

領域分割による津波の数値計算法に関する研究

泉 宮 尊 司*・磯 部 雅 彦**

1. 緒 論

地震に伴なう津波による被害を予測し、それに対する対策をたてる上で、陸上部への週上を含む津波の数値計算が不可欠である。津波の週上過程を精度よく予測するためには、特に海岸線付近あるいは陸上部において数値計算メッシュを数十メートルと極めて細かくする必要がある。このような場合、従来より用いられている方法すなわち、津波の発生域を含む外海領域と週上領域とを同時に計算する方法では、多大な記憶容量と計算時間が必要となり、場合によって実行不可能となる場合がある。また、対象地域以外の週上計算を行う場合には、発生域からすべて計算をやり直さなければならない。このような時、外海領域と週上領域とを分離して計算できれば、数多くの週上計算が幾度となく行えるので都合がよい。領域分割による津波の数値計算は、すでに岩崎・真野(1976)により行われているが、誤差に関する定量的な議論は行われていない。そこで本研究では、1次元伝播波に対してではあるが、領域分割法による週上高について理論的に取扱った。また、津波が境界線に対して斜めに入射する場合でかつ反射波が共存する場合の入・反射波分離方法も提案されている。

2. 1次元伝播波の週上高

2.1 一様傾斜海浜における週上高

まず、図-1に示すような一様傾斜海浜上の線形長波について取扱う。この場合の基礎方程式は、

$$\partial\eta/\partial t + \partial(hu)/\partial x = 0 \quad (1)$$

$$\partial u/\partial t + g\partial\eta/\partial x = 0 \quad (2)$$

である。ここに、 η は静水面より測った水位、 u は水平流速、 h は水深、 g は重力加速度である。ここで、

$$\eta = \hat{\eta} e^{i\omega t}, \quad u = \hat{u} e^{i\omega t} \quad (3)$$

とおき、 $h = sx$ なる関係式とともに式(1)および(2)に代入すると、次式を得る。

$$\hat{\eta}_{xx} + (1/x)\hat{\eta}_x + (\sigma^2/gsx)\hat{\eta} = 0 \quad (4)$$

$$\hat{u} = (ig/\sigma)\hat{\eta}_x \quad (5)$$

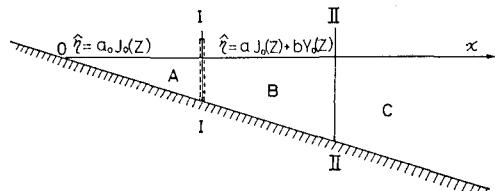


図-1 一様傾斜海浜の領域の分割

ここに、 i は虚数単位、 σ は角周波数 ($= 2\pi/T$, T は波の周期) であり、 s は海底勾配、添字 x は微分を表す。ここで、

$$z = 2\sigma \sqrt{x/gs} \quad (6)$$

とおくと、式(4)は次のように書き換えられる。

$$\hat{\eta}_{zz} + (1/z)\hat{\eta}_z + \hat{\eta} = 0 \quad (7)$$

上式の一般解は、0次の Bessel 関数 $J_0(z)$ と0次の Neumann 関数 $Y_0(z)$ によって与えられる。

$$\hat{\eta} = aJ_0(z) + bY_0(z) \quad (8)$$

ここに、 a および b は積分定数である。流速振幅 u は、式(8)を式(5)に代入することにより

$$\hat{u} = -i\sqrt{g/sx}[aJ_1(z) + bY_1(z)] \quad (9)$$

となる。ここに、 $J_1(z)$ および $Y_1(z)$ はそれぞれ1次の Bessel 関数および1次の Neumann 関数である。

次に、図-1に示すように断面 I ($x=r$) の位置において仮想的な鉛直壁が存在するものと考え、この位置において解の接続を行い、A領域の波動場を求めることがある。この場合、B領域の断面 I において水平流速は鉛直壁があることにより零であるので、式(9)より $z_r = 2\sigma \sqrt{r/gs}$ として

