

不規則波に対する統計量の変動に関する理論的考察

磯 部 雅 彦*・古 市 耕 輔**

1. 序 論

海の波は不規則であるため、有限な長さの測定データから、有義波高・有義波周期・主波向・平均波向やクロス・パワースペクトル・方向スペクトルなどの統計量を求めると、それらの統計的変動性に基づく不確実性が含まれることになる。これは波浪場の特性を把握する上で重要な問題であるため、合田^{1)~4)}によって数値シミュレーションを用いた様々な検討がなされてきた。

ところで、微小振幅の不規則波は周波数と波向の異なる無数の成分波の重ね合わせとして表現できる。この場合、水位変動などは正規分布となるので、それらの統計的性質を理論的に取り扱うことは比較的容易である。本研究においては、正規分布に基づいて得られる、種々の統計量の変動に関する理論式を中心に議論を行なう。なお、ここでの対象は主に多方向不規則波浪場における代表波向であり、有義波高・有義波周期などの波別解析法に関するものについては取り扱わない。

2. 多方向不規則波浪場の統計的記述

(1) 時系列データの成分表示

微小振幅の仮定の下に、多方向不規則波浪場における水面変動や水粒子速度などの波動量 ξ は、周波数と波向の異なる無数の成分波の重ね合わせとして表示される³⁾。

$$\xi(x, y, t) = \sum_i \sum_j H(f_i, \theta_j) a_{ij} \cos \{k_i x \cos \theta_j + k_i y \sin \theta_j - \omega_i t + \varepsilon_{ij} + \phi(f_i)\} \quad (1)$$

ここに、 $\omega_i (=2\pi f_i)$ 、 f_i は周波数、 k_i は波数、 θ_j は波向、 (x, y) は水平座標、 t は時間であり、総和はすべての成分波についてとるものとする。 a_{ij} および ε_{ij} は成分波の振幅および位相を表わす確率変数であり、 a_{ij} はレイリー分布、 ε_{ij} は $0 \sim 2\pi$ 間の一様分布となる。 a_{ij} の分散は、微小要素 $\Delta f_i \Delta \theta_j$ に含まれる波エネルギーの期待値から、

$$\langle a_{ij}^2 \rangle = 2S(f_i, \theta_j) \Delta f_i \Delta \theta_j \quad (2)$$

となる。ここに、 $S(f, \theta)$ は方向スペクトルであり、 $\langle \rangle$ は期待値を表わす。 $H(f, \theta)$ および $\phi(f)$ は、水面変動から着目する波動量に変換する際の振幅比（伝達関数の絶対値）および位相遅れである。たとえば、水深 h の地点での、平均水面からの高さ z における水平 2 成分水粒子速度 (u, v) に対しては、

$$H(f, \theta) = \hat{H}(f) \times (\cos \theta, \sin \theta) \quad (3)$$

$$\hat{H}(f) = \hat{H}_u(f) \equiv \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \quad (4)$$

および $\phi(f) = 0$ となる。また、水面変動に対しては、当然、 $H(f, \theta) = 1$ 、 $\phi(f) = 0$ である。

加法定理を用いて式 (1) を展開し、周波数成分について整理すれば、

$$\xi(x, y, t) = \sum_i (A_{ci} \cos \omega_i t + A_{si} \sin \omega_i t) \quad (5)$$

となる。ここに、 A_{ci} および A_{si} は

$$A_{ci} = \sum_j H(f_i, \theta_j) a_{ij} \cos \{k_i x \cos \theta_j + k_i y \sin \theta_j + \varepsilon_{ij} + \phi(f_i)\} \quad (6)$$

$$A_{si} = \sum_j H(f_i, \theta_j) a_{ij} \sin \{k_i x \cos \theta_j + k_i y \sin \theta_j + \varepsilon_{ij} + \phi(f_i)\} \quad (7)$$

と表わされることから、期待値が 0 となり、また大数の法則より正規分布することがわかる。従って、2 次モーメント、すなわち分散・共分散が与えられれば、 A_{ci} および A_{si} の確率分布は完全に決定される⁵⁾。

