

放物型方程式を用いた不規則波の 屈折・回折・砕波変形の計算法

磯 部 雅 彦*

1. 序 論

波の屈折と回折を同時に解析するための方程式として緩勾配方程式¹⁾が導かれて以来、この分野の研究が盛んに行なわれるようになった。この方程式は楕円型偏微分方程式であるが、これを放物型方程式に近似する^{2),3)}と数値計算が極めて容易になる。前報⁴⁾において著者は波向線に従う直交曲線座標系における放物型方程式を導くことにより、適用範囲の一般化を計った。

ところで、実際の海の波は不規則である。屈折や回折の問題に対しては特に不規則性を考慮する必要がある、泉宮⁵⁾が計算手法を示した。また、海浜流や海浜変形を計算する場合には、砕波減衰も含む波動場の計算が必要となる。本研究においては、既に導いた波向線座標における放物型方程式を基本として、不規則波と砕波変形の問題も同時に扱えるようにすることを目的とした。

緩勾配方程式や放物型方程式は微小振幅波の屈折・回折を解析するための式であり、線形な方程式である。従って、これらによって不規則波を取り扱うには、不規則波の方向スペクトルから周期と波向の異なる成分波に分割し、それぞれに対する変形計算を行なった後に、解を重ね合わせればよいことになる。ところで、前報⁴⁾では放物型方程式の適用範囲の一般化が計られているものの、周期または波向が異なると座標系も異なってしまう。これでは実際の計算において解の内挿が必要となるなど、煩雑なことが多い。従って、同一の座標系ですべての成分波の計算が行なえることが望ましい。さらに、砕波変形は非線形性の強い現象であるため、単なる重ね合わせ法を用いることができない。砕波変形のモデルにおいては、同一の座標系においてすべての成分波の計算を行なうことにより、各ステップごとに解を重ね合わせて総エネルギーなどを求めることが必要となる。ところが、このようにすると、すべての成分波について座標軸と波向線とをほぼ一致させることは不可能である。そこで、まず、座標軸と波向線の方がずれる可能性を許容し、またエネルギー減衰項を含む形の放物型方程式を

導く。その後、砕波によるエネルギー減衰項の定式化を行なって、不規則波の屈折・回折・砕波変形が計算できるようにする。

2. 放物型方程式の誘導

(1) 座標系の決定

放物型方程式を導く際に、座標軸と波向線とのずれは考慮されるが、計算誤差を小さくするためには両者が一致することが望ましい。そこで、ピーク周波数・ピーク波向の成分波に関し、前報⁴⁾と同様、ホイヘンスの原理に従う直交曲線座標系 (ξ, η) をとることにする。図—1はその一例を示すが、前報と全く同様に、屈折における波向線方程式を支配方程式とすればよい。

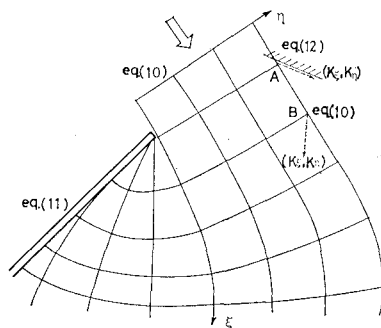
(2) 減衰項を含む放物型方程式

緩勾配方程式にエネルギー減衰項を含めた式⁶⁾を直交曲線座標系 (ξ, η) によって表わせば、

$$\frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(G\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(G\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)\right\}+(k^2G+i\omega f_D)\phi=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

となる。ここに、 ϕ は水面変動の複素振幅、 (h_{ξ}, h_{η}) は直交曲線座標 (ξ, η) のスケールファクター、 $G=cc_g$ (c : 波速、 c_g : 群速度)、 k は(真の水深に対応する)波数、 ω は角振動数、 i は虚数単位である。 f_D はエネルギー減衰率であるが、その定式化は3.で行なう。

式(1)を放物型方程式に近似するため、局所的に ϕ がある方向への進行波の成分 ϕ^+ と、それに対する逆行波



図—1 直交曲線座標系と境界条件

* 正会員 工博 横浜国立大学助教授 工学部建設学科

の成分 ϕ^- から成り立っているものと仮定する。この場合、 ξ 軸と進行方向とのずれを考慮し、それぞれの波数ベクトルを $(\pm k_\xi, \pm k_\eta)$ とすると、

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi^\pm = a^\pm \exp \left\{ \pm i \left(\int k_\xi h_\xi d\xi + \int k_\eta h_\eta d\eta \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。以下、前報⁴⁾と全く同様な手続きにより、式(1)から ξ に関する2階微分を近似的に消去すれば、放物型方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Gh_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + 2ik_\xi \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ & + \left\{ \frac{i}{Gh_\eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (k_\xi Gh_\eta)}{\partial \xi} + (k^2 + k_\xi^2) + i \frac{\omega}{G} f_D \right\} \phi \\ & = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