$$b = -[J_1(z_r)/Y_1(z_r)]a \quad (10)$$

となる。また、断面 I において入射波成分と反射波成分とを分離するために、 $\hat{\eta}$ および \hat{u} を

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}_+ + \hat{\eta}_- \quad (11)$$

$$\hat{u} = \sqrt{g/h}(\hat{\eta}_+ - \hat{\eta}_-) \quad (12)$$

と分離し、 $\hat{\eta}_+$ および $\hat{\eta}_-$ について解くと、

$$\hat{\eta}_+ = (\hat{\eta} + \sqrt{g/h}\hat{u})/2 \quad (13)$$

$$\hat{\eta}_- = (\hat{\eta} - \sqrt{g/h}\hat{u})/2 \quad (14)$$

なる関数式を得る。したがって、断面 I における汀線方

* 正会員 工博 横浜国立大学助手 工学部建設学科

** 正会員 工博 横浜国立大学助教授 工学部建設学科

向に進行する成分 $\hat{\eta}_-$ は、式(10)および(14)を用いて、

$$\hat{\eta}_-=a[J_0(z_r)-[J_1(z_r)/Y_1(z_r)]\cdot Y_0(z_r)] \dots\dots\dots(15)$$

となる。一方、領域Aでの解は汀線すなわち $x=0$ において、振幅が無限大とはならないのでその解は、

$$\hat{\eta}=a_0 J_0(z) \dots\dots\dots(16)$$

$$\hat{u}=-i\sqrt{g/h} a_0 J_1(z) \dots\dots\dots(17)$$

となり、同様に式(16)および(17)を式(14)に代入して、

$$\hat{\eta}=a_0[J_0(z)+iJ_1(z)]/2 \dots\dots\dots(18)$$

を得る。 $x=r$ において、式(15)と式(18)が等しいと置くと、

$$\frac{a_0}{a}=-\frac{2}{\pi z_l}\frac{J_0-iJ_1}{Y_1(J_0^2+J_1^2)} \dots\dots\dots(19)$$

を得る。ここに、 $J_0=J_0(z_r)$, $J_1=J_1(z_r)$ 等である。

断面IIより以深の領域Cにおいて、水面および流速の振幅は、

$$\hat{\eta}=2a_2 \cos(\int kdx - \delta) \dots\dots\dots(20)$$

$$\hat{u}=-2ia_2\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(\int kdx - \delta) \dots\dots\dots(21)$$

と表わされる。ここに、 k は波数、 δ は位相差である。振幅 a_2 は浅水係数 K_s を用いて、

$$a_2=K_s a_\infty \dots\dots\dots(22)$$

と表現され、 K_s は長波近似の仮定のもとでは、

$$K_s=\sqrt{\frac{1}{2n}\frac{c_0}{c}} \sim \sqrt{\frac{1}{2\sigma}\sqrt{\frac{g}{h}}} \dots\dots\dots(23)$$

である。ここに、 a_∞ は沖波の振幅を示し、 c_0 は沖波の波速、 c は波速、 n は群速度と波速との比を示す。したがって、長波近似のもとでは式(20)および式(21)は、

$$\hat{\eta}=\frac{2}{\sqrt{sz}}a_\infty \cos(z-\delta) \dots\dots\dots(24)$$

$$\hat{u}^*=-i\frac{2}{\sqrt{sz}}a_\infty \sin(z-\delta) \dots\dots\dots(25)$$

と書き改められる。ここに、 $\hat{u}^*=\hat{u}/\sqrt{g/h}$ である。ところで、断面IIが汀線より十分に離れているとする($(z_l=2\sigma\sqrt{l/gs} \gg 1)$)、領域Bの解である式(8)は、

$$\hat{\eta} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sqrt{a^2+b^2} \cos\left(z-\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right) \dots\dots\dots(26)$$

