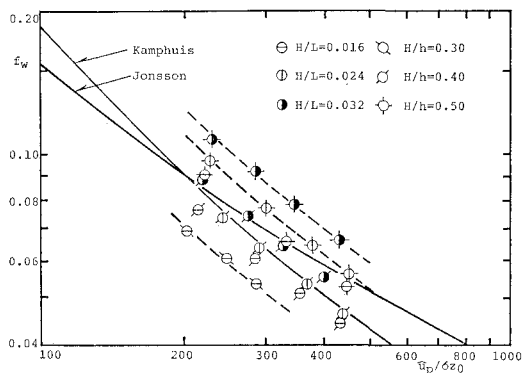


図-3 ハイパボリック波理論を用いて計算された摩擦係数 f_w

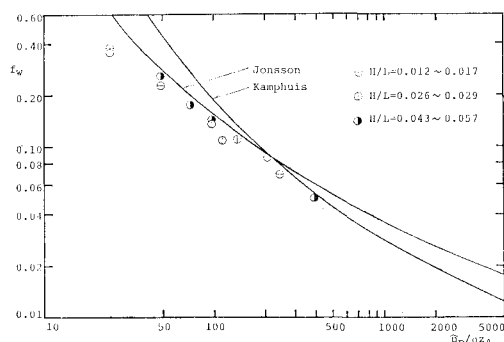
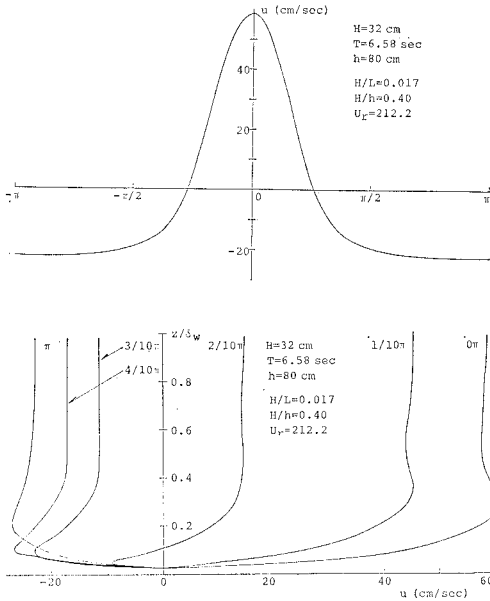


図-4 ストークス波理論を用いて計算された摩擦係数 f_w

を用いれば、あるいは横軸を $\hat{u}_p/\sigma z_0$ ではなく $u_{p,c}/\sigma z_0$ で表せば、得られる摩擦係数は従来のその数倍にも達する。しかし、これは定義の仕方で異なる結果が得られたに過ぎない。(7)式の定義及び図-3の整理法では、こうした見かけ上の増加は含まれないので、図-3の結果は有限振幅性や非線形性による摩擦係数の増大を正しく表現するものである。

図-4 はストークス波理論を用いて得られた f_w を、図-3 と同様な形で示したものである。理論の適用限界から非線形性の強い計算ケースをとることが出来ないこともあって、従来の公式が与える値と近い値が得られたが、この場合にも f_w の値は $\hat{u}_p/\sigma z_0$ のみならず、 H/L にも依存し、 H/L の増加とともに f_w は大きくなることがわかる。前報では、ストークス波の2次近似解を用いたときに得られる摩擦係数が、従来の公式の数倍にも大きくなりうることを報告したが、この場合には用いた波動理論の適用範囲や、摩擦係数の定義の仕方にいくらか問題があり、今回の結果と相違するものとなった。

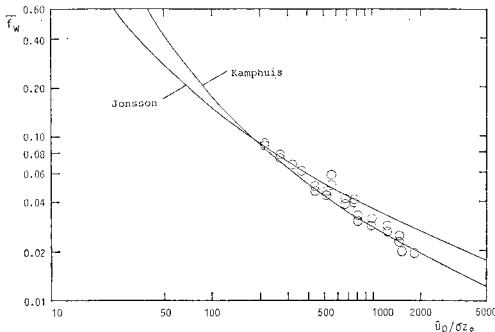
図-3 と図-4 との比較から、ストークス波理論とハイパボリック波理論を用いて推算された f_w の値は必ずしも厳密には接続しないことがわかる。これは1つには、図-1 に示したように、両理論による水粒子速度の値が接続しないことに起因すると考えられる。



