

複素係数の blockage coef. を導入した漸近展開接合法

——スリットにおけるエネルギー損失量の評価——

角野昇八*・小田一紀**・村本哲二***・芳田利春****

1. 緒 論

これまで既に、任意断面の鉛直柱状体を無数に等間隔に配置した単列の柱体列や、柱体列の背後に不透過壁を有する縦スリット直立消波工（図-1）、あるいは柱体列を複数配置した多列多柱列の構造を対象とし、それらの構造物に波が直角に入射する場合の波の反射や透過、列間波高分布特性の問題を境界値問題としてとらえ、解析を行ってきた（ただし、隣接柱体の中心間隔は波長よりも非常に小さい、即ち $D/L \ll 1$ であることが必要である）¹⁾²⁾³⁾。解析は、いずれも漸近展開接合法（Method of Matched Asymptotic Expansions: MAE 法）を適用することによりなし、また、その妥当性は、解析結果を実験値あるいは既往の理論値と比較することにより証明した。しかしながら、これらはいずれも線形問題としての解析であり、したがってスリットにおける非線形損失エネルギーの効果は考慮されていないために、上記解析結果のうち、特に柱体列の場合の透過率や縦スリット直立消波工の反射率などについては、理論値は実験値よりもかなり大きい値を与えた。それゆえ、このような点において理論はまだ完全なものとは言えないものであった。

本研究はこのような立場を踏まえ、非線形損失エネルギーの効果を盛り込むことのできる MAE 法の理論の完成をめざすもので、柱体列や縦スリット直立消波工などの構造形式によらず、また、反射率、透過率、スリット通過水粒子速度、柱体列前後の波の位相差、などの水理特性のいかにかわりなく、統一的に、かつまた簡便な計算手法により、上記水理特性を十分に説明することのできる理論の完成を目的とした。

2. 理 論

(1) blockage coefficient C

スリットを有する柱状構造物に対して MAE 法を適用するとき、その内的解の outer limit における挙動と

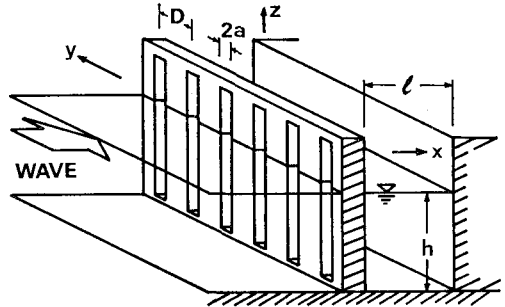


図-1 縦スリット直立消波工

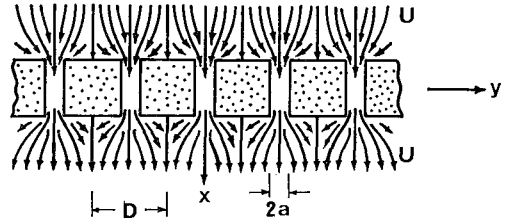


図-2 内的解

して、図-2 に示すような速度振幅 U の一様流を表わす解を導入している¹⁾。その速度ポテンシャルは、図-2 の座標系を採用するとき、次式のように表わされる（ただし、鉛直座標項は省略）。

$$\Phi(x, y, t) = \{(x-C)U + C_0\} e^{-i\sigma t} \quad (x < 0) \quad \dots (1)$$

$$\Phi(x, y, t) = \{(x+C)U + C_0\} e^{-i\sigma t} \quad (x > 0) \quad \dots (2)$$

ここに C_0 は複素定数であり、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $\sigma = 2\pi/T$ 、 T ：周期である。また、 C は、柱体断面形状のみによって決定される“blockage coefficient” とよばれる純理論定数（実数）であり、例えば、矩形断面柱体列に対しては次式のように与えられる¹⁾。

$$\begin{aligned} \frac{C}{D} = & \frac{b}{2D} \left(\frac{D}{2a} - 1 \right) + \frac{1}{\pi} \left[1 - \log 4 \frac{2a}{D} + \frac{1}{3} \left(\frac{2a}{D} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{281}{180} \left(\frac{2a}{D} \right)^4 \right] \quad \dots (3) \end{aligned}$$