となる。ここに、 $\varepsilon=\tan^{-1}(b/a)$ である。式(24)と式(26)とを比較することにより

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{2\pi}{s}}a_\infty \dots\dots\dots(27)$$

$$\delta=\pi/4+\varepsilon \dots\dots\dots(28)$$

を得る。

ここで、週上高 R に対応する汀線の位置 ($z=0$) における振幅 a_0 と沖波の振幅 a_∞ との比を求めるとき、式(19)および(27)の関係により、

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_\infty} &= \frac{a_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a_\infty} \\ &= -\frac{2}{\pi z_l} \frac{J_0-iJ_1}{(J_0^2+J_1^2)\sqrt{J_1^2+Y_1^2}} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \end{aligned} \dots\dots\dots(29)$$

を得る。さらに、上式の絶対値をとると、

$$\left| \frac{a_0}{a_\infty} \right| = \frac{2}{\pi z_l} \frac{1}{\sqrt{J_0^2+J_1^2} \sqrt{J_1^2+Y_1^2}} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \dots\dots\dots(30)$$

となる。式(30)は、 $z_l \ll 1$ のときには $J_0 \sim 1$, $J_1 \sim 0$, $Y_1 \sim -2/\pi z_l$ のとなるために、

$$\left| \frac{a_0}{a_\infty} \right| \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \dots\dots\dots(31)$$

のようになる。また、 $z_l \gg 1$ に対しては $\sqrt{J_0^2+J_1^2} \sim \sqrt{2/\pi z_l}$, $\sqrt{J_1^2+Y_1^2} \sim \sqrt{2/\pi z_l}$ となるために、この場合も同じく式(31)の関係が得られる。式(31)の関係は一様傾斜海浜における週上高と沖波の振幅との比の理論値(たとえば梶浦, 1984)であり、本計算法のように、浅海域で領域を分割しても、汀線方向の進行波成分を接続すれば同時に解いた結果とほぼ一致することがわかる。

図-2は、式(30)の関係をプロットしたものである。ただし、両辺を理論値である $\sqrt{2\pi/s}$ で除してあるので、縦軸の値が1のとき理論値と一致することを示す。 $z_l=1.2$ 付近でこの値は0.8と若干小さくなるが、全般的にはほぼ1程度の値と見てよいであろう。ちなみに、水深50mの所に仮想境界線を設けたとしよう。海底勾配を1/50、津波の卓越周期を10分(600s)とすると、 $z_l=2.365$ となり理論値との比は0.95となる。このことは、津波の数値計算において領域を分割して入射波成分のみをその境界で入力すれば、同時に全領域を計算した結果と比較して、週上高にして約5%の誤差しか生じないことを意味する。

2.2 step型地形における週上高

Step型地形における長波の週上高については、Keller

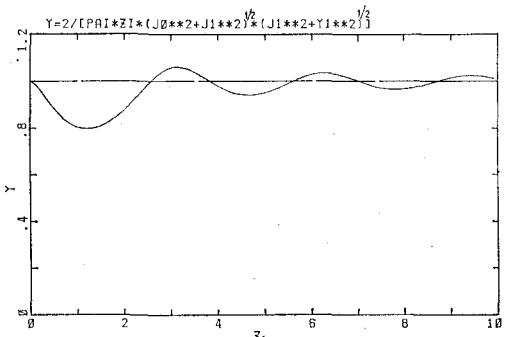


図-2 領域分割法による週上高と理論値との比較(一様傾斜海浜の場合)

