

方向スペクトルの推定における多変量自己回帰モデルの適用

橋 本 典 明*・小 舟 浩 治*

1. ま え が き

海の波の基本的性質を表示するために、波のエネルギーが周波数および方向角に対して分布している状態を表示する方向スペクトルが用いられる。方向スペクトルの推定方法としては、既にいくつかの方法が提案されており、DFT 法¹⁾、パラメータ法²⁾、MLM³⁾、EMLM⁴⁾、MEP⁵⁾などの方法がある。これらの方法は、いずれも、方向スペクトルに伝達関数を乗じて波数ベクトルについて積分したものがクロススペクトルになるという、方向スペクトルとクロススペクトルの関係に基づいて推定する方法である。すなわち、いずれの方法もクロススペクトルの推定値を入力として方向スペクトルを推定する方法であり、波形記録から直接的に方向スペクトルを推定するものではない。このために、一般に、方向スペクトルの推定精度はクロススペクトルの推定精度に依存することになる。しかしながら、これまで、クロススペクトルの推定精度が方向スペクトルに及ぼす影響に関する研究はほとんどなされていない。したがって、ここでは、クロススペクトルの推定精度が方向スペクトルに及ぼす影響を評価することを目的として、まず、FFT 法および多変量自己回帰 (Multichannel Autoregressive; MAR) モデルを用いた場合のクロススペクトル推定値について両者の相違を検討し、さらに、これらをもとに方向スペクトル解析を行ない、その特性について検討した結果について報告する。

2. 多変量自己回帰モデルを用いたクロススペクトルの推定

FFT 法を用いてクロススペクトル解析を行なう場合、独立な成分波を重ね合わせた一次元不規則波であっても、スペクトル解析の自由度、あるいは2点間の距離の増加などによって、2つの波動量のコヒーレンスは見掛け上低下することが知られている。また、しばしば、安定度と分解能の面から自由度をいくらに設定するか等に頭を悩ませることも多い。

一方、MAR モデルを用いる方法は、FFT 法とは異なり、ウィンドウによる平滑化はモデル選択の過程で自動的に行なわれる方法である。このため、FFT 法などでは、周囲をなめらかにすると、ピークもなまってくるなどの欠点があるが、本方法では鋭いピークも表現できるという利点を有している。また、与えられた時系列データが多変量自己回帰過程に従うならば、本方法により推定されるクロススペクトルは最尤推定量となる。

したがって、ここでは、波浪観測ブイ、あるいは波高計アレイなどから得られる任意地点の任意の波動量の時系列データが、MAR モデルで表わされるものとして、クロススペクトルの推定を行なった。MAR モデルによれば不規則波動量 $X(n)$ は次式で表わされる⁶⁾。

$$X(n) = \sum_{m=1}^M A(m)X(n-m) + E(n) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、

$$X(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{bmatrix}, \quad A(m) = \begin{bmatrix} a_{11}(m) & \cdots & a_{1k}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(m) & \cdots & a_{kk}(m) \end{bmatrix}$$

$$E(n) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(n) \\ \vdots \\ \varepsilon_k(n) \end{bmatrix}, \quad R_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(l) = \begin{cases} \sigma_{ij} & (l=0) \\ 0 & (l \neq 0) \end{cases}$$

であり、 $x_i(n)$ は任意地点の任意の波動量の時系列データ、 $a_{ij}(m)$ は回帰係数、 ε_j は予測誤差、 σ_{ij} は $\varepsilon_i \varepsilon_j$ の共分散である。

多変量時系列データに式 (1) をあてはめる場合、クロススペクトルは次式で与えられる⁶⁾。

$$P(f) = (A(f))^{-1} \Sigma (\overline{A(f)})'^{-1} \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに、 $P(f)$ は (i, j) 要素が x_i と x_j のクロススペクトル $\Phi_{ij}(f)$ である行列、 f は周波数、 Σ は (i, j) 要素が σ_{ij} である行列、 $A(f)$ は (i, j) 要素が $a_{ij}(f)$ である行列であり、

$$a_{ij}(f) = \sum_{m=0}^M a_{ij}(m) \exp(-i2\pi f m) \quad \cdots \cdots (3)$$

である。

MAR モデルの次数選択の規準としては、赤池により提案された AIC (Akaike's Information Criterion) があり、次式で表わされる⁷⁾。

* 正会員 工務 運輸省港湾技術研究所 海象観測研究室

$$\begin{aligned} \text{AIC} = & -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) \\ & + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数}) \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

式 (1) の M 次のモデルの場合には, AIC は次式となる.

$$\begin{aligned} \text{AIC}(M) = & N \log \{2\pi \|\Sigma_M\|\} + Nk \\ & + 2\{Mk^2 + (k+1)k/2\} \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

ここに, N はデータ数, k は波動数の数, $\|\Sigma_M\|$ は $\Sigma(M)$ の行列式である.