(2) パワースペクトル

A_{ci} と A_{si} の分散は式 (2)、(6) および (7) より方向スペクトルと関係づけられるが、他方でそれらの分散はパワースペクトルと関係する。この両者を合わせて整理し、総和を積分で置き換えて示すと、

$$\langle A_{ci}^2 \rangle = \langle A_{si}^2 \rangle = P(f_i) \Delta f_i \quad (8)$$

$$P(f_i) = \int_0^{2\pi} H^2(f_i, \theta) S(f_i, \theta) d\theta \quad (9)$$

となる。次に、 A_{ci} および A_{si} の共分散は、式 (6) および (7) より、

$$\langle A_{ci} A_{si} \rangle = 0 \quad (10)$$

である。

(3) クロススペクトル

ここで、2 つの波動量 $\xi^{(m)}(x_m, y_m, t)$ 、 $\xi^{(n)}(x_n, y_n, t)$

* 正会員 工博 横浜国立大学助教授 工学部建設学科

** 正会員 工修 鹿島建設技術研究所

を考え、式(6)および(7)に対応する係数を $A_{ei}^{(m)}$, $A_{si}^{(n)}$ および $A_{ei}^{(n)}$, $A_{si}^{(m)}$ とする。これらの共分散はクロススペクトルを定義するものであり、コスペクトルを $C_{mn}(f)$, クオドラチャスペクトルを $Q_{mn}(f)$ とすれば、

$$\langle A_{ei}^{(m)} A_{ei}^{(n)} \rangle = \langle A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)} \rangle = C_{mn}(f_i) \Delta f_i \dots\dots (11)$$

$$\langle A_{ei}^{(m)} A_{si}^{(n)} \rangle = -\langle A_{si}^{(m)} A_{ei}^{(n)} \rangle = Q_{mn}(f_i) \Delta f_i \dots\dots (12)$$

$$C_{mn}(f_i) = \int_0^{2\pi} H^{(m)}(f_i, \theta) H^{(n)}(f_i, \theta) S(f_i, \theta) \\ \times \cos\{k_i \Delta x \cos \theta_j + k_i \Delta y \sin \theta_j + \Delta \phi\} d\theta \dots\dots (13)$$

$$Q_{mn}(f_i) = \int_0^{2\pi} H^{(m)}(f_i, \theta) H^{(n)}(f_i, \theta) S(f_i, \theta) \\ \times \sin\{k_i \Delta x \cos \theta_j + k_i \Delta y \sin \theta_j + \Delta \phi\} d\theta \dots\dots (14)$$

が成立する。ここに、

$$\Delta x = x_n - x_m \dots\dots (15)$$

$$\Delta y = y_n - y_m \dots\dots (16)$$

$$\Delta \phi = \phi^{(n)}(f_i) - \phi^{(m)}(f_i) \dots\dots (17)$$

である。

式(9), (13) および(14)より、方向スペクトルが与えられればクロス・パワースペクトルが計算でき、さらに式(8), (10)~(12)によって A_{ei} , A_{si} の分散・共分散が与えられる。

(4) 3成分アレイに対する表示式

ここで、同一地点における水面変動 $\eta(t)$ と水平2成分水粒子速度 $u(t)$ および $v(t)$ の3成分の組み合わせを例にとって、具体的な表示をしておく。まず、式(5)に対応して、次のように書く。

$$\eta(t) = \sum_i (N_{ei} \cos \omega_i t + N_{si} \sin \omega_i t) \dots\dots (18)$$

$$u(t) = \sum_i (U_{ei} \cos \omega_i t + U_{si} \sin \omega_i t) \dots\dots (19)$$

$$v(t) = \sum_i (V_{ei} \cos \omega_i t + V_{si} \sin \omega_i t) \dots\dots (20)$$