これは前報と比べ、 k の一部を k_ξ で置き換え、さらに減衰項を付加したものである。

未知数の変化を緩やかにするため、位相の主要部を分離する。ただし、波向線が交差するようなものではないので、座標系を決定するのに用いた近似水深(平行等深線海岸)に対する屈折波の位相を用いることにする。

$$\phi = \phi \exp \left\{ i \left(\int K_\xi h_\xi d\xi + \int K_\eta h_\eta d\eta \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、平行等深線海岸で近似した水深に対応する波数 K より、スネルの法則によって K_ξ, K_η は容易に求められる。式(5)を式(4)に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Gh_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + 2iK_\eta \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ & + 2ik_\xi \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \left\{ \frac{i}{Gh_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial (K_\eta Gh_\eta)}{\partial \eta} \right. \\ & + \frac{i}{Gh_\eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (k_\xi Gh_\eta)}{\partial \xi} \\ & \left. + (k^2 + k_\xi^2 - 2K_\xi k_\xi - K_\eta^2) + i \frac{\omega}{G} f_D \right\} \phi = 0 \\ & \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

となる。なお、 k_ξ の値を求めるのにも波向角が必要となる。これをあらかじめ厳密に決定することはできない。しかし、後に見るように、その値は主に屈折係数に影響するのみなので、近似値として (K_ξ, K_η) と同一方向を仮定した値 kK_ξ/K をとるものとする。

式(6)をデカルト座標系 (x, y) で記述すると、既に得られているものと一致する。

(3) 放物型方程式の物理的意味

放物型方程式の物理的意味を明らかにするため、 ϕ を振幅 a と位相 ε とに分離し、

$$\phi = ae^{i\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (7)$$

において式(6)に代入して整理すれば、実部と虚部から

$$\begin{aligned} & \left(K_\xi + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right)^2 + \left(K_\eta + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right)^2 = k^2 \\ & + \left\{ k_\xi - \left(K_\xi + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) \right\}^2 \\ & + \frac{1}{aGh_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a^2 \frac{G}{\omega} \left(K_\eta + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) h_\xi \right] \\ & + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[a^2 \frac{G}{\omega} k_\xi h_\eta \right] = -f_D a^2 \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

を得る。 $(K_\xi + (1/h_\xi) \partial \varepsilon / \partial \xi, K_\eta + (1/h_\eta) \partial \varepsilon / \partial \eta)$ は計算結果として得られる波数ベクトルであるから、式(8)は屈折における eikonal 方程式に相当するものとなる。また、 $a^2 \propto E$ 、 $G/\omega = c_g/k$ より、式(9)の左辺はエネルギーフラックスの発散を表すから、右辺に現われる f_D がエネルギー減衰率となっていることがわかる。ただし、左辺第2項の k_ξ の計算に際し、 K に対するものと同じ波向角を使った分だけ、誤差が生じることになる。

(4) 境界条件

沖側での境界条件はスネルの法則によって与える。 ϕ に対しては位相部分が分離されているので、浅水係数 K_s と屈折係数 K_r によって振幅を計算し、

$$\phi = K_s K_r \quad \dots\dots\dots (10)$$

とすればよい。

側方に防波堤などがあり、鉛直壁として側方境界条件が与えられる場合、法線方向への ϕ の微分を0とすることより、

$$\left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + iK_\eta \phi \right) - iK_\xi \phi \tan \delta = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ただし、 δ は ξ 軸から η 軸方向へ測った境界線の方角である。 ϕ の ξ 方向の微分は微小であると仮定されているものなので無視されているが、その方が数値計算の精度が高くなるという結果が得られている。

側方が外海とつながる開境界の場合、境界条件の与え方は2通りに分かれる。式(6)において、 ϕ の2階微分などが無視でき、第2項および第3項が支配的となる場合を考えると、 $(k_\xi, K_\eta) \approx (K_\xi, K_\eta)$ 方向に特性曲線ができる。図-1の点Aのように、この方向が計算領域から外海へ出る場合には、これに沿った方向に鉛直壁があるものとし、式(11)で $\tan \delta = K_\eta / K_\xi$ とおいて、

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

とすればよい。次に、図-1の点Bのように特性曲線が外海から計算領域へ入り込む場合、微分による関係式で境界条件を与えると数値的に不安定となる。そこで、沖側での境界条件と同様に、式(10)で ϕ の値を与えるのがよい。

3. 砕波減衰率の定式化

(1) 規則波の場合

砕波減衰に関しては種々のモデル化が行なわれているが⁷⁾, 多方向の成分波が重なり合う不規則波への適用性を考慮して, 渡辺・丸山⁸⁾のように流速波速比を用いた定式化を行なうことにする.