式 (1) の回帰係数 $A(m)$ を推定する方法としては Yule-Walker 法 (以下, YWM と略記)⁶⁾ や Householder 法 (以下, HHM と略記) を用いた最小自乗法⁷⁾ による解法があり, 容易に回帰係数の推定値が求められる. YWM による解法は, 事前に推定された多変量時系列データの共分散関数を用いて, 漸化式により低次モデルの回帰係数から高次モデルの回帰係数へと, 順次, 計算を進めて行く方法である. この場合, 各計算ステップごとに AIC を算出し, AIC が最小となるモデル次数を最適モデル次数として選択する. 一方, HHM による解法は直交変換に基づく解法であり, いったん Householder 変換により, 観測データから構成される行列の三角行列が求められると設定されたモデル次数の範囲内で, すべての次数の AIC は容易に算出できる. このため, プログラミング上での取り扱いが便利であり, 観測データの追加, あるいは回帰係数の追加や削除が容易に行なえるなどの利点がある.

ここでは, MAR モデルの解法として, YWM および HHM の両方を用いてクロススペクトル解析を行ない, 解法の違いによるクロススペクトル推定値の差異についても検討することとした. なお, HHM を用いる場合には, 赤池ら⁸⁾ と同様に, まず, AIC が最小となる最適モデル次数を選択し, 次に, 各変数 $x_i(n)$ ごとに回帰係数 $a_{ij}(m)$ の項数を増減させることにより AIC がさらに小さくなるかどうか検定することによって, 変数別に最適次数を決定した. これは, 任意の波動量に MAR モデルをあてはめる場合, 各波動量ごとに異なるモデル次数を持つことも考えられるため, 本方法を付加することにより, さらに推定精度の向上が図れるものとして付加した処理である.

3. 数値シミュレーションによる検討

MAR モデルを用いたクロススペクトル推定値の特性, あるいは FFT 法を用いたクロススペクトル推定値との相違を検討するために, 数値シミュレーションを行なった. ここでは, 次式で表わされる多数の成分波の線型重ね合せにより, 任意の不規則変動波形をシミュレートした⁹⁾.

$$\begin{aligned} \zeta_i(x, y, t) = & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N H_i(f_m, \theta_n) a_{mn} \cos(k_m x \cos \theta_n \\ & + k_m y \sin \theta_n + 2\pi f_m t + \varepsilon_{mn} + \phi_i) \\ & + z_i(t) \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

ここに, $H(f, \theta)$ は振幅の変換率を表す伝達関数, f は周波数, θ は成分波の来襲する方向, k は波数, ϕ は位相変換角, ε は位相遅れ角であって $0 \sim 2\pi$ の間に等密度にランダムに分布しているものとする. また, $z(t)$ は計測等に付随するノイズを模式的に表わしたもので, 正規確率分布の乱数を用いている. 各成分波の振幅 a_{mn} は方向スペクトルから次式で与えられる.

$$a_{mn} = \sqrt{2S(f_m)df_m} \sqrt{G(\theta_n|f_m)d\theta_n} \cdots \cdots (7)$$

ここに, $S(f)$ は周波数スペクトル, $G(\theta|f)$ は方向分布関数であり, それぞれ次式で与えている.

$$\begin{aligned} S(f) = & \sum_i \alpha_i H_{1/3i}^2 T_{pi}(f/f_{pi})^{-m_i} \\ & \times \exp\left\{-\frac{m_i}{n_i}(f/f_{pi})^{-n_i}\right\} \\ & \times \gamma_i \exp\left\{-(f/f_{pi}-1)^2/2\sigma^2\right\} \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