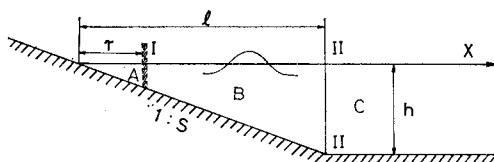


図-3 Step型地形における領域の分割

Keller (1964) および Shuto (1972) らによって研究されており、その理論遇上高 R は、

$$\frac{R}{H} = (J_0^2(z_t) + J_1^2(z_t))^{-1/2} \quad \dots \dots \dots (32)$$

である。ここでは、この結果と図-3 に見られるような汀線より r だけ離れた位置で分離して計算した結果とを比較検討することにする。

まず、水平床上の水面および流速振幅を

$$\hat{\eta} = \{ae^{ikx} + be^{-ikx}\} \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$\hat{u} = -\sqrt{\frac{g}{h}} \{ae^{ikx} - be^{-ikx}\} \quad \dots \dots \dots (34)$$

とおき、斜面上の解

$$\hat{\eta} = AJ_0(z) + BY_0(z) \quad \dots \dots \dots (35)$$

$$\hat{u} = -i\sqrt{g/h} \{AJ_1(z) + BY_1(z)\} \quad \dots \dots \dots (36)$$

と断面IIで接続する。すなわち、水位および水平流速をそれぞれ等しいとする、

$$2ae^{ikl} = A(J_0 + iJ_1) + B(Y_0 + iY_1) \quad \dots \dots \dots (37)$$

$$2be^{-ikl} = A(J_0 - iJ_1) + B(Y_0 - iY_1) \quad \dots \dots \dots (38)$$

なる関係を得る。ここに、 $J_0 = J_0(z_t)$, $J_1 = J_1(z_t)$ 等である。仮想境界Iにおいて $\hat{u} = 0$ であるから、

$$B = -[J_1(z_t)/Y_1(z_t)]A \quad \dots \dots \dots (39)$$

でなければならぬ。さらに、2.1 で述べた方法により汀線方向に進行する成分波を分離すると、

$$\hat{\eta}_- = \frac{A}{2} \left[J_0(z) - \frac{J_1(z_t)}{Y_1(z_t)} Y_0(z) \right] \quad \dots \dots \dots (40)$$

となる。また、領域Aにおける水位および流速の振幅は

$$\hat{\eta}_- = A_0 J_0(z), \quad \hat{u}_- = -i\sqrt{g/h} A_0 J_1(z) \quad \dots \dots \dots (41)$$

であるから、汀線方向の進行波成分 $\hat{\eta}_-$ は、

$$\hat{\eta}_- = A_0 \{J_0(z) + iJ_1(z)\}/2 \quad \dots \dots \dots (42)$$

となる。式(40)と(42)が $z = z_t$ で等しいとおくと、

$$\left| \frac{A_0}{A} \right| = \frac{2}{\pi z_t} \frac{1}{|Y_1(z_t)| \sqrt{J_0^2(z_t) + J_1^2(z_t)}} \quad \dots \dots \dots (43)$$

を得る。式(37), (39)および(43)の関係を用いて汀線における振幅 $|A_0|$ と入射波の波高 $2|a|$ との比を求める、

$$\frac{|A_0|}{2|a|} = \frac{2}{\pi z_t} \frac{1}{\sqrt{J_0^2(z_t) + J_1^2(z_t)}} \frac{1}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad \dots \dots \dots (44)$$

となる。ここに、

$$P = J_0(z_t)Y_1(z_t) - J_1(z_t)Y_0(z_t) \quad \dots \dots \dots (45)$$

$$Q = J_1(z_t)Y_1(z_t) - J_1(z_t)Y_0(z_t) \quad \dots \dots \dots (46)$$

である。 $z_t \ll 1$ のときには、 $J_0(z_t) \sim 1$, $J_1(z_t) \sim 0$, $Y_1(z_t) \sim -2/\pi z_t$ となるので、式(44)は

$$\frac{|A_0|}{2|a|} \sim \frac{1}{\{J_0^2(z_t) + J_1^2(z_t)\}^{1/2}} \quad \dots \dots \dots (47)$$

