

水-地盤-円柱の連成振動解析

沖 見 芳 秀*・松 本 喬*

1. 緒 言

海洋開発が進むにつれ、石油プラットフォーム等の海洋構造物が大型化し、大水深の海域にも建設されるにおよび、その動的特性を適確に把握することが、ますます重要になっている。従来、剛体円柱については、静水压を理論的に求め、表面波の影響、圧縮性の影響等、地震時の特性が論じられてきた¹⁾。また、弾性円柱については、水と円柱を動的な連成系として捕え、その動的相互作用が、幾つかの手法により論じられている^{1)~4)}。しかしながら、地盤との相互作用については、研究⁵⁾も少なく、地盤の影響が十分検討されているとはいえない。必ずしも硬い岩盤上に設置されるとは限らない大水深下の構造物では、大型化に伴う底部モーメントの増大と相まって、地盤と構造物の動的相互作用の重要性が高まることが予想される。

本研究では、これらのことを鑑み、水と地盤と円柱を動的な連成系として捕え、動的相互作用を適確に把握・定式化し、連成系に於ける地盤の影響を明らかにし、水中に立つ円柱の解析法を確立することを目的とした。

2. 解 析 法

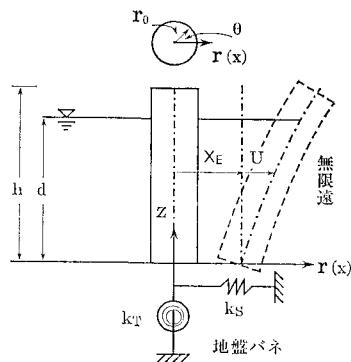
2.1 解析法の概要

地盤バネ（回転バネ・水平バネ）に支持された円形断面を有する片持梁が、外力として、地震力及び回折波理論により評価される地震時動水圧を受けるとし、基礎方程式並びに境界条件を記述する。さらに、調和振動を仮定することにより、周波数領域に於ける支配方程式・境界条件を得る。これらに、Galerkin 法を適用、さらに離散化し FEM 振動方程式を得る。これに複素剛性を用いることにより、最終的な M-C-K 振動方程式を得る。

2.2 解析仮定・解析モデル・主な記号

本研究では、以下の i)~v) の仮定を導入する。

- 円柱は、Bernoulli-Euler 梁とし、曲げ変形のみを考える。
- 地震動は、水平方向成分のみである。



図—1 解析モデル

- 水は、圧縮性を有する完全流体で、回折波理論が適用できる。
- 円柱の運動に伴い、円柱表面での水の剥離や渦が生じない。
- 調和振動が仮定出来る。

解析モデル・座標系を、図—1 に示す。また、主な記号は、以下のとおり。

r_0 : 円柱半径, h : 円柱高さ, d : 水深, U : 円柱の x 軸 (r 軸) 方向変位, Φ : 散乱波速度ポテンシャル, P : 動水圧, X_E : 地震による地盤変位, E : ヤング率, I : 断面 2 次モーメント, ρ_f : 流体密度, ρ_c : 円柱密度, m_c : 単位長さ当りの円柱断面質量, C : 水中音速, k_r : 地盤回転バネ定数, k_s : 地盤水平バネ定数。

2.3 支配方程式及び境界条件

仮定 v) を適用し、以下のように角周波数を用いて表わす。

$$U(z; t) = u(z) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$X_E(t) = X_E e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, z; t) &= \phi(x, z) e^{i\omega t} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{(m)}(r, z) \cos m\theta e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$P(x, z; t) = P(x, z) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 i は虚数単位であり、また散乱波速度ポテンシャルは、フーリエ表示とした。

仮定 i)~v) ならびに式 (1)~(4) を考慮し、速度ポテ

ポテンシャルと圧力の関係式

$$P = -i\omega\rho_f\phi \quad \dots\dots\dots (5)$$

を用いると、円柱ならびに水の運動方程式及び境界条件は、以下の様に与えられる。

〈円柱〉

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} - m_e \omega^2 (u + X_e) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{cases} -i\omega\rho_f \int_0^{2\pi} \phi \cos \theta r_0 d\theta = 0; & 0 \leq z \leq d \\ = 0 & ; d < z \leq h \end{cases}$$

$$k_T \frac{du}{dz} = EI \frac{d^2 u}{dz^2}; \quad z=0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$k_S u = -EI \frac{d^3 u}{dz^3}; \quad z=0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$d^2 u / dz^2 = 0; \quad z=h \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$d^3 u / dz^3 = 0; \quad z=h \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、式(6)は、梁の運動方程式、式(7)、(8)は、円柱底部での地盤バネ支持境界条件、そして、式(9)、(10)は、円柱頂部での自由端境界条件である。