図—5 境界層外縁での水粒子速度波形(上段)と境界層内の流速分布(下段)

次に、ハイパボリック波を用いた計算結果に波の有限振幅性の効果がより顕著に見られることの理由を以下に説明する。図—5は、上段がハイパボリック波を用いたときの境界層外縁流速の位相変化を、下段が境界層内水粒子速度の鉛直分布を表している。図から、ハイパボリック波理論が適用されるような条件下では、水粒子速度が正(岸方向)となる位相区間は全位相の1/4程度と短いことがわかる。すなわち、水粒子速度は平坦で長い谷位相を経過した後、峰位相に近づくとともに、急激に増加することになり、それにともなって、底面近くの薄い領域内で大きな流速変化が生じ、底面近くでの流速勾配がきつくなる。それに対し、ストークス波理論が適用される条件下では、水粒子速度はこの様な急激な立ち上がりを示さず、正弦波形と近いため、底面での流速勾配も比較的緩やかなものとなる。

次に底面せん断応力の1周期平均値 $|\tau|$ を用いて(8)式で定義される摩擦係数 $\bar{f}_w$ の計算結果を図—6に示



図—6 摩擦係数 $\bar{f}_w$

す。ここではハイパボリック波理論を用いた結果を示したが、Jonsson や Kamphuis の公式と近い値となった。また H/L や H/h による結果の相違もあまり明確でないことがわかった。

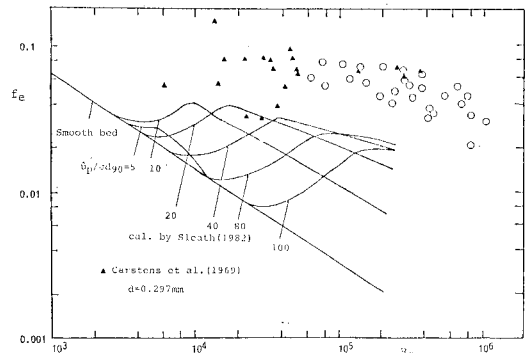
以上をまとめると、底面せん断応力の最大値 $\tau_{b,max}$ を表わす摩擦係数 f_w は、 $\bar{u}_p/\sigma_{z0}$ のみならず H/L や H/h の非線形性を表わすパラメーターによって変化し、これらの値が大きな場合には従来の算定公式によっては $\tau_{b,max}$ をかなり過小評価する可能性があることが示された。しかし1周期平均した底面せん断応力 $|\tau|$ に対する $\bar{f}_w$ は、平均操作によって非線形性の効果が打ち消されて、 H/L や H/h への依存性は小さくなり、従来の算定公式による値とはほぼ一致することがわかった。

5. エネルギー減衰係数の計算結果

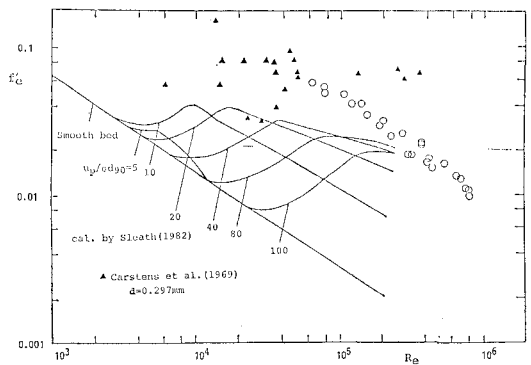
図—7は(11)式で計算される仕事量 $\bar{P}$ から得られるエネルギー減衰係数 f_e の結果を、横軸にレイノルズ数 $Re=\bar{u}_p a/\nu$ (a :境界層外縁における水粒子軌道振幅 $=\bar{u}_p/\sigma$)をとって示したものである。図中には Sleath¹⁴⁾が提案した f_e の算定式および層流境界層に対する f_e の算定式、

$$f_e = \frac{3\pi}{4(2Re)^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

を示した。さらに Carstens ら¹⁵⁾が砂堆上の振動流れ



図—7 エネルギー減衰係数 f_e



図—8 (9)式から算出されたエネルギー減衰係数 f_e

に対して、与えられた振幅の振動流流れを維持するのに必要な仕事量から逆算したエネルギー減衰係数 f_e の結果を点描した。図から計算結果は Carstens らの実験結果と同程度の値となり、Sleath が半理論的に導いた結果はかなり小さな値となることが読み取れる。 f_e のパラメター H/L や H/h への依存性については、はっきりした傾向が見いだせなかった。