ここに b は矩形断面の波方向方向の辺長を、 $2a$ はスリット幅を表わし、上式は $2a/D \ll 1$ の条件の下で有効である。

* 正 会 員 工 修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科
 ** 正 会 員 工 博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科
 *** 学 生 会 員 大阪市立大学大学院 工学研究科
 **** 正 会 員 工 修 東洋建設(株)

この C については、それが柱体列による非定常ポテンシャル流の障害の程度を表わす係数であることをこれまでも触れてきたが、ここで今、改めてそれについて再考してみよう。

周知のように、速度ポテンシャルを介して圧力は、

$$p = (w_0/g) \partial \Phi / \partial t \quad \dots\dots\dots (4)$$

より算定される。上式に式 (1) および式 (2) を代入することによって柱体列を挟む前後領域における圧力を算定し、さらにその差をとることにより柱体列前後の圧力差を求めれば、

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2i(w_0/g) \sigma C U e^{-i\sigma t} \\ &= 2i(w_0/g) \sigma C U \\ &= -2(w_0/g) C \dot{U} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる。ただしここに、 w_0 : 流体の単位体積重量、 g : 重力加速度であり、 $U = U \exp(-i\sigma t)$: 一樣流部の水粒子速度、 $\dot{U}$: その加速度である。即ち、 C は、柱体列をすぎる水粒子の加速度に比例する慣性抵抗の係数としての性格を有していることが上式よりも明らかである。

(2) 複素 blockage coefficient C_1 の導入

いまここで、この C を実部に持ち、また虚部に C_2 を持つような複素係数 C_1 、即ち、

$$C_1 = C + iC_2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を考えてみよう。この C_1 を用いて、 Δp を求めるための同様の計算をすれば (結局、式 (5) 中の C を C_1 で置換すればよい)、次式を得る。

$$\Delta p = -2(w_0/g) C \dot{U} - 2(w_0/g) \sigma C_2 U \quad \dots\dots\dots (7)$$

即ち、この式よりも明かなように、 C_2 を考慮することにより、水粒子速度 (の 1 乗) に比例する抵抗を導入することができる。したがってこの C_2 にエネルギー損失の効果を盛り込むことが可能となる。なお、式 (7) の次元より判断されるように、この C_2 は C と同様に長さの次元を有している。

このような方法によれば、従来の MAE 法による解析において、実係数の blockage coefficient を単にいわば“複素係数の blockage coefficient”で置き換えるだけでエネルギー損失の効果の算定も可能となり、したがって計算方法も従来のポテンシャル流を対象としたものをそのまま利用することができる利点が生ずることになる。

例えば、柱体列の場合の透過率と反射率の複素形は

$$\tau = i/(kC + i), \quad \rho = 1 - i/(kC + i) \quad \dots\dots\dots (8)$$

のように表わされるので¹⁾、その実数形は、式中の C を C_1 で置き換え、さらに絶対値をとることにより、以下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_T &= \sqrt{\frac{1}{k^2 C_2^2 + (kC_2 + 1)^2}} \\ \tau_R &= \sqrt{\frac{k^2 C_2^2 + k^2 C_1^2}{k^2 C_2^2 + (kC_2 + 1)^2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただしここに、 $k = 2\pi/L$ 、 L : 波長である。

(3) 損失係数 f と C_2 の関係

C_2 によって導入された抵抗は、しかし、水粒子速度の 1 乗に比例する形を有している。したがって、ここで対象とするような構造物において見られる、速度の 2 乗に比例する抵抗とは、それぞれの抵抗が波の 1 周期間になす仕事量が等しいとする関係、いわゆる「ローレンツの等価仕事原理」を介して関係づけられよい。