〈水〉

$$\frac{\partial^2 \phi^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \phi^{(m)} - \frac{\partial^2 \phi^{(m)}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \phi^{(m)} = 0; \quad \begin{matrix} r \geq r_0 \\ 0 \leq z \leq d \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi^{(m)} = 0; \quad \begin{matrix} r \geq r_0 \\ z = d \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\partial \phi^{(m)} / \partial z = 0; \quad \begin{matrix} r \geq r_0 \\ z = 0 \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = i\omega(u + X_e) \cos \theta; \quad \begin{matrix} r = r_0 \\ 0 \leq z \leq d \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{Sommerfeld の Radiation Condition; } r = \infty \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、式(11)は、ヘルムホルツ方程式、式(12)は、自由表面境界条件、式(13)は、海底面での不透過境界条件、式(14)は、円柱と水との接触面で円柱変位速度と水粒子速度が等しいという接触面条件、式(15)は、無限遠での放射条件である。

2.4 散乱波速度ポテンシャルの一般解

式(11)～(15)より、円柱の絶対変位 $(u + X_e)$ を未知数として含んだ散乱波速度ポテンシャル ϕ の一般解は、以下のとおり求められる。

$$\phi = \begin{cases} 0 & ; d < z \leq h \\ 4i\omega \left\{ \frac{\lambda_0 \cosh \lambda_0 z}{k_0(2\lambda_0 d + \sinh 2\lambda_0 d)} \frac{H_1^{(2)}(k_0 r)}{H_1^{(2)}(k_0 r_0)} \right. \\ \quad \cdot \int_0^d (u + X_e) \cosh \lambda_0 z dz \\ \quad + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\lambda_n \cos \lambda_n z}{k_n(2\lambda_n d + \sin 2\lambda_n d)} \frac{H_1^{(2)}(k_n r)}{H_1^{(2)}(k_n r_0)} \right. \\ \quad \cdot \int_0^d (u + X_e) \cos \lambda_n z dz \end{cases}$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n \cos \lambda_n z}{k_n(2\lambda_n d + \sin 2\lambda_n d)} \frac{K_1(k_n r)}{K_1'(k_n r_0)} \right) \cdot \int_0^d (u + X_e) \cos \lambda_n z dz \Bigg\} \cos \theta; \quad \begin{matrix} r \geq r_0 \\ 0 \leq z \leq d \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$\lambda_0; \quad \lambda_0 \tanh \lambda_0 h = \omega^2 / g \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$k_0; \quad k_0^2 = (\omega/c)^2 + \lambda_0^2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\lambda_n; \quad \lambda_n \tanh \lambda_n h = -\omega^2 / g \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$k_n; \quad k_n^2 = |(\omega/c)^2 - \lambda_n^2| \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$N; \quad \omega^2/c^2 - \lambda_n^2 > 0 \text{ を満足する最大の } n$$

$$H_1^{(2)}; \quad \text{一次の第二種ハンケル関数}$$

$$K_1; \quad \text{一次の第二種変形ベッセル関数}$$

$$'; \quad \text{それぞれの導関数}$$

2.5 FEM 振動方程式

円柱の運動方程式(6)に、境界条件式(7)～(10)、散乱波速度ポテンシャルの一般解式(16)を用い、Galerkin 法により定式化、さらに M 個に離散化すると、FEM 振動方程式が以下の様に得られる。

$$([K] - \omega^2([M] + [M_a])) \{q\} = \omega^2 X_e([M] + [M_a]) \{E\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで

$$\{q\}; \quad \text{円柱の相対変位ベクトル}$$

$$[N]; \quad \text{形状関数}$$

$$[K]; \quad \text{剛性マトリクス}$$

$$[K] = \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} EI [N']^T [N'] d\bar{z} + [K_B] \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$[K_B]; \quad \text{バネの剛性マトリクス}$$

$$L_i; \quad i \text{ 要素長}$$

$$[M]; \quad \text{質量マトリクス}$$

$$[M] = \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} m_e [N]^T [N] d\bar{z} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$[M_a]; \quad \text{付加質量マトリクス}$$

