

浮体の有限振幅運動と非線形抗力について

滝 川 清*・田 淵 幹 修**

1. はじめに

浮遊式海洋構造物の設計に際しては、作用する流体力、浮体の運動および波の変形等を正しく評価せねばならない。ことに、浮体運動の共振点近傍では、浮体と流体との相互運動の有限振幅性を考慮することが重要であるが従来、これに関する十分な実験や解析による研究は見受けられず、微小振幅波による浮体の微小な運動を仮定した研究が多数である。ここに、本研究は、著者らが示した有限要素法による浮体の有限振幅運動系の解析方法¹⁾を利用して、これに粘性に起因する非線形抗力項を導入²⁾した解析を行い、実験結果との比較を加えて、浮体と波との有限振幅運動特性と非線形抗力の効果を調べるものであり、若干の検討を行ったのでここに報告する。

2. 有限要素法による波と浮体の相互運動系の解析

浮体運動に対する従来の解析方法は2つに大別され、その1つは、作用波力をモリソン公式により評価し簡単な形式の浮体運動方程式のみを解く方法。また1つは、回折理論による扱いである。しかし、前者では抗力係数や質量係数を与える必要があり、係数の決定方法にはまだ不明な点が多く、また後者では完全流体を対象とする為、粘性に起因する抗力項が無視され浮体運動を過大評価する欠点がある。この回折理論に非線形抗力項を導入する方法(渡辺, 1972)³⁾も見受けられるが、これ等従来の方法は、波および浮体の微小運動を前提としたものであり運動系の有限振幅性の効果を議論し得るものではない。

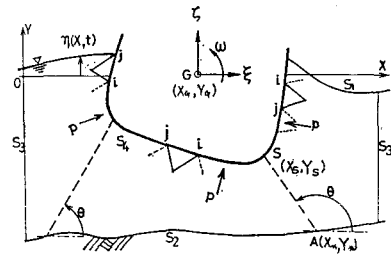
本研究における有限要素法による解析方法は、浮体没水表面での速度ポテンシャルを未知な浮体の有限変位量の関数として表現し、これに浮体運動の条件と没水表面の幾可学的条件とを同時に満足する解を逐次求めて行く非定常な連成運動系としての解析手法であり、流体運動と浮体運動を同時に解くので付加質量や減衰力を別に算定しておく必要はない。流体運動のこの解析手法につい

ては、すでに文献 1), 3) に示しているが、以下にはその概略を説明し、記号等は、これ等の文献を参照された

2.1 有限振幅運動系の解析

(a) 流体運動の解析

図一1 に示す浅海域に係留または浮遊した任意形状浮体を考える。浮体運動に関し粘性に起因した抗力は考えるが、流体運動は速度ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ を有するものとして取り扱う。



図一1 解析領域

境界面は、自由表面 S_1 、不透過境界 S_2 、仮想境界 S_3 および浮体没水表面 S_4 より構成され、流体の運動は変動領域 $V(\eta)$ でラプラス式を満たす境界値問題である。変分原理から次式の汎関数 χ を停留にする条件より全ての条件式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \iint_{V(\eta)} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dV \\ & + \frac{g}{2} \int_{S_1} \eta^2 dS_1 + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \eta dx \\ & - \int_{S_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \phi dx - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \phi dS_3 \\ & - \int_{S_4} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial n} \right) \phi dS_4 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ここに、 $\bar{\phi}$ は解析領域外部の速度ポテンシャル、 $\partial \phi' / \partial n$ は浮体没水表面の法線方向速度を意味する。

いま、解析領域を三角形要素群に分割し、1つの要素内の ϕ をその節点値 ϕ で表現する。

$$\phi = [N] \phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = B^T \phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = C^T \phi \dots \dots (2)$$

境界 $S_1 \sim S_4$ での諸量は、各境上の2節点で表現する。

* 正会員 工博 熊本大学講師 工学部土木工学科

** 正会員 熊本大学講師 工学部環境建設工学科

$$\eta=[L]\eta, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}=[N_s]\left\{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}\right\} \dots\dots\dots \text{など} \dots\dots\dots (3)$$