となる。この関係は、Keller・Keller の求めた結果と一致する。また $z_t = z_l$ のときも式(32)と一致する結果が得られる。

図-4 は、 $z_t = 0.5, 1.0, 2.0$ および 4.0 に対して式(44)の関係をプロットしたものである。この図中の実線は、Keller・Keller および Shuto による理論線である。この図より、 $z_t = 1.0$ および 2.0 に対して理論遇上高との差が幾分大きくなっていることがわかる。これは、斜面全体の固有振動成分が影響していると考えられるが、この物理的解釈は今後の課題としたい。

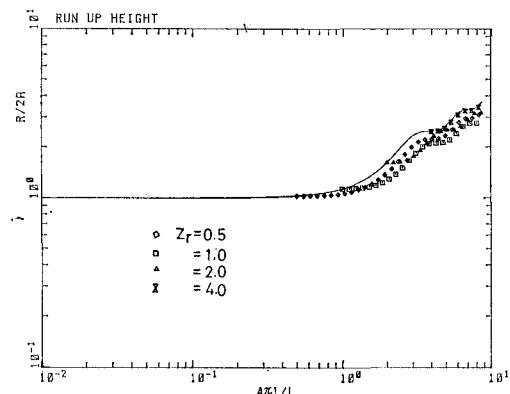


図-4 Step型地形における潮上高の比較

3. 領域分割法における境界条件

3.1 特性曲線法による境界条件の算定

特性曲線法による境界条件の算定法や入・反射波の分離法については、すでに岩崎・真野(1976)あるいは後藤・小川(1982)等によって用いられている。しかしながら、これらは1次元伝播の場合の特性関係を利用したものであり、2次元伝播の場合には誤差を生じる恐れがある。そこで本研究では、水深が一様な条件の下ではあるが、2次元伝播の場合について特性曲線を求めてみることを試みる。

2次元線形長波の方程式は、

$$\eta_t + h(u_x + v_y) = 0 \quad \dots \dots \dots (48)$$

$$u_t + g\eta_x = 0, \quad v_t + g\eta_y = 0 \quad \dots \dots \dots (49)$$

である。ここで、上式の解を入射波成分と反射波成分とに分離して次のように書くこととする。

$$\eta = \eta_I + \eta_R \quad \dots \dots \dots (50)$$

$$u = \sqrt{g/h}(\eta_I \cos \theta_I + \eta_R \cos \theta_R) \quad \dots \dots \dots (51)$$

$$v = \sqrt{g/h}(\eta_I \sin \theta_I + \eta_R \sin \theta_R) \quad \dots \dots \dots (52)$$

を (x_1, y_1) , 点2を (x, y) とすると, 直線1-2は反射波の特性線であるので,

$$x - x_1 = c \cos \theta_R t \quad \dots \dots \dots (74)$$

$$y - y_1 = c \sin \theta_R t \quad \dots \dots \dots (75)$$

となり, 線流量等の計算地点からの距離に応じて重みを付けて求めてやればよい。

図-6は, 上記の境界条件を用いて斜め重複波の場を計算した結果である。計算領域は矩形で, ある1辺に鉛直壁が存在する場合で, Δ 印は計算結果を示し, 実際は定常状態における線形理論解である。この図より, 計算値は3波目よりほぼ定常状態に達し, 理論値とはほぼ一致していることがわかる。

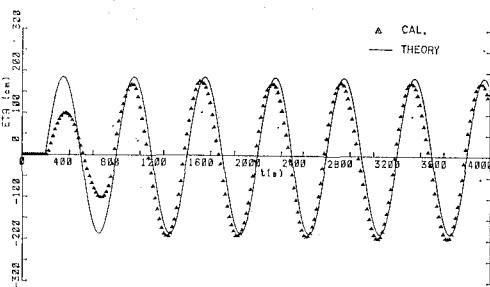


図-6 斜め重複波の場合における計算結果と理論値との比較

3.2 仮想境界における入・反射波の分離法

仮想境界において浅海域の計算を行うには, 外海計算により得られた水位および流速より汀線方向への進行波成分を分離し, この成分を入力波形として用いる。上述の特性関係式を用いると, 1次元伝播に対しては

$$u_2^{(+)} = (\sqrt{g/h} \eta_1 + u_1)/2 \quad \dots \dots \dots (76)$$

を, 2次元伝播に対しては,

$$\begin{aligned} u_2^{(+)} &= (\sqrt{g/h} \eta_1 - \cos \theta_R u_1 - \sin \theta_R v_1 \\ &\quad - [\sin \theta_I - \sin \theta_R] v_2) / [\cos \theta_I - \cos \theta_R] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (77)$$