まず, 砕波点の決定は, 渡辺ら⁹⁾によって整理された流速波速比を用いて行なう. これは, 微小振幅波理論(による浅水変形)と組み合わせた場合に, 合田¹⁰⁾による砕波指標と同じ砕波水深を与えるように決められたものであり, 近似式によって表現すると,

$$\gamma'_s = (\hat{u}/c)_b = 0.53 - 0.3 \exp \{-3 \sqrt{d_b/L_0}\} + 5 \tan^3 \beta \exp \{-45 (\sqrt{d_b/L_0} - 0.1)^2\} \quad (13)$$

となる. ここに, u は静水位における水平流速振幅, c は波速, d は水深であり, 添字 b は砕波点における値を表わす. また, L_0 は沖波波長, $\tan \beta$ は海底勾配である.

砕波減衰については, 実験結果に基づいたモデル化を行なうこととし, 以下のような条件を考えた.

- ① エネルギー逸散関数は, 式(9)を考慮し, エネルギーに比例した形におく.
- ② 砕波後に一様水深となる場合には, 流速波速比は一定値 γ_r になって, 波が再成する.
- ③ 一様勾配斜面上では, 流速波速比が一定値 γ_s に近づく.

①によりエネルギー方程式がエネルギーに対して線形となるため, 不規則波の場合に重ね合わせが可能となる. ただし, これは成分波ごとのエネルギー逸散量がその成分波のエネルギーに比例するという制約条件をつけたことになる. しかし, 砕波帯では方向スペクトルの形状まで正確でなくても, 総エネルギーが正確に得られればよいという考え方からすれば許容されることである.

①~③の条件から, 岸沖方向の砕波減衰問題におけるエネルギー E に対する方程式は,

$$d(Ec_g)/dx = -f_D E \quad (14)$$

$$f_D = -\frac{5}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \sqrt{\frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_s - \gamma_r}} f_a(kd) \tan \beta \quad (15)$$

$$f_a(kd) = \sqrt{\frac{\tanh kd}{kd}} \frac{1}{2} (1 + s_2) \times \left\{ 1 - \frac{5(1-s_2)(1+s_2) + 2s_2(s_2 \cosh 2kd - 1)}{5(1+s_2)^2} \right\} \quad (16)$$

$$s_2 = 2kd / \sinh 2kd \quad (17)$$

となる. ここに, g は重力加速度, $\gamma (=k \sqrt{2E} / \tanh kd)$ は流速波速比, f_a は波高水深化のかわりに流速波速比

を使ってモデル化したために出た係数であり, kd が小さければ1となる.

定数 γ_s および γ_r の値に関して十分な実験結果は得られていないが, 既述の結果^{11), 12)}等を参考にして,

$$\gamma_s = 0.4 \times (0.57 + 5.3 \tan \beta) \quad (18)$$

$$\gamma_r = 0.135 \quad (19)$$

とした.

以上によって, 浅水砕波変形にともなうエネルギー変化の計算モデルができた. エネルギーから波高を求めたい場合に微小振幅波理論を用いると砕波点付近で過小評価となるため, 砕波帯外ではクノイド波理論第1次近似解を用いて補正¹³⁾, 砕波帯内では1.25倍程度とするといふ.

(2) 不規則波の場合

不規則波の砕波に対しては, 波別解析法による個々の波の砕波・非砕波の平均として取り扱う.

不規則波の個々の波の砕波波高は規則波に比較して小さいことが知られているが^{14), 15), 16)}, 定量的評価は行なわれていない. ここでは概略の値として規則波の80%とし, 不規則波の砕波流速波速比を次のようにした.

$$\gamma_b = 0.8 \gamma'_b \quad (20)$$

不規則波のエネルギー減衰率 f_D' は, 規則波の値 f_D に砕波している波のエネルギーの割合 P_B を乗じて,

$$f_D' = P_B f_D \quad (21)$$

とする.