これら式(2), 式(3)を用いて式(1)の汎関数を離散化しさらに変分原理を適用すると, $\delta\phi, \delta\eta$ に対する停留条件より解くべき2組の連立方程式が得られる.

$$\sum_V (BB^T + CC^T)\phi \cdot \Delta - \sum_{S_1} L \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} - \sum_{S_3} S \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right\} - \sum_{S_4} S \left\{ \frac{\partial \phi'}{\partial n} \right\} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{1}{2} \sum_V \phi (BB^T + CC^T) \phi \frac{\partial(\Delta)}{\partial \eta} + g \sum_{S_1} L \eta + \sum_{S_1} L \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

境界 S_1 および S_4 に関係する要素の形状係数には, それぞれ, 水面変動量 η および浮体運動の未知量が含まれるが, これは増分法を導入して線形化を図る. これを導入すると, まず境界 S_1 に関して上式中の形状係数 B, C は次式のように書き改められる.

$$B=B_0+B_1 d\eta, \quad C=C_0+C_1 d\eta \dots\dots\dots (6)$$

また, 境界 S_4 に関して, いま没水表面上の点 (x', y') が第 n 近似解 (x_0, y_0) から (dx, dy) だけ変位するとして形状係数を書き改めると次式のようなのである.

$$B=B_0+B_2 dx+B_1 dy, \quad C=C_0+C_2 dx+C_1 dy \dots\dots\dots (7)$$

この移動量 dx, dy は浮体運動量で決めることができる. いま, 浮体の鉛直, 水平および回転の運動量を ξ, ζ, ω と表わし, 浮体静止での重心位置 $(\bar{x}_G, \bar{y}_G)$ から $(\bar{x}, \bar{y})$ だけ離れた点が浮体運動によって点 (x', y') に移動すると

$$\left. \begin{aligned} x' &= \bar{x}_G + \xi + \bar{x} \cos \omega - \bar{y} \sin \omega \equiv x_0 + dx \\ y' &= \bar{y}_G + \zeta + \bar{x} \sin \omega + \bar{y} \cos \omega \equiv y_0 + dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

これに増分法を適用し, 浮体運動の第近似解 ξ_0, ζ_0, ω_0 とその増分量 $d\xi, d\zeta, d\omega$ を用いると結局

$$\left. \begin{aligned} dx &= d\xi - (\bar{x} \sin \omega_0 + \bar{y} \cos \omega_0) d\omega \\ dy &= d\zeta + (\bar{x} \cos \omega_0 - \bar{y} \sin \omega_0) d\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

である. したがって, 図-1 に示すように点 i, j が没水表面点であるときには

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{x} &= [dx_i, dx_j, 0]^T = \mathbf{U}_0 d\delta \\ d\mathbf{y} &= [dy_i, dy_j, 0]^T = \mathbf{W}_0 d\delta \\ d\delta^T &= [d\xi, d\zeta, d\omega] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

である. 上式を用いると式(7)の没水表面上での形状係数は次式で表現される.

$$\left. \begin{aligned} B &= B_0 + (B_2 \mathbf{U}_0 + B_1 \mathbf{W}_0) d\delta \\ C &= C_0 + (C_2 \mathbf{U}_0 + C_1 \mathbf{W}_0) d\delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

すなわち, これによって没水表面での ϕ' と浮体の有限な変位量との関係が導入される. また, 物体の幾可学的条件は計算結果から式(8)によって $x' = x_0 + dx, y' =$

$y_0 + dy$ とすることによって同時に満足することができる.

一方, 没水表面での流速 $\partial\phi'/\partial n$ に関しては, いま, u', w' を x 軸および y 軸方向の流速成分とし, l_x, l_y を境界面の法線方向余弦とすると式(8)より次式で表現される.