を得る。式(77)において, $\theta_I = 0$, $\theta_R = \pi$ とすると1次元伝播の結果式となる。また, $\cos \theta_I = 1$, $\cos \theta_R = -1$ の条件下では, 1次元伝播の式を用いてもそれほどの誤差はないものと考えられる。

図-7は, 海底勾配1/50の地形上で水深100mの所に仮想鉛直壁が存在するものとし, 水深430mの所で入・反射波を分離した結果である。約1周期後に反射波が到達していることがわかる。

図-8は, 領域分割法による水位の計算結果(破線)と同時に計算を行った結果(実線)とを比較したものである。この結果は, 図中のにおけるものである。両者共によく一致していると言えよう。

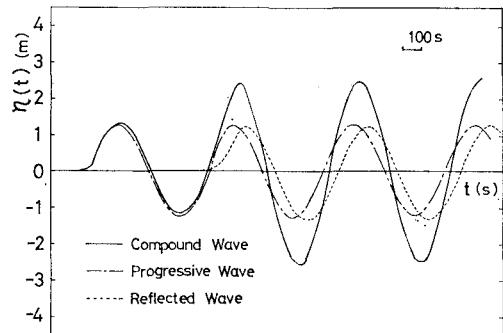


図-7 入・反射波成分の分離

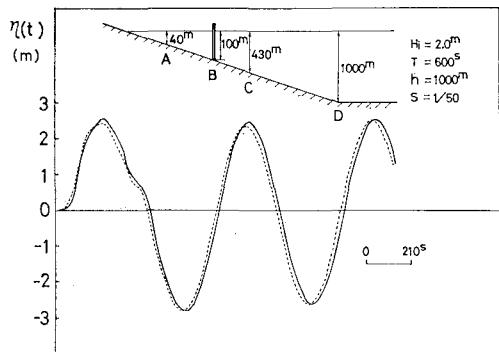


図-8 水面波形の比較

4. 結 言

領域分割法による週上高について, 1次元ではあるが理論的に取扱い, その誤差について定量的に評価した。また, 数値計算における入・反射波成分分離法を示し, 分割法による結果と同時に行った計算結果とを比較検討した。なお, 本研究の一部は昭和60年度文部省科学研費自然災害特別研究(2)によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 岩崎敏夫・真野 明: 三陸沖の断層地震による大津波の追算, 第23回海岸工学講演会論文集, pp. 443~447, 1976.
- 2) 梶浦欣二郎: 孤立波の陸上週上について, 一碎波と底面摩擦効果の検討, 東北大学津波防災実験所研究報告, 第I号, pp. 49~62, 1984.
- 3) Keller, J. B. and H. B. Keller: Water wave runup on a beach, Res. Rept. No. NONR-3828 (00), Office of Naval Res. Dept. of the Navy, 1964.
- 4) Shuto, N.: Standing waves in front of a sloping dike, Coastal Eng. in Japan, Vol. 15, pp. 13~23, 1972.
- 5) 後藤智明・小川由信: Leap-frog 法を用いた津波の数値計算法, 東北大学工学部土木工学科研究報告, 52 p., 1982.
- 6) 岩差義明・井上和也・吉田英信: 特性曲線法による二次元平面流れの数値解析法に関する2, 3の検討, 京都大学防災研究所年報, 第24号B-2, pp. 387~396, 1981.