次に、ピーク波向を θ_0 とする光易型方向関数

$$G(\theta) = \cos^{2s}[(\theta - \theta_0)/2] \dots\dots (21)$$

に対して、式(9), (13) および(14)によってクロス・パワースペクトルを計算すると、

$$P_\eta(f) = E(f) \dots\dots (22)$$

$$P_u(f) = \hat{H}_u^2 [\{ (s^2 + s + 1) / (s + 1)(s + 2) \} \cos^2 \theta_0 \\ + \{ (2s + 1) / (s + 1)(s + 2) \} \sin^2 \theta_0] E(f) \dots\dots (23)$$

$$P_v(f) = \hat{H}_v^2 [\{ (s^2 + s + 1) / (s + 1)(s + 2) \} \sin^2 \theta_0 \\ + \{ (2s + 1) / (s + 1)(s + 2) \} \cos^2 \theta_0] E(f) \dots\dots (24)$$

$$C_{uv}(f) = \hat{H}_u \hat{H}_v [\{ s(s - 1) / (s + 1)(s + 2) \} \\ \times \cos \theta_0 \sin \theta_0] E(f) \dots\dots (25)$$

$$C_{\eta u}(f) = \hat{H}_u [s / (s + 1)] \cos \theta_0 E(f) \dots\dots (26)$$

$$C_{\eta v}(f) = \hat{H}_v [s / (s + 1)] \sin \theta_0 E(f) \dots\dots (27)$$

$$Q_{uv}(f) = Q_{\eta u}(f) = Q_{\eta v}(f) = 0 \dots\dots (28)$$

となる。ここに、 $E(f)$ は周波数スペクトルである。

3. 数値シミュレーション手法に関する考察

多方向不規則波浪場における波動量の時系列データをシミュレートする場合には、まず式(6)および(7)によって A_{ei} および A_{si} を計算した後、式(5)によって時系列データを作成する方法がとられてきた^{2)~4)}。そこでの計算において、通常、波向は等分割されるが、周波数に関しては不等分割される。これは、データ長を長くしても同じデータが繰り返さないという利点を有している。

ところで、式(5)を見直すと、式の中に含まれる係数 A_{ei} および A_{si} は正規分布し、しかも分散・共分散が既に求められていることから、それらの結合確率密度関数が決定し、従って正規乱数を用いてそれらの値をより直接的に与えることができるはずである。以下に、式(18)~(20)で表わされる成分の場合を例にとって具体的に示す。

まず、 (N_{ei}, U_{ei}, V_{ei}) と (N_{si}, U_{si}, V_{si}) のグループとは、クオドラチャスペクトルが0であることより互いに無相関であり、しかもそれぞれが正規分布することより、互いに独立となる。相関があるのは (N_{ei}, U_{ei}, V_{ei}) などのグループ内のみで、式(8)と(11)に対応する分散・共分散を持つように正規乱数を作ればよいことになる。これは、3個の独立な標準正規乱数 ζ_1 , ζ_2 および ζ_3 の線形結合によって得ることができる。結果のみを記せば、

$$N_{ei} = \sigma_N \zeta_1 \dots\dots (29)$$

$$U_{ei} = \sigma_U (r_{NU} \zeta_1 + \sqrt{1 - r_{NU}^2} \zeta_2) \dots\dots (30)$$

$$V_{ei} = \sigma_V \left(r_{NV} \zeta_1 + \frac{r_{UV} - r_{NU} r_{NV}}{\sqrt{1 - r_{NU}^2}} \zeta_2 \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1 - r_{NU}^2 - r_{NV}^2 - r_{UV}^2 + 2r_{NU} r_{NV} r_{UV}}{1 - r_{NU}^2}} \zeta_3 \right) \dots\dots (31)$$

である。ここに、 σ は標準偏差、 r は相関係数を意味し、

$$\sigma_N = \sqrt{P_\eta(f_i) \Delta f_i} \dots\dots (32)$$

$$\sigma_U = \sqrt{P_u(f_i) \Delta f_i} \dots\dots (33)$$

$$\sigma_V = \sqrt{P_v(f_i) \Delta f_i} \dots\dots (34)$$

$$r_{NU} = C_{\eta u}(f_i) / \sqrt{P_\eta(f_i) P_u(f_i)} \dots\dots (35)$$

$$r_{NV} = C_{\eta v}(f_i) / \sqrt{P_\eta(f_i) P_v(f_i)} \dots\dots (36)$$

$$r_{UV} = C_{uv}(f_i) / \sqrt{P_u(f_i) P_v(f_i)} \dots\dots (37)$$

と定義される。光易型方向関数を用いる場合には、上式に、式(22)~(27)を代入すればよい。

式(29)~(31)を用いて N_{ei} 等を求めると、式(6)および(7)を用いるのに比較して、計算時間は無視できる程度となる。さらに、周波数に関して等分割することにすれば、式(5)の計算に逆FFTを用いることができ、計算時間は一層短縮される。従って、実際の手順としては、1) 周波数を等分割し、それぞれについて方向