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n} = u' l_x + w' l_y = l_x \frac{dx'}{dt} + l_y \frac{dy'}{dt} \dots\dots\dots (12)$$

すなわち, 浮体運動速度 $d\xi/dt, d\zeta/dt, d\omega/dt$ の関数として表現することができる.

以上, 流体運動の解析は, 境界 S_4 での浮体運動条件で決定される移動境界値問題である. また, 浮体運動は次に述べるように, 流体力および係留力等によって決定され浮体と流体の相互運動系として解析される. なお, 仮想境界 S_3 での取り扱いの詳細は文献 3) を参照されたい.

(b) 浮体運動方程式

係留された浮体運動の方程式は, M を浮体質量, I を浮体重心に関する慣性性能率とすると次式で示される.

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \int_{S_4} P_H dS_4 - F_H + F_{DX} \\ M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \int_{S_4} p_V dS_4 - F_V + F_{DV} - (Mg + T_V) \\ I \frac{d^2 \omega}{dt^2} &= \int_{S_4} P_M dS_4 - F_M + F_{DM} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに, F_H, F_V, F_M は係留索による抗力項である. T_V は静止状態での索張力の鉛直成分である. P_H, P_V は流体圧の水平, 鉛直方向成分であり, P_M は流体圧の浮体重心に作用するモーメントである. また, F_{DX}, F_{DV} および F_{DM} は粘性に起因する非線形抗力の各方向成分を意味する.

浮体の没水表面 (x', y') に垂直に働く流体圧 p は ϕ' を用いて次式で表現される.

$$\left. \begin{aligned} p(x', y') &= -\rho \left[[N_s] \left\{ \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right\} + [N_s] \left\{ \frac{(u')^2 + (w')^2}{2} \right\} + g y' \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

このとき, $p_H = p l_x, p_V = p l_y, P_M = p e$ (e は重心 (x_G, y_G) と点 (x', y') の偏心距離) と計算される.

また, 係留索による抗力は, いまバネ係留であるとして, そのバネ定数を K とすると, 図-1 に示す取付角 θ に対し, 図を参考にして

$$\left. \begin{aligned} F_H &= K \cdot \Delta l \cos \theta, \quad F_V = K \cdot \Delta l \sin \theta \\ F_M &= (y_G - y_s) F_H + (x_s - x_G) F_V \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

と表現できる. Δl は係留索の伸びである.

一方, 粘性に起因する抗力項 F_D の取り扱いは渡辺と同様な方法を適用する. すなわち, 次式で示すように, 水粒子速度 u と浮体運動速度 v の相対速度 $V = (u - v)$

の2乗に比例するものとし、抗力係数を C_D 、その投影面積を S として

$$F_D = \rho \cdot C_D \cdot S \cdot V |V|/2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに用いる u, v は実用上からも簡単な形で与える必要があり、 u は浮体が存在しない時の入射波によるものが従来用いられており、ここでもこれに従って以下の取り扱いをする。水平方向の抗力に関しては、浮体中心軸位置での入射波の水平流速を吃水深について平均したものを u 、また、鉛直方向の抗力は浮体底面での入射波の鉛直流速を平均したものをとする。また、浮体の運動速度 v は浮体重心の運動速度 $(\dot{\xi}, \dot{\zeta}, \dot{\omega})$ を用いる。いま、図—2 に示す2次元矩形断面浮体についてこれらを表現すると次式のようなのである。

$$F_{Dx} = \frac{4}{3\pi} C_{Dx} \rho (qh) (W_x - \dot{\xi}) |W_x - \dot{\xi}| \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$W_x = \frac{f_0 \alpha_0 \lambda_0}{h} \cos(kx_G - \sigma t)$$

$$\alpha_0 = \frac{ga}{\sigma}, \quad \lambda_0 = kh$$

$$f_0 = \frac{(\sinh \lambda_0 - \sinh \bar{\lambda}_0)}{qh \cosh \lambda_0}, \quad \bar{\lambda}_0 = (1-q)kh$$