まず, f_D' の計算には, ピーク周波数における波数 k_p と, 流速波速比の有義値 $\gamma_{1/3}$ を代表値として用い, 式(15)によって計算してよいであろう. 狭帯域スペクトルを仮定し, $\gamma_{1/3}$ を理論的に求めると, 近似値として

$$\gamma_{1/3} = 2.002 \frac{k_p}{\tanh k_p d} \frac{E_2}{\sqrt{E}} \quad (22)$$

$$E = m_{00} \quad (23)$$

$$E_2 = \frac{m_{20} + m_{02}}{2} + \sqrt{\left(\frac{m_{20} - m_{02}}{2}\right)^2 + m_{11}^2} \quad (24)$$

$$m_{pq} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \cos^p \theta' \sin^q \theta' S(f, \theta') df d\theta' \quad (25)$$

$$(\cos \theta', \sin \theta') = \frac{I_m[F\phi/\psi] + (K_\xi, K_\eta)}{|I_m[F\phi/\psi] + (K_\xi, K_\eta)|} \quad (26)$$

となる. ここに, $S(f, \theta') df d\theta'$ は成分波のエネルギー, I_m は虚数部, $| \cdot |$ はベクトルの絶対値を表わす.

次に, 砕波率 P_B を求めるには, 砕波しなかったとした場合の有義流速波速比 $\tilde{\gamma}_{1/3}$ が必要となるが, これは砕波によって途中で失われた分のエネルギー E_d によって $\gamma_{1/3}$ を補正して求めることとした. すなわち,

$$\tilde{\gamma}_{1/3} = \gamma_{1/3} \sqrt{1 + E_d/E} \quad (27)$$

$$E_d = \frac{F_d}{c_{gp}} = \frac{1}{c_{gp}} \frac{1}{h_\eta} \int_{-\infty}^{\xi} f_D E h_\eta h_\xi d\xi \quad (28)$$

である. ここに, c_{gp} はピーク周波数での群速度であ

る。ここで、砕波帯においても流速波速比が Rayleigh 分布となることを仮定すると、砕波エネルギー率 P_B は、

$$P_B = \left\{ 1 + 2.004 \left(\frac{\gamma_b}{\gamma_{1/3}} \right)^2 \right\} \exp \left[-2.004 \left(\frac{\gamma_b}{\gamma_{1/3}} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。

図-2 は、このモデルによって f_D を求め、浅水砕波変形にともなう有義波高の変化を計算した一例であり、実線および点線はエネルギーから波高に換算する際に微小振幅波理論に対する補正を行なわなかったものを行なったものをそれぞれ表す。wave set-up を考慮していないので、合田¹⁷⁾の結果と直接比較できないが、実測結果のばらつきを考慮するとほぼ妥当な結果である。

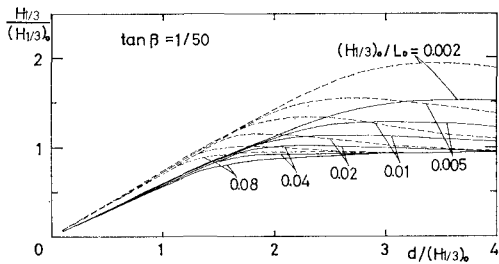


図-2 不規則波の浅水・砕波変形の計算例

4. 数値計算の手順

- ①与えられた沖波の方向スペクトルから、不規則波を周波数と波向の異なる成分波に分割し、それぞれの振幅を定める¹⁸⁾。
- ②ピーク周波数・ピーク波向に対する沖側波峰線をスネルの法則によって求め、沖側境界線とする。そして、境界線上での各成分波の初期値 ϕ_{ij} を求める。
- ③波向線方程式により、1 ステップ岸側の計算点の位置を求める。この際、必要に応じて波向線を追加・削除する。
- ④放物型方程式 (6) と側方境界条件から、計算点での各成分波の解 ϕ_{ij} を求める。
- ⑤求められた解から、式 (21) の f_D を求めておく。
なお、式 (25) において、 $S(f, \theta) df d\theta = |\phi_{ij}|^2 / 2$ である。
- ⑥③～⑤を繰り返す。

5. 計算結果

図-3 は、規則波の屈折・浅水・砕波変形の計算結果である。砕波減衰を含めなければスネルの法則と一致し、砕波減衰を含めると砕波帯で波高水深比がほぼ一定となるという実験結果と一致する。