$$[M_a] = -A_0 [B_0]^T [B_0] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n [B_n]^T [B_n] \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$A_0 = \begin{cases} \frac{4\pi\rho_f r_0 \lambda_0}{k_0(2\lambda_0 d + \sinh 2\lambda_0 d)} \\ \quad \cdot \frac{H_1^{(2)}(k_0 r_0)}{H_1^{(2)}(k_0 r_0)}; & 0 \leq z \leq d \\ 0 & ; d < z \leq h \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$A_n = \begin{cases} \frac{4\pi\rho_f r_0 \lambda_n}{k_n(2\lambda_n d + \sin 2\lambda_n d)} \\ \quad \cdot \begin{cases} \frac{H_1^{(2)}(k_n r_0)}{H_1^{(2)}(k_n r_0)}; & 1 \leq n \leq N \\ \frac{K_1(k_n r_0)}{K_1'(k_n r_0)}; & 0 \leq z \leq d \\ 0 & ; d < z \leq h \end{cases} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$[B_0] = \begin{cases} \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} [N] \cosh \lambda_0 \bar{z} d\bar{z} ; & 0 \leq z \leq d \\ 0 & ; d < z \leq h \end{cases} \dots\dots\dots(27)$$

$$[B_n] = \begin{cases} \sum_{i=1}^M \int_0^{L_i} [N] \cos \lambda_n \bar{z} d\bar{z} ; & 0 \leq z \leq d \\ 0 & ; d < z \leq h \end{cases} \dots\dots\dots(28)$$

$$\bar{z} = z + (\text{要素 } z \text{ 座標の原点の } z \text{ 座標}) \dots\dots\dots(29)$$

{E}: 加振方向ベクトル

式(21)に、複素剛性を用いることにより、最終的なM-C-K振動方程式が得られる。この方程式から求める解{q}は、以下で与えられる。

$$\{q\} = ([K^*] - \omega^2([M] + [M_a]))^{-1} \cdot \omega^2 X_e([M] + [M_a])\{E\} \dots\dots\dots(30)$$

ただし、[K]は、減衰定数をhとすると、

$$[K^*] = (1 - 2h^2 + 2h\sqrt{1-h^2}i)[K] \dots\dots\dots(31)$$

で与えられる複素剛性である。

2.6 地震時波力

式(5)、式(16)、式(30)より求められる動水圧を、円周方向に積分すると、地震時波力fが、以下で与えられる。

$$f = \omega^2 \{ A_0/\lambda_0 \cdot \sinh \lambda_0 d \cdot \cosh \lambda_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n/\lambda_n \cdot \sin \lambda_n d \cdot \cos \lambda_n z \} X_e + \omega^2 \{ A_0[B_0] \cosh \lambda_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n[B_n] \cos \lambda_n z \} \{q\} \dots\dots\dots(32)$$

3. 数値解析

3.1 検証

文献1)の実験と比較することにより、本解析法の解の妥当性を検証する。同実験は、外径0.076m、内径0.07m、高さ1m、密度 $1.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ の円筒モデルを使用している。ここで、ヤング率・減衰定数は、同論文中の空中並びに水中の自由振動実験結果より値を修正し、それぞれ $2.3 \times 10^9 \text{ N/m}$ 、7%を用いている。

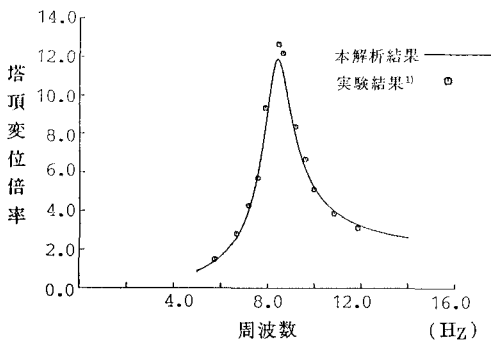


図-2 既応論文¹⁾との比較

図-2に、実験結果と本研究計算結果を示す。縦軸は、円柱底部入力変位に対する円柱頂部応答変位の比である。これよりわかるとおり、地盤は考慮していないものの、本研究は現象を適確に記述しているものと考えられる。

3.2 数値解析

a) 解析モデル・解析条件

大水深下の円柱構造物の地震時特性に及ぼす地盤の影響を検討する為、図-3に示すモデルについて地盤の硬さの一つの指標であるせん断速度 V_s をパラメーターとして、周波数応答解析を行った。諸物性については、同図中に記した。

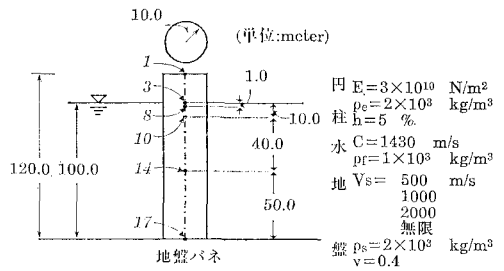


図-3 数値解析モデル及び物性
(イタリック文字は、ノード番号を示す)

b) 地盤バネ定数

本数値解析例では、地盤バネに、波動論に基づく三次元動的複素バネ⁶⁾を用いた。図-4に求めたバネ定数を示す。バネの効果を持つ実部については、周波数依存性は小さいが²⁾、ダンパーの効果を持つ虚部については、周