スペクトルからクロス・パワースペクトルを計算する。

2) それらが共分散・分散となるような正規乱数を、独立な標準正規乱数の線形結合によって作成する。3) それらをフーリエ係数として逆 FFT によって時系列データを計算する。となる。

Bretschneider-光易型の周波数スペクトルと光易型方向関数 ($S_{\max}=10$) を組み合わせた方向スペクトルに対し、上記の方法で (η, u, v) について 1024 個のデータを 100 ケース分シミュレートした。日立の M240H を用いた計算時間は 24 秒であった。これに対し、周波数を等分割せず逆 FFT を使わない場合は 348 秒で約 15 倍、また式 (6) および (7) を用いる従来の方法では 715 秒で約 30 倍の計算時間となった。

なお、逆 FFT を用いる方法では、周期を $1/\Delta f$ (Δf は周波数間隔) としてデータが繰り返すので、それ以上長い有効なデータを作成することはできない。しかし、計測時間が限られた実験での、不規則波の造波板への入力データとしては、データの繰り返しが逆に利点となることも考えられる。また、計算時間の短縮のためには、式 (22)~(28) のようにクロス・パワースペクトルが解析的に求められていることが前提となる。光易型方向関数の場合には、波高計アレイに対しても解析的表示が得られている⁶⁾。ただし、この場合、波高計台数が多いと式 (29)~(31) に対応する部分の計算時間が問題となる。しかし、一度係数を計算してしまえば、標準正規乱数のみを変えるだけで同じスペクトルを持つ複数ケースのデータを作成することができる。以上のことから、従来の方法との優劣は、場合によって異なると言える。

4. 共分散法に関する考察

(1) 分散・共分散の統計的変動

測定データから 2 つの波動量 $\xi^{(m)}$ と $\xi^{(n)}$ の共分散 ($m=n$ ならば分散) を推定するには、時間平均が使われる。式 (5) より、 $\bar{\xi}$ を時間平均として、

$$\bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}} = \frac{1}{2} \sum_i (A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} + A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)}) \quad \dots\dots (38)$$

となる。真の共分散は、期待値から定義され、

$$\langle \xi^{(m)} \xi^{(n)} \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \{ \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} \rangle + \langle A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)} \rangle \} \quad \dots\dots (39)$$

となるが、これに式 (11) を代入し、総和を積分で置き換えれば、

$$\langle \xi^{(m)} \xi^{(n)} \rangle = \int_0^\infty C_{mn}(f) df \quad \dots\dots (40)$$

と表示される。

さて、 A_{ci} 等は確率変数であるから、式 (38) の値は統計的に変動することになる。その変動分を

$$\bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}' = \bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}} - \langle \xi^{(m)} \xi^{(n)} \rangle \quad \dots\dots (41)$$

とおけば、

$$\bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}' = \frac{1}{2} \sum_i \{ (A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)})' + (A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)})' \} \quad \dots\dots (42)$$

$$(A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)})' = A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} - \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} \rangle \quad \dots\dots (43)$$

$$(A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)})' = A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)} - \langle A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)} \rangle \quad \dots\dots (44)$$

である。式 (42) より、 $\bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}'$ の共分散は

$$\begin{aligned} \langle \bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}' \cdot \bar{\xi^{(j)}\xi^{(l)}}' \rangle \\ = \frac{1}{4} \sum_i \{ \langle (A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)})' (A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)})' \rangle \\ + \langle (A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)})' (A_{si}^{(j)} A_{si}^{(l)})' \rangle \\ + \langle (A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)})' (A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)})' \rangle \\ + \langle (A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)})' (A_{si}^{(j)} A_{si}^{(l)})' \rangle \} \quad \dots\dots (45) \end{aligned}$$