$$F_{Dv} = \frac{4}{3\pi} C_{Dv} \rho (2l) (W_v - \dot{\zeta}) |W_v - \dot{\zeta}| \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$W_v = \frac{\alpha_0}{l} \sin(kl) \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{\cosh \lambda_0} \sin(kx_G - \sigma t)$$

$$F_{DM} = -\frac{4}{3\pi} C_{Dx} \rho (qh)^2 \int_{-1}^0 p_x |P_x| \left(y' - \frac{\bar{y}G}{qh} \right) dy' \\ + \frac{4}{3\pi} C_{Dv} \rho (l^2) \int_{-1}^1 P_y |P_y| x' dx' \quad \dots\dots (19)$$

$$p_x = \alpha_0 k \frac{\cosh(1+qy')\lambda_0}{\cosh \lambda_0} \cos(kx_G - \sigma t)$$

$$+qh \left(y' - \frac{\bar{y}G}{qh} \right) \dot{\omega}$$

$$P_y = \alpha_0 k \frac{\sinh \bar{\lambda}_0}{\cosh \lambda_0} \sin(k(\bar{x}_G + lx') - \sigma t) - lx' \dot{\omega}$$

ここに、 C_{Dx} 、 C_{Dv} はそれぞれ水平および鉛直方向の抗力係数である。

以上、浮体運動に関する非線形項に関しても先と同様増分法を用いて線形化を行い、また、時間項については時間差分を適用すれば良い。

結局、式(4)、(5)の流体運動方程式と式(13)の浮体運動方程式を連立させると、増分量 $d\phi$ 、 $d\eta$ 、 $d\xi$ 、 $d\zeta$ 、 $d\omega$ を未知量とした多元連立方程式が導かれ、これを解くことによって、各種入射波に応じた有限な浮体の運動と有限振幅の波を同時に計算することができる。

2.2 微小振幅運動系の解析

浮体および波の微小運動を仮定できるとき、解析領域は固定され、また、流体運動は省略され式(1)に対応する汎関数は次式で与えることができる。

$$\chi = \iiint_V \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dV \\ + \frac{1}{g} \int_{S_1} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \phi dx - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \phi dS_3 \\ - \int_{S_4} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial n} \right) \phi dS_4 \quad \dots\dots\dots (20)$$

この場合、流体運動の周期性を考慮することができ、 $\phi = \Phi e^{i\sigma t}$ なる複素速度ポテンシャルとして取り扱うことが可能になる。上式に有限要素法を適用すると変分原理から $\delta\phi$ を留停にする条件より流体の運動方程式として次式を得る。

$$\sum_V (BB^T + CC^T) \phi \cdot A - \frac{\sigma^2}{g} \sum_{S_1} S \phi - \sum_{S_3} S \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} \\ - \sum_{S_4} S \left\{ \frac{\partial \phi'}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

また、浮体運動方程式は式(13)で表現されるが、流体圧およびバネ係留力は非線形項が省略されて比較的簡単な取り扱いになるが、これ等は文献1)に記述しているので参照されたい。

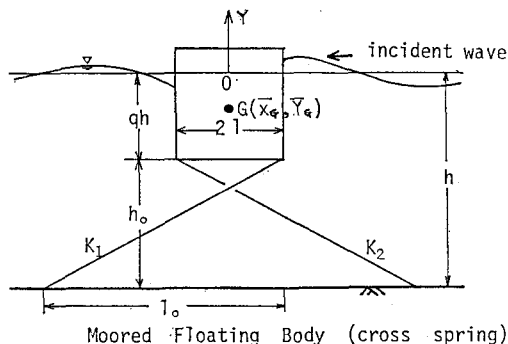
式(16)に対応する粘性による抗力 F_D については、相対速度 $V = U e^{i\sigma t} = (u-v) e^{i\sigma t}$ なる複素振幅 U を用いて

$$F_D = \frac{4}{3\pi} C_D \rho S |U| U e^{i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と示され、各方向成分について先と同様の展開を行えば良い。これは、複素数の絶対値を含む非線形項であり通常の方法では解けないが、ここでは、式(21)と連立させて Newton 法による近似解法を用いて解析する。