いま、本理論によるスリット通過水粒子速度は

$$V = U/(2a/D) = \gamma_T \cdot u/(2a/D) \quad \dots\dots\dots (10)$$

より求められる¹⁾。ただしここに、 u は入射波の水粒子速度の水平成分であり、 $2a/D$ は開口率を、また γ_T は透過率を表わしている。ここで注意したいのは、当然のことながら、この γ_T にもエネルギー損失の効果が盛り込まれていなければならない。したがって従来の解析における透過率の複素形を表わす式において、 C のかわりに C_1 を用いて誘導した、既述の式 (9) を用いる必要がある。

いま、 u として

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (11)$$

を考えると (これより鉛直座標項も記入する)、式 (7) の右辺第 2 項が仕事をなすことによって生ずるスリットにおけるエネルギー消費量は、単位時間あたり、

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^0 (\Delta p \cdot U) dz dt \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^0 \{-2(w_0/g) \sigma C_2 U^2\} dz dt \\ &= \frac{-\pi w_0 C_2^2 \gamma_T^2 H^2 (\sinh 2kh + 2kh)}{8T \sinh kh \cosh kh} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

のように表わされる。ただし、 H : 波高、 h : 水深である。

一方、速度の 2 乗に比例する抵抗は次式のように表わされる。

$$\Delta p = -2(w_0/g) f V^2 = -2(w_0/g) f U^2 / (2a/D)^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただしここに、 f は無次元の損失係数である。したがって、この抵抗がなす仕事量は、単位時間あたり、

$$\begin{aligned} W_{12} &= \frac{1}{T} \frac{1}{(2a/D)^2} \int_t^{t+T} \int_{-h}^0 \{-2(w_0/g) f U^2 |U|\} dz dt \\ &= \frac{-2w_0 f \gamma_T^2 H^3 (\sinh^2 kh + 3)}{9(2a/D)^2 T \sinh kh \cosh kh} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

のように表わされる。式 (12) および式 (14) を等置することにより f と C_2 との関係が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} f &= \frac{9\pi (\sinh 2kh + 2kh)}{16 (\sinh^2 kh + 3)} \sqrt{k^2 C_2^2 + (kC_2 + 1)^2} \\ &\quad \times \left(\frac{2a}{D} \right)^2 \frac{L}{H} \frac{D}{L} \frac{C_2}{L} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

すなわち、損失係数 f は、 C_2/D のほか、開口率 ($2a/D$)、波形勾配 (H/L)、相対水深 (h/L)、さらに D/L の無次元量のみの関数となっている。

結局、このようにして、従来の blockage coefficient を実部にとり、また虚部に線形抵抗係数を形式的に導入することにより、実質的には慣性抵抗および非線形抵抗の両者をただ1つの複素係数 C_1 に含めて考察することができる。

(4) 縦スリット直立消波工の場合の C_2' の算定

前節において求められた f と C_2 との関係は、柱体列の背面に不透過壁のない構造に対するものである。しかしながら背後に不透過壁が存在する場合や、多柱列が複数列存在するような場合には、損失係数の f の値が同じであっても、スリット通過水粒子速度の特性が異なるために、当然のことながら C_2 の値は変化することが考えられる。そこでここでは、縦スリット直立消波工に対する C_2 の値をあらためて C_2' とおき、この C_2' と前節の f との関係を「ローレンツの原理」を介して求めてみる。

まず、この場合のスリット通過水粒子速度は、次式のように求められている²⁾。

$$V = U/(2a/D) = \gamma \cdot u/(2a/D) \quad \dots\dots\dots(16)$$

ただし、

$$\gamma = \sqrt{\frac{2(1 - \cos 2kl)}{2k^2(C_2^2 + C_2'^2)(1 - \cos 2kl) - 2kC \sin 2kl + 1 + 2kC_2'(1 - \cos 2kl)}} \quad \dots\dots\dots(17)$$