と書ける。ところで、たとえば、

$$\begin{aligned} \langle (A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)})' (A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)})' \rangle \\ = \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)} \rangle - \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} \rangle \langle A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)} \rangle \\ \dots\dots (46) \end{aligned}$$

であるが、右辺第 1 項の 4 次モーメントは、4 変数の正規分布の特性関数⁵⁾ をそれぞれ 1 階ずつ微分することにより、

$$\begin{aligned} \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)} \rangle &= \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} \rangle \langle A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)} \rangle \\ &+ \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(j)} \rangle \langle A_{ci}^{(n)} A_{ci}^{(l)} \rangle + \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(l)} \rangle \langle A_{ci}^{(n)} A_{ci}^{(j)} \rangle \\ &\dots\dots (47) \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \langle (A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)})' (A_{ci}^{(j)} A_{ci}^{(l)})' \rangle \\ = \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(j)} \rangle \langle A_{ci}^{(n)} A_{ci}^{(l)} \rangle + \langle A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(l)} \rangle \langle A_{ci}^{(n)} A_{ci}^{(j)} \rangle \\ \dots\dots (48) \end{aligned}$$

である。式 (48) およびその中の一部または全部の c を s に換えたものに式 (11) および (12) を代入し、さらにそれらを式 (45) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \langle \bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}' \cdot \bar{\xi^{(j)}\xi^{(l)}}' \rangle \\ = \frac{1}{2} \sum_i \{ C_{mj}(f_i) C_{nl}(f_i) + C_{ml}(f_i) C_{nj}(f_i) \\ + Q_{mj}(f_i) Q_{nl}(f_i) + Q_{ml}(f_i) Q_{nj}(f_i) \} (\Delta f_i)^2 \\ \dots\dots (49) \end{aligned}$$

となる。ここで、 Δf_i は微小で一定値であるとし、総和を積分で置き換えれば、

$$\begin{aligned} \langle \bar{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}' \cdot \bar{\xi^{(j)}\xi^{(l)}}' \rangle \\ = \frac{\Delta f}{2} \int_0^\infty \{ C_{mj}(f) C_{nl}(f) + C_{ml}(f) C_{nj}(f) \\ + Q_{mj}(f) Q_{nl}(f) + Q_{ml}(f) Q_{nj}(f) \} df \\ \dots\dots (50) \end{aligned}$$

を得る。なお、添字が等しい場合、 C はパワースペクトルを表わし、 Q は 0 となる。式 (5) が Δf を一定とする有限フーリエ級数になっている場合、時間間隔を Δt 、データ数を N とすれば、 $\Delta f = 1/N \Delta t$ であることより、式 (50) の共分散はデータ長に逆比例して小さくなる。しかし、式 (5) における成分を少なくすると Δf が大きくなるので、データ長が長くても式 (50) の値は小さく

ならない。

3成分アレイの場合、 $\xi^{(1)}=\eta$ 、 $\xi^{(2)}=u$ 、 $\xi^{(3)}=v$ とし、式(40)および(50)における m, n, j, l を種々に定めることにより、具体的表示が求められる。重複の様子が異なるものを1つずつ示せば、以下のごとくなる。

$$\langle \eta^2 \rangle = \int_0^\infty P_\eta(f) df \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$\langle \eta u \rangle = \int_0^\infty C_{\eta u}(f) df \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$\sigma^2(\overline{\eta^2}) \equiv \langle (\overline{\eta^2})^2 \rangle = \Delta f \int_0^\infty P_\eta^2(f) df \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\overline{\eta u}) &\equiv \langle (\overline{\eta u})^2 \rangle \\ &= \frac{\Delta f}{2} \int_0^\infty \{P_\eta(f)P_u(f) + C_{\eta u}^2(f) - Q_{\eta u}^2(f)\} df \\ &\quad \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{\eta u'} \cdot \overline{\eta v'} \rangle \\ &= \frac{\Delta f}{2} \int_0^\infty \{P_\eta(f)C_{uv}(f) + C_{\eta u}(f)C_{\eta v}(f) \\ &\quad - Q_{\eta u}(f)Q_{\eta v}(f)\} df \quad \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