ここに, $f_p = 1/(1.05T_{1/3})$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 & (0.7f_p < f < f_p) \\ 0.09 & (f_p \leq f < 1.4f_p) \end{cases}$$

$$G(\theta|f) = \sum_i \beta_i \cos^{2S_i} \left(\frac{\theta - \bar{\theta}_i}{2} \right) \cdots \cdots (9)$$

ここに,

$$S = \begin{cases} S_{\max}(f/f_p)^5 & (f < f_p) \\ S_{\max}(f/f_p)^{-2.5} & (f \geq f_p) \end{cases}$$

表-1 にシミュレーションで用いた波浪条件を示す. ここでは, 水深を 150 m, サンプリング周期を 0.5 s, スペクトル分割数を 1025, 方向分割数を 360 として, 水面変動 η , 水面勾配 η_x および η_y の時系列データを作成した. また, 解析にあたっては, データ数を 2048, 1024, 512 と変え, それぞれの場合について, ノイズ付加率を各変動量の標準偏差の 0%, 2%, 4%, 6%, 8%, 10% とした場合について解析した.

表-1 数値シミュレーションに用いた波浪条件

	$H_{1/3}$ (m)	$T_{1/3}$ (s)	γ	m	n	$S_{\max}$	$\bar{\theta}$ (°)
case-1 (風波)	5.0	8.0	1.0	5.0	4.0	10.0	45.0
case-2 (うねり)	5.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	45.0
case-3 (風波+うねり)	5.0	8.0	1.0	5.0	4.0	10.0	60.0
	3.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	-60.0
case-4 (風波+うねり)	5.0	10.0	1.0	5.0	4.0	10.0	75.0
	3.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	-75.0
case-5 (うねり+うねり)	5.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	75.0
	3.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	-75.0

図-1 は波浪条件 case-1, データ数 2048, ノイズ付加率 6% の場合のクロススペクトル解析例(周波数スペクトル, コヒーレンスおよび位相差)を示したものである。図中の FFT による解析は, ウィンドウに 8×16 の三角フィルターを用い, 自由度を 24 とした場合の計算例である。また, TRUE は表-1 の波浪条件を用いて, 次式で表わされる数値積分⁴⁾により算出したものである。

$$\Phi_{mn}(\sigma) = \int_{\mathbf{k}} H_m(\mathbf{k}, \sigma) H_n^*(\mathbf{k}, \sigma) \times \exp\{-i\mathbf{k}(\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_m)\} S(\mathbf{k}, \sigma) d\mathbf{k} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに, $\Phi_{mn}(\sigma)$ はクロススペクトル, σ は角周波数, $H_m(\mathbf{k}, \sigma)$ は水面変動から任意の波動量への伝達関数, $\mathbf{k}$ は波数ベクトル, $S(\mathbf{k}, \sigma)$ は波数周波数スペクトル, * は共役複素数, $\mathbf{X}_m$ は平面座標である。

図-1 に見られるように, MAR モデルを用いる場合, AIC 最小値のモデル次数を選択した場合でも, 周波数スペクトルのピーク値は真値あるいは FFT の値よりも大きな推定値を算出する場合がある。しかしながら, コヒーレンスや位相差などの無次元量は, ほぼ妥当な推定値となることが多い。

その他, 図-1 および他のケースについて見られた一般的な特徴として, 以下のことが言える。

① 今回のシミュレーション例では, 波形にノイズを付加しない場合には, 明確な AIC 最小値は出現しなかった。これは成分波を重ね合わせて得られた波形が, 離散スペクトルとしての性質を保持しているためと思われる。

② ノイズ付加率の増加とともに, AIC 最小値は増大し, AIC 最小によるモデル次数は小さくなって, なめらかなクロススペクトル形状が推定される。

③ データ数が多い場合(2048)には, FFT と MAR の差異は小さいけれども, データ数が少ない場合(512)でも, 明確な AIC 最小値が存在する場合には, MAR はシャープなピーク形状を損うことなく, なめらかなクロススペクトルを推定可能である。

④ データ数が少ない場合には, HHM は YWM よりも長めのモデル次数を選択する傾向がある。その結果, HHM は YWM に比べて変動の大きなクロススペクトル形状となる場合が多い。

⑤ 逆に, データ数が多い場合には, YWM に比べて HHM の方がなめらかなクロススペクトル形状となる場合が多い。特に, ノイズ付加率の小さい場合には, YWM で推定されるコヒーレンスは, ピーク周波数よりも低周波数側で真値よりもかなり大きな値を推定するが, HHM ではほぼ妥当な値が推定される。などである。以上の諸特性の理論的根拠については, 今後さらに検討して行く予定である。