3. 計算結果と考察

実験および計算の対象とした浮体模型と実験条件は図—2 に示す通りである。2次元矩形断面浮体をバネ係



Experimental Condition

$h=40\text{cm}$, $l=10\text{cm}$, $h_0=24\text{cm}$, $l_0=44\text{cm}$
 $q=0.4$
 $l/h=0.25$, $l_0/h_0=6/11$, $\bar{y}_G=-0.5qh$
 $K_1/\rho g l=0.6933$, $K_2/\rho g l=0.6943$
 $W=0.2809\text{kg/cm}$, $I_G=38.7939\text{cm}^4/\text{cm}$

図—2 浮体模型と実験条件

留 (cross-spring) している。計算に際しての要素分割状況は、水平方向に $L/20$ (L は入射波波長) のきざみ幅で、浮体の前後にそれぞれ 30 分割、また水深方向には水深 h を 10 分割とした。また、粘性抗力項を考慮した解析の際には、抗力係数 $C_{Dx}=C_{Dy}\equiv C_D$ として計算を行った。

図-3, 4 は浮体の鉛直および水平運動の振幅を入射波振幅 a で無次元化した ζ/a および ξ/a を $\sigma^2 h/g$ に対し示したものである。図中の実線は本法の微小振幅運動系の解析結果 ($C_D=0$) である。実験結果は H/L (H : 入射波波高, L : 入射波波長) をパラメータにプロットした。 H/L が 0.007 以下の場合、鉛直変位 $2\zeta/L$ の値は 0.0017 以下であり、このように H/L および浮体運動も小さい時は微小振幅系の解析でも十分一致することが分る。一方、 H/L が大となると ζ/a , ξ/a ともに低減する。このような H/L の増加により ζ/a が減少する傾向は、従来、粘性に起因するエネルギー散逸によると考えられているものである。しかし、文献 1) に述べた浮体強制運動による造波率に関する実験および計算結果では、鉛直強制運動振幅比 $2\zeta/L$ が約 0.02 以上となると造波率が增大して非線形となる事を示しているが、これ

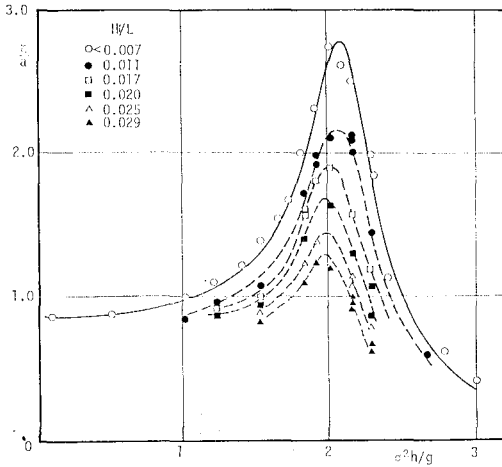


図-3 有限振幅波による鉛直運動 (実験)

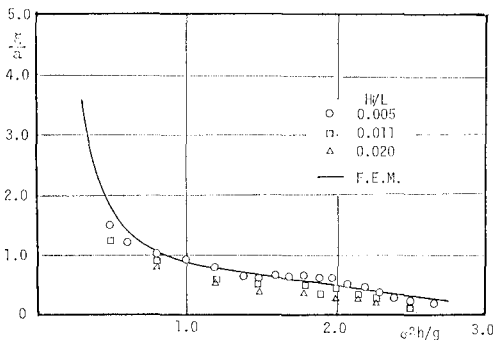


図-4 有限振幅波による水平運動 (実験)

は波による浮体運動を考える場合には、有限振幅運動の効果として浮体運動の低減を意味するものである。以下では、主に鉛直運動に注目し、運動振幅比の低減に関する粘性による抗力と有限振幅運動効果について述べる。