であり、ここでも、従来の解析における C のかわりに $C_1 (=C+C_2')$ を用いている。なお、式中の l は消波室幅を表す。ここで、式 (16) と式 (10) とを比較するとき、形のうえでは単に、 γ_T と γ とが置き換わっているにすぎないので、 f と C_2' との関係も、前節の関係において γ_T を γ で置き換えるだけでよい。すなわち、 C_2'/D は f の関数として次式のように表わされる。

$$\frac{C_2'}{D} = \frac{16(\sinh^2 kh + 3)}{9\pi(2a/D)^2(\sinh 2kh + 2kh)} \gamma \cdot \frac{L}{D} \frac{H}{L} f \quad \dots\dots\dots(18)$$

上式は、 C_2'/D に関して超越方程式の形となっているため、 C_2'/D を求めようとする場合には繰返し計算が必要である。

この C_2'/D と C_2/D とは、 f を介することなく、直接にその関係を求めることもできる。すなわち、式 (18) に式 (15) を代入すれば次式を得る。

$$\frac{C_2'}{D} = \frac{C_2}{D} \gamma \sqrt{k^2 C^2 + (kC_2 + 1)^2} \quad \dots\dots\dots(19)$$

上式によれば、 C_2'/D と C_2/D との関係においては C/D 、 D/L 、 l/L のみが関係し、 H/L や h/L などの波の特性は関係しない形となっていることを知る。

3. 実験の方法

理論の検証のために用いたほとんどの実験値は、これまでの実験により得られているものを用いた。したがって、実験の方法についても既に記した¹⁾²⁾⁴⁾。ただ今回、柱体列（背面不透過壁無し）前後の水面における位相差を求めるための実験を新たに実施した。この実験についても、入射波の条件ほか、実験条件は他の実験のものと同じであるが、位相を計測するための波高計を柱体列より沖側と岸側にそれぞれ 20 cm ~ 30 cm 離して設置した。位相差は、これら 2 地点において柱体列前面の部分重複波と後面の透過波の時間波形が、zero-upcrossing する点の時間差より読み取った。実験装置の制約から、入射波と透過波の間の位相差の測定はできなかった。

4. 結果と考察

ポテンシャル流理論による値 ($C_2/D=0$) に対して、結果の相違が比較的顕著に現われる。 $2a/D=0.15$ の開口率の正方形断面角柱列の場合について議論をするが、他の開口率や円柱列についても、同様に以下の議論を進めることができる。

(1) C_2 の決定

現在のところ一般に、スリットにおけるエネルギー損失の影響を評価するために実験定数を導入することは避けられない。本理論においても、理論値を実験値と best fit させるようにして C_2 の値を決定する。具体的には、エネルギー損失の影響が最も顕著に現われると考えられる、柱体列からの波の透過率に主として着目して C_2/D を決定することにする。

図-3 は、柱体列の透過率および反射率の実験値と理論値を D/L の関数として表わしたものである。図中の実線は、式 (9) において $C_2/D=2.0$ とした場合の値を示し、また破線はポテンシャル流理論 ($C_2/D=0$) に対応する値を示すが、このように C_2 の値を選べば、透過率については理論値と実験値とはよく一致するようになっているのがまず認められる。ただし、これらの実験値はいずれも $H/L \div 0.01$ の条件に対して得られたものである。波形勾配の値がこれよりも大きい場合には、対応する C_2/D の値も大きくなることが考えられる。

ここで、 $D/L \geq 0.05$ の条件下で用いた角柱の一辺長 (15.0 cm) は、 $D/L \leq 0.04$ の条件下で用いたもの (5.0 cm) よりも 3 倍も大きいものであるが¹⁾、透過率のポテンシャル流理論のものからの減少の割合は実験値、理論値とも両条件下で同じである。このことは、少なくともこの辺長の差の下での透過率に関する縮尺効果はほとんど無いことを意味するもので、理論値はそのことも含