図-8 は (9) 式によって近似的に計算された $\bar{P}$ から得られるエネルギー減衰係数 f_e' に対して、図-7 と同様に整理したものである。同じ計算条件の下では、 f_e' は f_e より小さくなるのがわかる。

6. むすびに

本研究は数値計算によって、境界層外縁での流速変動に含まれる有限振幅性や、境界層方程式中の非線形性が、底面せん断応力や波のエネルギー減衰に与える効果を、摩擦係数やエネルギー減衰係数の形で評価したものである。

底面せん断応力の最大値と関係づけられる摩擦係数 f_w は、 H/L や H/h といった非線形性を表わすパラメターが増加すると、従来の算定公式による値より 30~40% も大きくなるという結果が得られた。しかし、底面せん断応力の 1 周期平均値や、エネルギー減衰係数の形で評価すると、上述の非線形パラメターへの依存性はほとんど見られないことがわかった。

本研究から有限振幅性の大きな波の下では、波峰での底面せん断応力が、従来の公式から算定される値よりかなり大きくなるのが明らかになったわけで、このことは岸沖漂砂を議論する上できわめて重要な知見であると思われる。

参 考 文 献

- 1) Jonnson, I. G. and Carlsen, N. A.: Experimental and theoretical investigation in an oscillatory turbulent boundary layer, *J. Hydraulic Res.*, Vol. 14, pp. 45~60, 1976.
- 2) Kamphuis, J. W.: Friction factor under oscillatory waves, *Proc. of ASCE*, No. WW2, pp. 135~144, 1975.
- 3) Johns, B.: Residual flow and boundary shear stress in the turbulent bottom layer beneath waves, *J. of Physical Oceanography*, pp. 733~738, 1977.
- 4) Trowbridge, J. and O. S. Madsen: Turbulent wave boundary layers, 2. Second-order theory and mass transport, *J. of Geophysical Research*, Vol. 89, No. C5, pp. 7999~8007, 1984.
- 5) 滝川 清・田淵幹修: 有限要素法による波の変形に伴う底部波動境界層の解析, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 21~25, 1985.
- 6) 浅野敏之・岩垣雄一: 有限振幅波動下における底面境界層の数値解析, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号, B-2, pp. 675~689, 1986.
- 7) 水口 優: 波動境界層の 2 次解について, 第 33 回海岸工学講演会論文集, pp. 46~50, 1986.
- 8) 岩垣雄一・塩田啓介: ハイバボリック波の表現式の再検討, 第 26 回海岸工学講演会論文集, pp. 31~35, 1979.
- 9) Le Mehaute, B., D. Divoky and A. Lin: Shallow water waves: A comparison of theories and experiments, *Proc. of the 11th Conf. on Coastal Eng.*, pp. 86~107, 1968.
- 10) 岩垣雄一・酒井哲郎: 有限振幅波の水粒子速度に関する実験, 第 16 回海岸工学講演会論文集, pp. 15~21, 1969.
- 11) 首藤伸夫: 海の波の水理, 新体系土木工学, p. 217, 1981.
- 12) 浅野敏之・岡本 浩・岩垣雄一: 波と流れの共存場における底面乱流境界層に関する研究, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 84~88, 1983.
- 13) Bakker, W. T. and Th. van Doorn: Near bottom velocities in waves with a current, *Delft Hydraulic Laboratory, Pub. No. 208*, p. 25, 1980.
- 14) Sleath, J. F. A.: The effect of jet formation on the velocity distribution in oscillatory flow over flat beds of sand or gravel, *Coastal Engineering*, Vol. 6, pp. 151~177, 1982.
- 15) Carstens, M. R., F. M. Neilson and H. D. Altinbilek: Bed forms generated in the laboratory under an oscillatory flow: analytical and experimental study, *Tech. Mem. No. 28, CERC*, p. 39, 1969.