$$\langle \overline{u^2} \cdot \overline{v^2} \rangle = \Delta f \int_0^\infty \{C_{uv}^2(f) + Q_{uv}^2(f)\} df \quad \dots\dots\dots (56)$$

$$\langle \overline{u^2} \cdot \overline{uv} \rangle = \Delta f \int_0^\infty P_u(f)C_{uv}(f) df \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{\eta^2} \cdot \overline{uv} \rangle \\ &= \Delta f \int_0^\infty \{C_{\eta u}(f)C_{\eta v}(f) + Q_{\eta u}(f)Q_{\eta v}(f)\} df \\ &\quad \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

(2) 主波向・平均波向の統計的変動

多方向不規則波浪場を代表する波向として、主波向 θ_p および平均波向 θ_m があり、 (η, u, v) の組み合わせの共分散からは、

$$\theta_p = (1/2) \tan^{-1} \{2\overline{uv} / (\overline{u^2} - \overline{v^2})\} \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$\theta_m = \tan^{-1} \{\overline{\eta v} / \overline{\eta u}\} \quad \dots\dots\dots (60)$$

と計算される。ここで、各共分散を期待値と変動分とに分離し、変動分は相対的に小さいものとしてテイラー展開によって1次の項までとれば、

$$\begin{aligned} \theta_p &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\langle uv \rangle}{\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle} \right) \\ &\quad + \frac{(\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle) \overline{uv'} - \langle uv \rangle (\overline{u^2} - \overline{v^2})}{(\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle)^2 + 4\langle uv \rangle^2} \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

表-1 統計量の変動の標準偏差 σ および変動係数 σ^*

S _{max}	10		25		75	
	理論	数値実験	理論	数値実験	理論	数値実験
$\sigma^*(\overline{\eta^2})$	0.136	0.138	0.136	0.138	0.136	0.138
$\sigma^*(\overline{u^2})$	0.175	0.170	0.173	0.169	0.167	0.167
$\sigma^*(\overline{v^2})$	0.160	0.159	0.157	0.158	0.153	0.152
$\sigma(\theta_p)$	5.51°	6.20°	2.85°	2.42°	1.51°	1.30°
$\sigma(\theta_m)$	3.60°	3.92°	2.29°	2.04°	1.33°	1.18°

$$\theta_m = \tan^{-1} \left(\frac{\langle \eta v \rangle}{\langle \eta u \rangle} \right) + \frac{\langle \eta u \rangle \overline{\eta v'} - \langle \eta v \rangle \overline{\eta u'}}{\langle \eta u \rangle^2 + \langle \eta v \rangle^2} \dots\dots\dots (62)$$

となる。上の2式は、いずれも右辺第1項が期待値を表わし、第2項が変動分を表わす。この変動分の標準偏差を求めると、

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_p) &= \sqrt{\frac{(\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle)^2 \langle (\overline{uv'})^2 \rangle}{-2(\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle) \langle uv \rangle (\langle \overline{u^2} \cdot \overline{uv'} \rangle - \langle \overline{v^2} \cdot \overline{uv'} \rangle) \\ &\quad + \langle uv \rangle^2 (\langle \overline{u^2} \rangle^2 - 2\langle \overline{u^2} \cdot \overline{v^2} \rangle + \langle \overline{v^2} \rangle^2)}} \\ &\quad \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_m) &= \sqrt{\frac{\langle \eta u \rangle^2 \langle (\overline{\eta v'})^2 \rangle - 2\langle \eta u \rangle \langle \eta v \rangle \langle \overline{\eta u'} \cdot \overline{\eta v'} \rangle}{\langle \eta u \rangle^2 + \langle \eta v \rangle^2}} \\ &\quad \dots\dots\dots (64) \end{aligned}$$