図-5 は、本法の微小振幅運動系の解析方法を用いて計算したもので鉛直運動振幅比 ζ/a を示図したものである。抗力係数 $C_D=2.0$ としている。入射波波形勾配 H/L の増加と対応して ζ/a が低減している状況が計算されているが、実験結果に比べ低減の割合が小さく、これを一致させる為には更に大きな抗力係数を用いねばならない。図-6 は 図-5 と同様の計算であるが、 $\sigma^2 h/g = 2.0$ で H/L の増加に対する鉛直運動量比 ζ/ζ_0 (ζ_0 は $C_D=0$ とした時の微小振幅運動解析結果で $\zeta_0/a=2.66$) および波エネルギー $\sqrt{K_r^2+K_t^2}$ を示している。ここに、 K_r : 反射率, K_t : 通過率であり、実験での K_r , K_t は浮体近傍で波が不規則に変動する為、合田・鈴木 の定義による不規則波反射率を用いた。 $1-\sqrt{K_r^2+K_t^2}$ が浮体運動によるエネルギー損失を意味する。 H/L の増加に

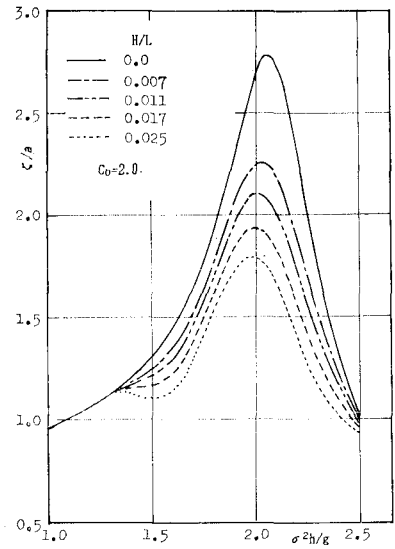


図-5 鉛直運動 (微小振幅解析)

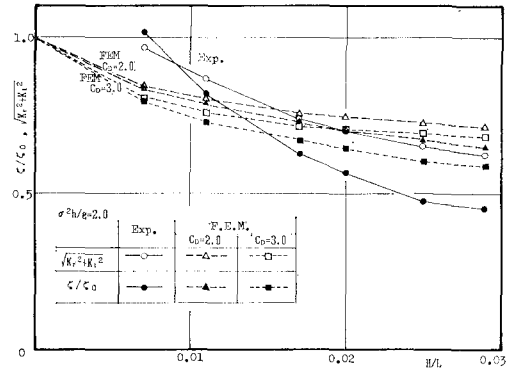


図-6 鉛直運動の低減と波エネルギーの損失

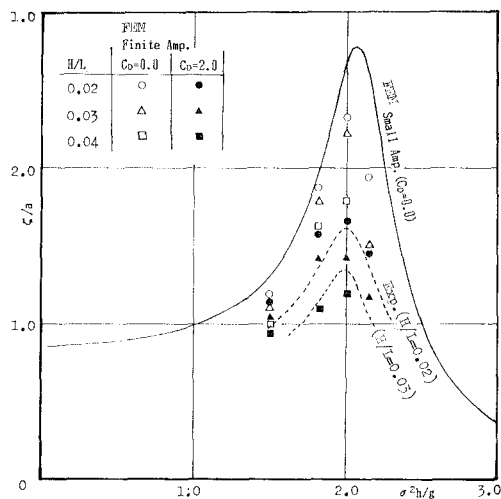


図-7 鉛直運動 (有限振幅解析)