4. 方向スペクトル解析による検討

MAR モデルを用いたクロススペクトル推定値と FFT によるクロススペクトル推定値の方向スペクトル推定値に及ぼす影響, 相違などを検討するために, 3. で得られたクロススペクトル推定値を用いて方向スペクトル解析を行なった。方向スペクトルを推定する際に, クロススペクトルの推定方法として MAR モデルを導入する試みは, 既に Briggs¹⁰⁾によって行なわれているが, 方向スペクトルの推定方法として分解能の低い Longuet-Higgins ら¹¹⁾の方法を用いているため, 必ずしもその特性が明確になっているとは言い難い。したがって, ここでは, 汎用性が高く, 分解能の良い拡張最尤法(EMLM)⁴⁾を用いて方向スペクトル解析を行なった。

図-2~図-4 は方向スペクトルの等値線図を示した

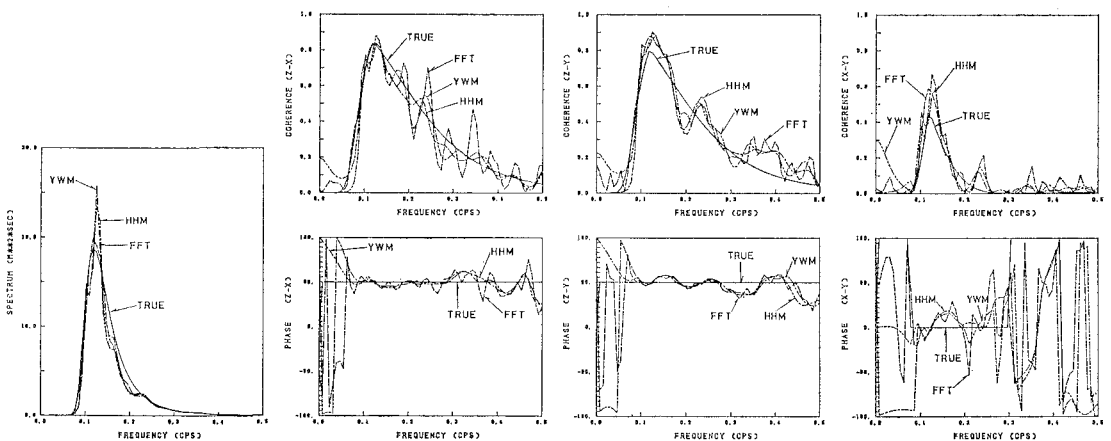


図-1 クロススペクトルの解析例 (case-1)

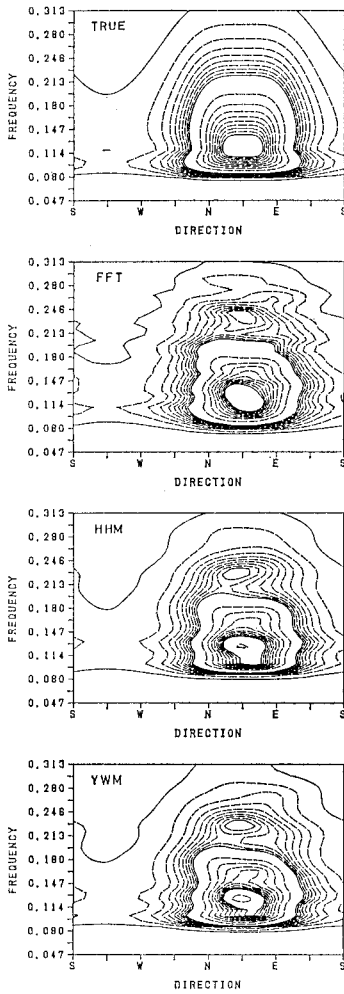


図-2 方向スペクトル (case-1)