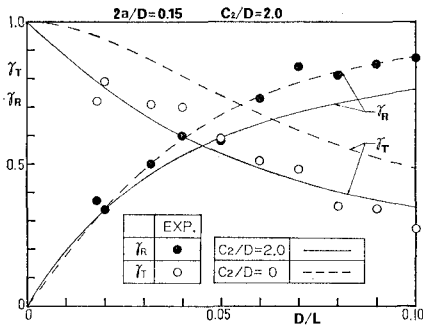


図-3 透過率と反射率(角柱列)

めて実験値を十分に説明できるものとなっている。

一方、反射率についても理論値はエネルギー損失の影響を受け、この開口率の場合には、実験値との整合性はむしろポテンシャル流理論によるものよりも若干悪くなっている箇所もみられる。しかしながら他の開口率の場合も含めて考えると、透過率および反射率の双方について実験値と理論値とを合致させるような C_2 の値を選択することが可能であった。

このようにして、開口率別に決定した C_2/D の値を表わしたものが図-4 である。図中には円柱列に対する値も記入したが、 C_2/D の値は開口率に対してほぼ一定の関係を有し、また、予想されるように、角柱列に対する値が円柱列に対するものよりも大きい。

なお、ある開口率の値に対して一定となるこれら C_2/D の値より算定される f の値は、 D/L によって大きく変化する。例えば、図-3 の $2a/D=0.15$ の開口率の場合、実験条件の変化の範囲 ($D/L=0.02\sim0.10$) に対して、 $f=0.279\sim4.61$ となる。

(2) 柱体列を挟む領域の波の位相差

図-5 は、柱体列を挟む領域の波の間の位相差の理論値⁵⁾を実験値とともに示したものである(ただし、 $D/L \leq 0.04$)。ポテンシャル流理論による値との差は僅かであるものの、前記の $C_2/D=2.0$ を用いて計算された理論値は実験値をよく説明している。図において注目されるのは、エネルギー損失の影響を受けることにより、位相差はその影響が無いときよりも一般に減少することであり、予想に反する結果を示して興味深い。

(3) 縦スリット直立消波工の反射率とスリット通過水粒子速度

海岸工学の実用上の観点にたてば、本理論のみにより、図-1 に示すような縦スリット直立消波工の様々の水理特性を十分に表現できるかが興味のあるところであろう。いま、縦スリット直立消波工の反射率を表わす式を示せば、以下のようになる。

$$K_R = \sqrt{1 - \frac{4kC_2^2(1 - \cos 2kl)}{2k^2(C^2 + C_2^2)(1 - \cos 2kl) - 2kC \sin 2kl + 1 + 2kC_2^2(1 - \cos 2kl)}} \quad \dots\dots\dots(20)$$

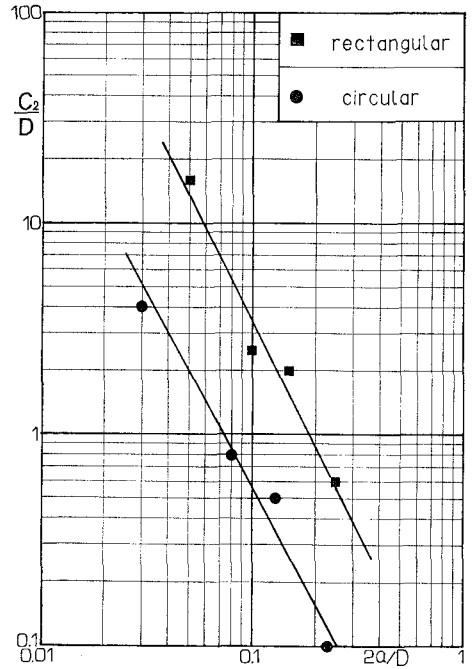
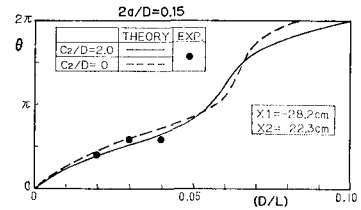
図-4 C_2/D と開口率との関係

図-5 位相差(角柱列)