となる。上式に式(51)~(58)等を用いると、クロス・パワースペクトルから、主波向および平均波向の分散が計算される。

表-1には、光易型方向スペクトルに対し、ここで求めた変動の理論値と100ケースの数値シミュレーションから得られた値と比較されているが、いずれもよく一致している。

5. スペクトル解析法に関する考察

(1) クロス・パワースペクトルの統計的変動

簡単のため、FFTによるスペクトル解析を念頭におく。パワースペクトル、コスペクトルおよびクオドラチャスペクトルの推定値 $\hat{P}(f_i)$ 、 $\hat{C}_{mn}(f_i)$ および $\hat{Q}_{mn}(f_i)$ は、スペクトルが一定と見なされる範囲の平均値として、

$$\hat{P}(f_i) = \frac{1}{\Delta f} \frac{1}{2N_w} \sum_{i=1}^{N_w} (A_{ci}^2 + A_{si}^2) \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{mn}(f_i) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{1}{2N_w} \sum_{i=1}^{N_w} (A_{ci}^{(m)} A_{ci}^{(n)} + A_{si}^{(m)} A_{si}^{(n)}) \\ &\quad \dots\dots\dots (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{mn}(f_i) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{1}{2N_w} \sum_{i=1}^{N_w} (A_{ci}^{(m)} A_{si}^{(n)} - A_{si}^{(m)} A_{ci}^{(n)}) \\ &\quad \dots\dots\dots (67) \end{aligned}$$

と表わせる。これは、共分散の場合の式(38)と同じ形であるから、統計的変動量の計算も同様に行なうことができる。結果を無次元化して示せば、

$$\sigma(\hat{P}^*(f)) \equiv \frac{\sigma(\hat{P}(f))}{P(f)} = \sqrt{\frac{2}{M}} \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{C}_{mn}^*(f)) &\equiv \frac{\sigma(\hat{C}_{mn}(f))}{\sqrt{P_m(f)P_n(f)}} = \sqrt{\frac{1+r_c^2-r_q^2}{M}} \\ &\quad \dots\dots\dots (69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{Q}_{mn}^*(f)) &\equiv \frac{\sigma(\hat{Q}_{mn}(f))}{\sqrt{P_m(f)P_n(f)}} = \sqrt{\frac{1-r_c^2+r_q^2}{M}} \\ &\quad \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $M=2N_w$ は自由度であり、矩形フィルター以外の場合には等価自由度を用いばよい。また、

$$r_c = C_{mn}(f) / \sqrt{P_m(f)P_n(f)} \quad \dots\dots\dots (71)$$

$$r_Q = Q_{mn}(f) / \sqrt{P_m(f)P_n(f)} \quad \dots\dots\dots (72)$$

である。合田⁸⁾は数値シミュレーション結果より、式(69)の右辺の $\sqrt{\quad}$ 内の分子を2とした式を得ているが、これは数値実験の範囲で $r_Q \sim 1$, $r_Q \sim 0$ となるためである。図-1は、放物型フィルタ⁷⁾($M=33.2$)に対する100ケースのスペクトルの無次元平均値と無次元変動値を理論式(68)~(70)と比較したものである。ピーク周波数($f_p=0.095$ Hz)を中心として両者はよく一致している。

(2) 各周波数での主波向・平均波向の統計的変動

各周波数ごとの主波向 $\theta_p(f)$ および平均波向 $\theta_m(f)$ は、

$$\theta_p(f) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2C_{uv}(f)}{P_u(f) - P_v(f)} \quad \dots\dots\dots (73)$$

$$\theta_m(f) = \tan^{-1} \frac{C_{vu}(f)}{C_{vv}(f)} \quad \dots\dots\dots (74)$$

と定義されるが、4(2)と同様にこれらの分散を計算すると、

$$\sigma(\theta_p(f)) = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{P_u P_v - C_{uv}^2 - Q_{uv}^2}{(P_u - P_v)^2 + 4C_{uv}^2}} \quad \dots\dots\dots (75)$$

$$\sigma(\theta_m(f)) = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{P_v(C_{vu}^2 P_v - 2C_{vu} C_{vv} C_{uv} + C_{vv}^2 P_u) - (C_{vu} Q_{vv} - C_{vv} Q_{vu})^2}{C_{vu}^2 + C_{vv}^2}} \quad \dots\dots\dots (76)$$