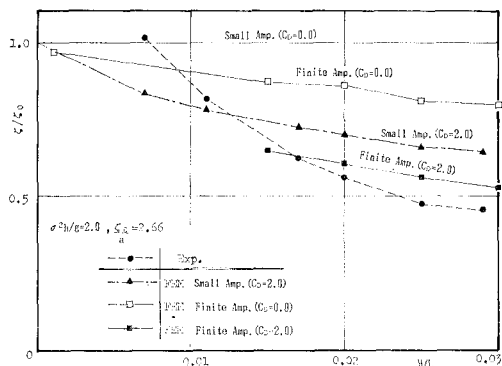


図-8 鉛直運動の低減と有限振幅運動

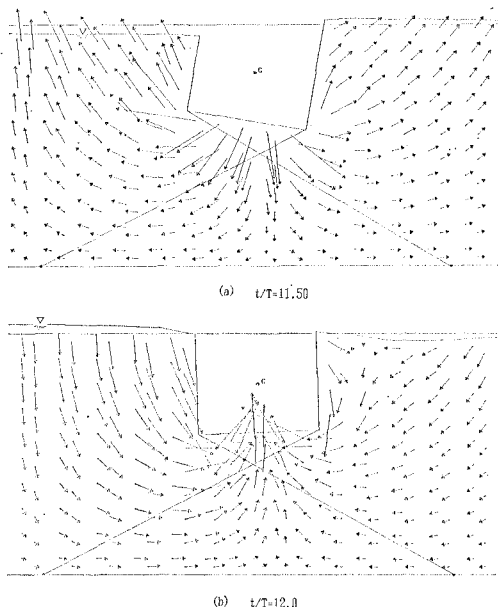


図-9 浮体運動と流速分布 (有限振幅解析)

幅運動解析では説明できない運動振幅比の減少を示すことができる。

図-9は、 $\sigma^2 h/g=2.0$, $H/L=0.03$, $C_D=0$ での時間位相による浮体近傍の流速分布を描いたものである。浮体運動が小さい場合、浮体および周辺の水面変動は正弦的に変動するが、図で示すような運動が大となる場合には水面変動および浮体運動も有限振幅性が出現し、浮体周辺の流況も隅角部を中心にまき込みが顕著になるが計算は、これ等の状況を良く示していると思われる。

4. あとがき

本研究は、有限要素法を用いて、浮体運動を波と浮体との相互運動系とする解析を行い、特に、浮体運動の共振点近傍での運動特性について調べたものである。入射波の波形勾配が大となり浮体運動も大きくなると、浮体運動の振幅比は低減するが、これが粘性に起因する抗力のみでは説明できず、相互運動の有限振幅性による低減を含むことを明らかにした。なお、この粘性に起因する抗力係数は、波の周期・波高によって変化する事が考えられるが、今後ともこれに関する詳細な検討を行う必要がある。

参 考 文 献

- 1) 滝川 清・田淵幹修: 有限要素法による波動解析について——運動する境界面を有する場合, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 1~5, 1980.
- 2) 渡辺 晃: 波による円筒形浮体の運動, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 377~381, 1978.
- 3) 滝川 清・岩垣雄一・中川政博: 有限要素法による斜面上の波の碎波変形と内部機構の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 20~24, 1983.

に伴い、この損失量と対応して ζ/ζ_0 が低減している事が分る。微小振幅運動解析で $C_D=2.0$, $C_D=3.0$ とすると損失エネルギーは、ほぼ実験結果と一致するが、 ζ/ζ_0 は実験値ほど減少せず、これと一致させる為には更に大きな C_D の値を用いる必要がある。この事は、浮体運動解析で、従来の微小振幅運動を仮定し運動の低減のみを合致させる取り扱いでは、このように運動量が大となる場合には不合理である事を意味する。

図-7は、本法の有限振幅運動系の解析結果である。 H/L に対して抗力項を考慮しない場合 ($C_D=0$) と考慮した場合 ($C_D=2.0$) について鉛直運動振幅比 ζ/a を図示したものである。また、図-8は、 $\sigma^2 h/g=2.0$ での H/L の変化に対する鉛直運動量比 ζ/ζ_0 を図示し、実験結果および微小振幅と有限振幅運動解析結果をプロットしている。有限振幅運動解析を行うと、粘性による抗力項を導入しない時 ($C_D=0$) でも運動比の低減が計算され、これが相互運動の有限振幅効果によるものと解釈される。また、これに抗力項を導入し $C_D=2.0$ として計算すると、実験結果とほぼ一致するようになり、微小振