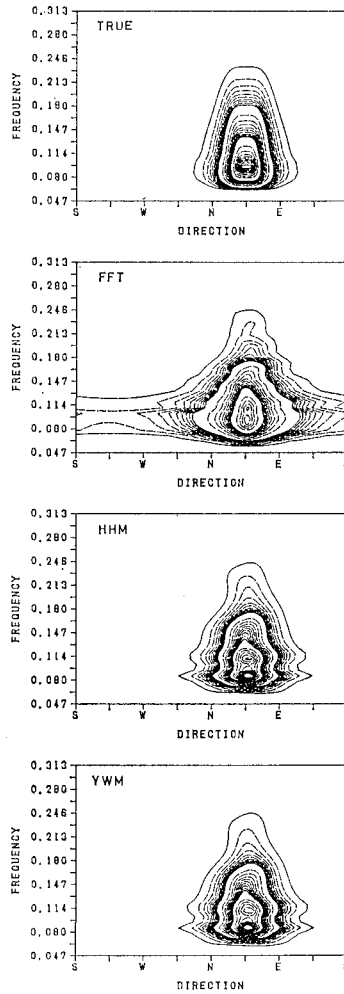


図-3 方向スペクトル (case-2)

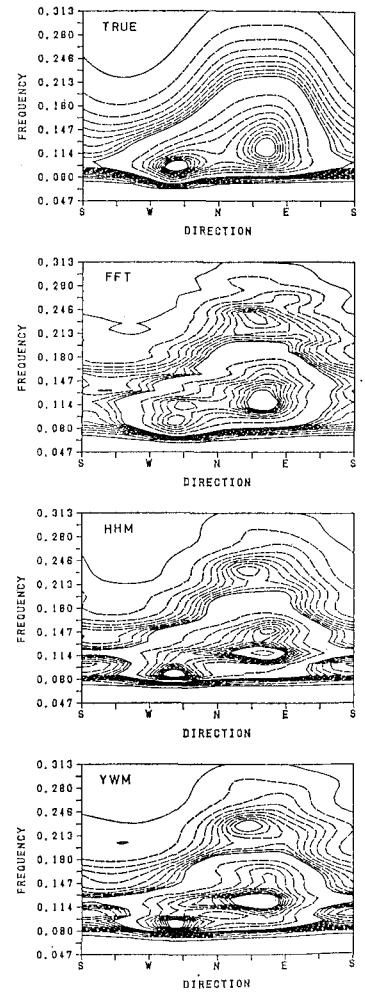


図-4 方向スペクトル (case-3)

ものである。図-2 は風波、図-3 はうねり、図-4 は風波とうねりが重なり合った例であり、データ数 2048、ノイズ付加率 6% の例を示している。図-2 に見られるように、エネルギーの方向分布幅の広い風波の方向スペクトルの場合には、FFT と MAR との差異は小さく、いずれもほぼ妥当な方向スペクトル形状を示している。しかしながら、図-3 に見られるように、エネルギーの方向分布幅の狭いうねりの場合には、FFT は真値よりもやや幅広いエネルギー分布を示す傾向がある。この場合でも MAR はほぼ妥当な推定値を示している。図-4 の二方向波浪の例では、いずれの方法も二方向波浪を識別している。しかしながら、FFT では低周波数側のピーク値は、かなり低く推定されており、一方、MAR では真値よりも尖鋭な形状として推定されている。周波数スペクトルの解析結果によれば、MAR の周波数スペクトルには顕著な二つのピークが見られたが、FFT の周

波数スペクトルでは平滑化のために低周波数側のピークは不明瞭であった。また、図-5 に示すピーク周波数近傍の方向分布関数に見られるように、高周波数側のピーク値 ($f=0.1171875$) は、いずれの方法もほぼ同程度の値を示しているが、低周波数側のピーク ($f=0.09375$) では、FFT は MAR よりも低めの値を示している。これは FFT の平滑化の影響が、方向分布関数の推定値にも及んでいることを示しているものと思われる。なお、図-4 および図-5 より、各周波数別には、MAR は二つのピークの内、卓越した方のピークを強調して推定する傾向が認められるようである。