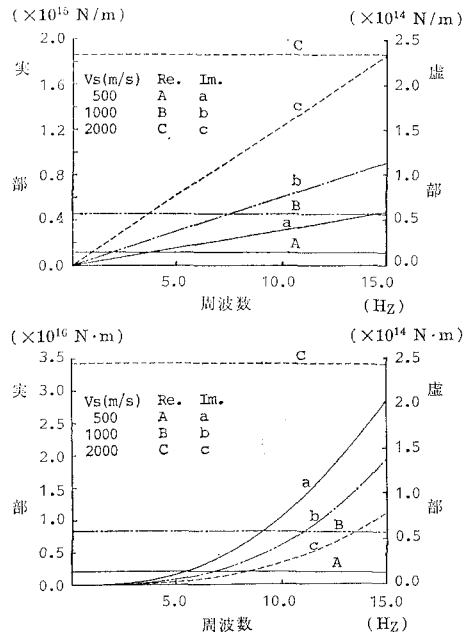


図-4 地盤バネ (上: 水平バネ, 下: 回転バネ)

波数が高い程大きな値となる周波数依存性を持つ。

c) 周波数特性

i) 加速度伝達関数

図-5 に、円柱頂部の絶対加速度伝達関数を、 V_s をパラメーターとして示した。 V_s が小さくなる程、固有周期は長い方へ移行する。また、 $V_s=2000$ m/s の非常に硬い地盤についても、 $V_s=\infty$ と比べるとわかるとおり、地盤との相互作用は、無視し得ない。

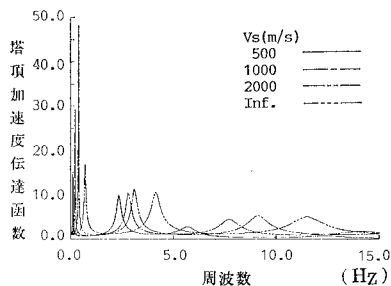


図-5 加速度伝達関数

ii) 付加質量係数・逸散減衰係数

本研究では、以下のとおり定義する。

$$\text{付加質量係数} = \frac{\text{地震時波力 } f}{\text{絶対加速度} \times \text{断面積} \times \text{水密度の実部}}$$

$$\text{逸散減衰係数} = - \frac{\text{地震時波力 } f \times \text{角周波数}}{\text{絶対加速度} \times \text{断面積} \times \text{水密度の虚部}}$$

図-6 (a)～(c) に、 z 座標を変えた 3 点について、上記係数を、 V_s パラメーターとして示した。なお、地盤・円柱共に剛とした場合 (Rigid) も同時に示した。同図中のピーク値は、上部ほど地盤による影響が小さく、また、

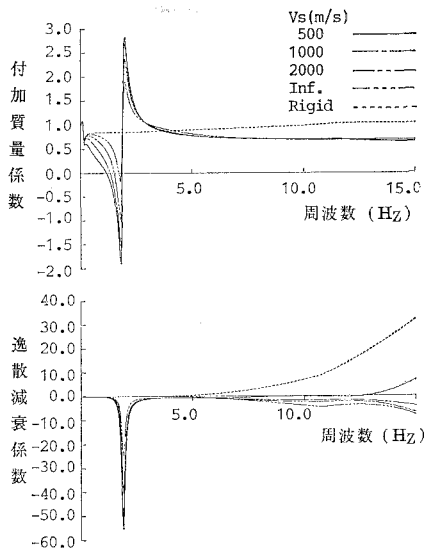


図-6(a) $z=80$ m での付加質量・逸散減衰係数

ピークを生じる周波数は、図-5 と比較するとわかるとおり、系の固有周波数とは、関連が薄い。このような特性は、式 (16) により評価される散乱波速度ポテンシャルが、円柱のたわみ即ち、全ての点の変形により影響されることによると考えられる。

iii) 代表的地震波による応答特性

EL CENTRO (1940, NS) 波を、最大加速度 100 gal として用い地震応答解析を行ない、その最大応答値分布を図-7 に示した。入力波のフーリエスペクトルに非常に影響されるであろうが、本例では、 $V_s=2000$ と $V_s=\infty$ 、 $V_s=500$ と $V_s=1000$ が類似している。また、全体の傾向として、地盤を考慮しない場合、かなり厳しい設計条件となることがわかる。