となる。特に光易型方向関数に対しては、式(22)~(28)を代入して、

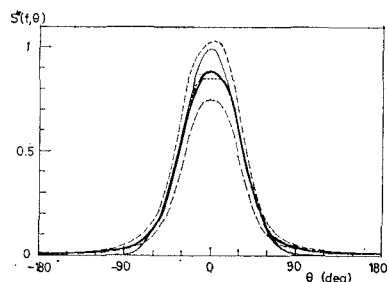


図-3 方向スペクトルの推定値の変動

$$\sigma(\theta_p(f)) = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\sqrt{(2s+1)(s^2+s+1)}}{s(s-1)}} \quad \dots\dots\dots (77)$$

$$\sigma(\theta_m(f)) = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{1}{s} \sqrt{\frac{(s+1)(2s+1)}{s+2}}} \quad \dots\dots\dots (78)$$

となる。図-2は上式の妥当性を確認したものである。

(3) 方向スペクトルの変動性

クロス・パワースペクトルが変動するために、方向スペクトルの推定値も変動する。図-3には、EMLM⁸⁾によって推定された方向スペクトルの平均値(太実線)、平均値±標準偏差(破線)、クロス・パワースペクトルの真の値から推定した方向スペクトル(点線)、真の方向スペクトル(細実線)が示されている。太実線と点線がほぼ一致することより、方向スペクトルの推定精度の検討に、クロス・パワースペクトルの期待値を用いることの妥当性が確認される。

6. ま と め

多方向不規則波浪場における統計量の変動を理論的に求め、数値シミュレーションによってその妥当性を確認した。

参 考 文 献

- 1) Goda, Y.: Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rep. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 9, No. 3, pp. 3~57, 1970.
- 2) Goda, Y.: Numerical experiments on statistical variability of ocean waves, Rep. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 16, No. 2, pp. 3~26, 1977.
- 3) 合田良実: 共分散法を用いた波向推定方式の数値的検討, 港湾技研報告, 第20巻, 第3号, pp. 53~92, 1981.
- 4) 合田良実: 波浪の統計的性質に関する二, 三の数値的検討, 港湾技研報告, 第24巻, 第4号, pp. 65~102, 1985.
- 5) たとえば Papoulis, A.: Probability, Random Variables, and Stochastic Process, 8-4, McGraw-Hill, 583p., 1965.
- 6) 磯部雅彦・近藤浩右: 入・反射波の共存場における方向スペクトルの推定法, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 44~48, 1983.
- 7) 合田良実: 港湾構造物の耐波設計, 10.2, 鹿島出版会, 237p., 1982.
- 8) 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司: 方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 173~177, 1984.

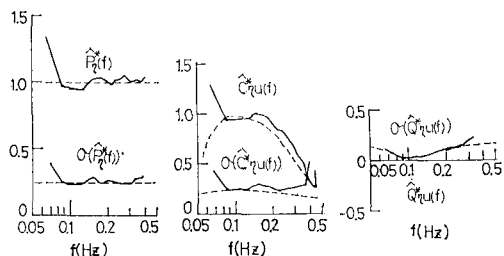


図-1 クロス・パワースペクトルの平均値と変動係数
(点線: 理論値, 実線: 数値シミュレーション)

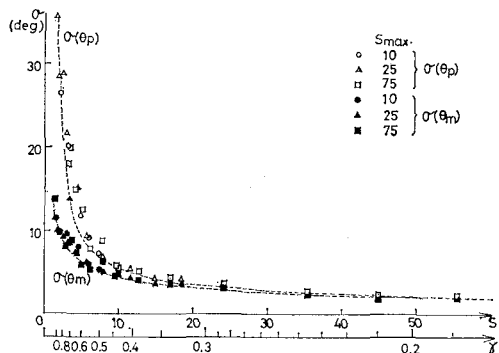


図-2 各周波数で推定される主波向・平均波向の標準偏差