5. あとがき

波形データから方向スペクトルを推定する過程の内、主としてクロススペクトル推定方法の違いによる推定値の相違や特性、および方向スペクトルに与える影響等に

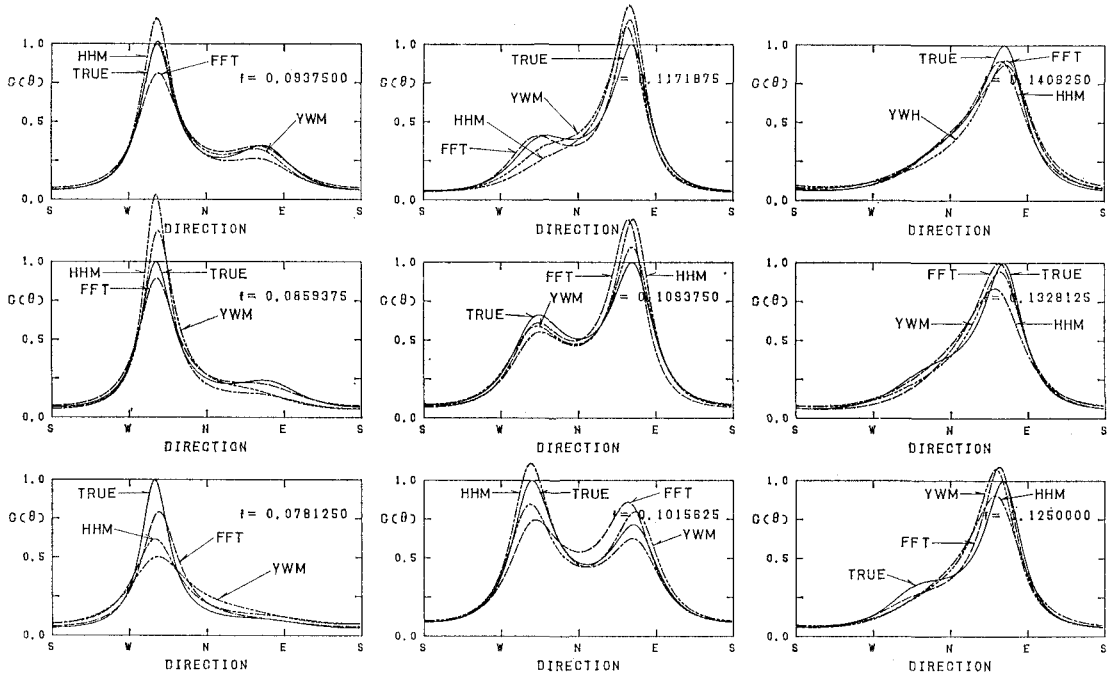


図-5 周波数別方向分布関数 (case-3)

について検討した。その結果、MAR を用いる方法は、うねりなどの尖鋭な方向スペクトル形状を推定する場合や、うねりと風波が重なり合った波浪場で二方向波浪を明確に識別するのに適していることなどが明らかとなった。また、データ数が多い場合には HHM が、少ない場合には YWM が、安定した方向スペクトルを推定できることなどが明らかとなった。しかしながら、MAR モデルの方向スペクトルに及ぼす影響をより詳細に評価するためには、数値シミュレーション手法についても更に再検討するとともに、ここで示した計算方法を波高計アレイなどの任意の波動量にも適用することにより、より詳細にその特性を把握する必要がある。

参考文献

- 1) Barber, N. F.: The directional resolving power of an array of wave detectors, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, Inc., New Jersey, pp. 137~150, 1963.
- 2) Panicker, N. N. and L. E. Borgman: Enhancement of directional wave spectrum estimates, Proc. 14th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 258~279, 1974.
- 3) Capon, J.: High-resolution of frequency-wavenumber spectrum analysis, Proc. IEEE, Vol. 57, No. 8, pp. 1408~1418, 1969.
- 4) 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司: 方向スペクトルの推定における MLM の拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 173~177, 1984.
- 5) 橋本典明・小舟浩治: 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第24巻, 第3号, pp. 123~145, 1985.
- 6) 赤池弘次・中川東一郎: ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, p. 190, 1972.
- 7) Kitagawa, G. and Akaike, H.: A Procedure for the modeling of non-stationary time series, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 30, No. 2, B, pp. 351~363, 1978.
- 8) Akaike, H., Kitagawa, G., Arahata, E. and Tada, F.: TIMSAC-78, Computer Science Monographs, No. 11, The Inst. Statist. Math., 1979.
- 9) 合田良実: 波浪の統計的性質に関する二、三の数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第24巻, 第4号, pp. 65~102, 1985.
- 10) Briggs, M. J.: Calculation of directional wave spectra by the maximum entropy method of spectral analysis, Proc. of 19th ICCE, pp. 484~500, 1984.
- 11) Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright and N. D. Smith: Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, Inc., New Jersey, pp. 111~136, 1963.