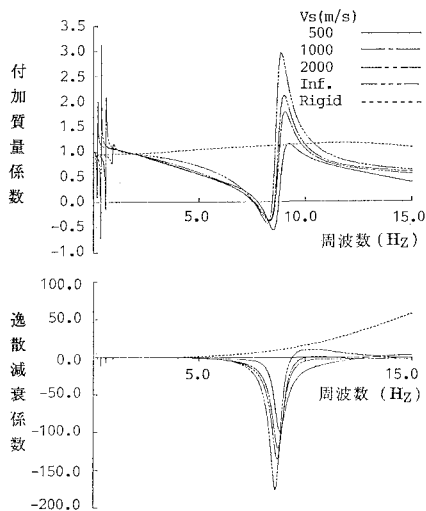


図-6(b) $z=50$ m での付加質量・逸散減衰係数

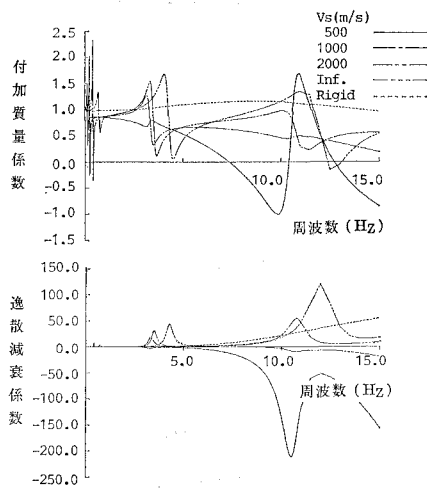


図-6(c) $z=10$ m での付加質量・逸散減衰係数

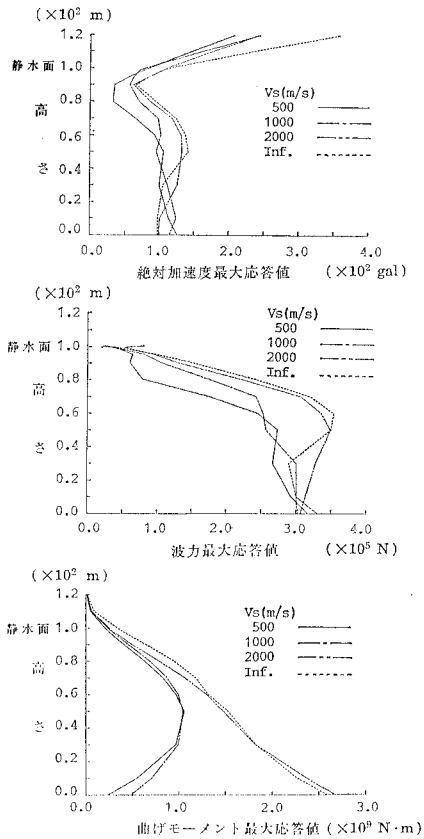


図-7 最大応答値分布

5. 結 語

弾性円柱の付加質量マトリクスを定式化，かつ地盤をバネでモデル化することにより，‘水-地盤-円柱’の連成系の動的特性が，比較的容易に表現出来ることが明らかとなった。

また，その動的特性は，地盤のせん断波速度に強く影響されており，応答特性も，固有振動数の変化に共ない大きく異なってくる。したがって，大水深下の大型水中構造物では，地盤も含めた連成系としての解析が必要である。

参 考 文 献

- 1) 後藤尚男・土岐憲三：水中橋脚の振動と耐振設計に関する基礎的研究，土木学会論文集，第100号，pp. 1~8, 1963.
- 2) 田中良弘：円柱海洋構造物の地震応答解析，第30回海岸工学講演会論文集，pp. 366~370, 1983.
- 3) 濱本卓司・田中彌壽雄：固定式海洋円筒シエルの動的解析 その3 地震応答解析，日本建築学会論文報告集，第303号，pp. 141~153, 1981.
- 4) Liao, C.-Y. and A. K. Chopra: Earthquake response of axisymmetric tower structures surrounded by water, UCB Report No. EERC 73-25, 1973.
- 5) 田中彌壽雄・濱本卓司・本橋啓一・都築充雄：地盤連成を考慮した固定式海洋円筒タンクの動的挙動 その2 地震応答解析，日本建築学会大会学術講演梗概集(関東)，pp. 2949~2950, 1984.
- 6) 武藤 清・小林俊夫・中原光春・増田 潔・佐々木文夫：Green 関数の離散化手法を用いた地盤-建物の動的相互作用解析プログラム (SOILAN)，日本建築学会第2回電子計算機利用シンポジウム，pp. 175~180, 1980.