図-6 は、上式により算定される反射率の理論値を、相対消波室幅 (l/L) の関数として実験値とともに示したものである ($C_2/D=2.0$)。図中には、スリット通過水粒子速度についても、その比較を示し、またポテンシャル流理論による値 ($C_2/D=0$) も示した(ただし、反射率のポテンシャル流理論による値は常に $K_R=1$)。この図によれば、反射率については、理論値は実験値をほぼ十分に説明できるものとなっているが、水粒子速度についてはやや小さめの値を与え、実験値は、そのピーク値付近を除いてはむしろポテンシャル流理論による値に近い場合もみられる。このような、理論による水粒子速度に関しての過小評価は、柱体列構造の場合全般に観察されたが、その原因の明確な理由についてはまだ明らかではない。

(4) 縦スリット直立消波工の消室内外の水面変動量とその位相差

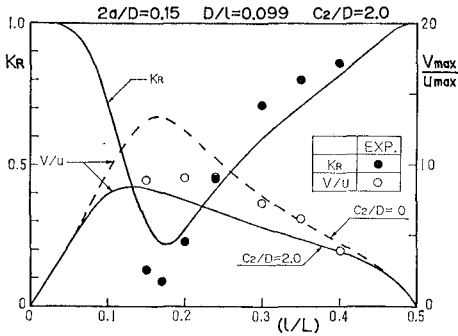


図-6 反射率とスリット通過水粒子速度

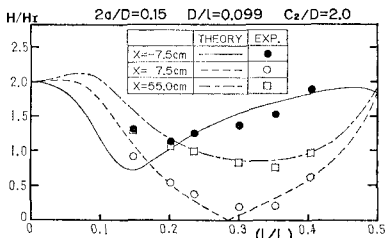


図-7 消波室内外の水面変動量

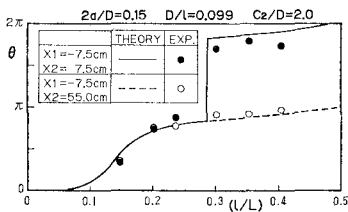


図-8 消波室内外水面変動の位相差

図-7 には、縦スリット直立消波工の消波室内外の水面変動量に関して、また図-8 には、水面変動の位相差

に関して、各々の場合の理論曲線 ($C_2/D=2.0$) と実験値を示した。これらの図によれば、理論値と実験値との整合性は全般に良いことが認められる。なお、これら諸量については、別解法による解析結果を既に発表している⁴⁾。また本手法による結果も別に発表の予定であるので、詳細な議論についてはそちらに譲りたい⁶⁾。

5. 結 論

以上のように、柱体列や縦スリット直立消波工などの構造形式によらず、エネルギー損失の影響を統一的に考察することのできる本理論の妥当性がかなりの程度証明されたものと考えられる。ただ、スリット通過水粒子速度については実験値よりもやや小さい値を与え、また柱体列の反射率についてもやや小さい値を与えるが、これらについては今後検討を要する。

参 考 文 献

- 1) 角野昇八・小田一紀: 任意断面柱体列による波の反射率および透過率の境界値問題解析, 土木学会論文集, 第 369 号 / II-5, pp. 213~222, 1986, 5 月。
- 2) 角野昇八ほか: 縦スリット直立消波工の水理機能の境界値問題解析, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 507~511, 1984。
- 3) 角野昇八ほか: 任意列, 任意断面柱体列周辺波動場の境界値問題解析, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 589~593, 1985。
- 4) 村本哲二ほか: 縦スリット直立消波工の消波室内外水面変動量とその位相差, 第 40 回土木学会年次学術講演会概要集, 第 2 部, pp. 573~574, 1985。
- 5) 村田利幸: エネルギー損失を考慮した縦スリット直立消波構造の水理特性, 大阪市立大学卒業論文, 1986。
- 6) 村本哲二ほか: 縦スリット直立消波工の消波室内外水面変動量とその位相差 (その 2), 第 41 回土木学会年次学術講演会概要集, 第 2 部, 1986。