図-4 および 5 は、直角入射の場合の座標系を用いて

計算した半無限堤による斜め入射規則波の回折係数を表わすが、Sommerfeld の解析解とほぼ一致している。

図-6 は、半無限堤による不規則波の回折係数を示

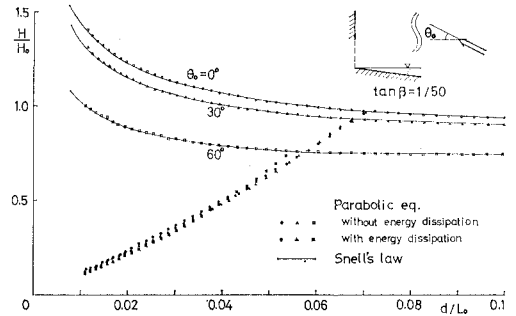


図-3 屈折・砕波による規則波の波高変化

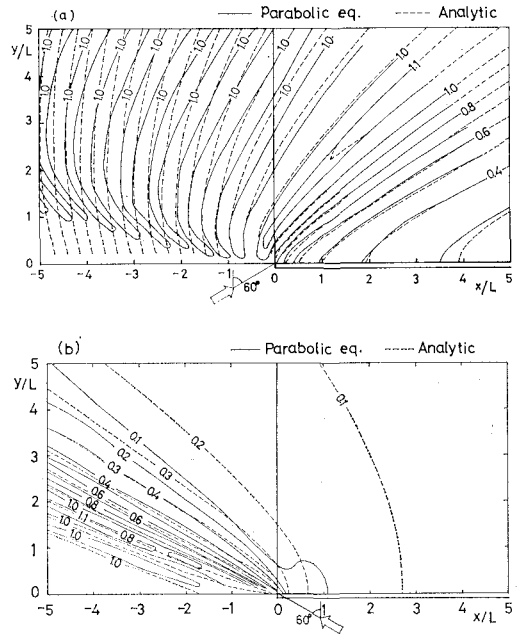


図-4 半無限堤による規則波の回折係数

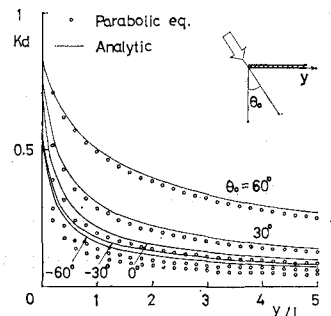


図-5 半無限堤背後の規則波の回折係数

す。Sommerfeld の解を重ね合わせた結果¹⁸⁾とよく一致する。

図-7 は、一様勾配斜面上に設置された半無限堤周辺の静穏度計算に応用した例である。屈折の効果により、半無限堤背後の波高が一様水深の場合に比べて小さくなる。

図-8 は、浅瀬背後の波高分布の計算に応用した例であり、規則波の場合に比べ、浅瀬背後の波高増大率はわずかである。

6. 結論および今後の課題

放物型方程式を用いて、不規則波の屈折・回折・砕波

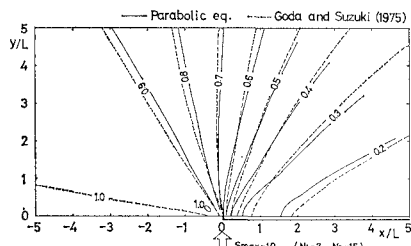


図-6 半無限堤による不規則波の回折係数

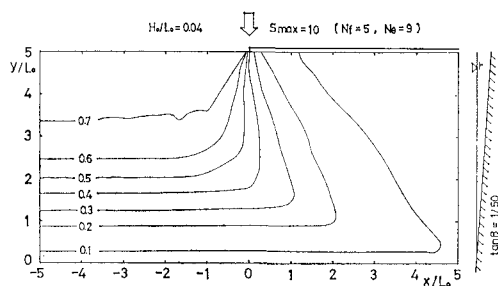


図-7 斜面上の半無限堤周辺の不規則波の波高分布

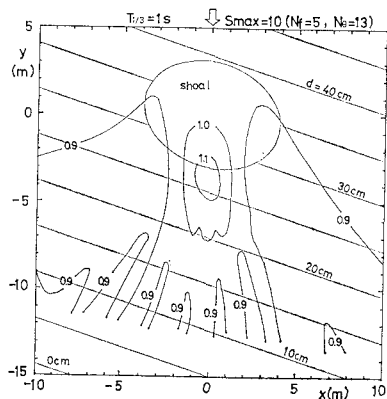


図-8 球面浅瀬背後の不規則波の波高分布

変形の計算が行なえるようにした。ただし、砕波減衰のモデルに用いた諸係数の値については、実験的に再検討する必要がある。また、反射が有意な場合や、一文字堤の左右から波が進入する場合などのように、2つ以上の経路を通して波が到達する際の砕波減衰の取り扱いには新たな工夫を要する。

なお、この研究に対し五洋建設株式会社から研究費を得た。また図面の作成には、大学院生の段寧さんの助力を得た。ここに記して感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, 13th ICCE, pp. 471~490, 1972.
- 2) Radder, A. C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 159~176, 1979.
- 3) Tsay, T.-K. and P. L.-F. Liu: Numerical solution of water-wave refraction and diffraction problems in the parabolic approximation, J. Geophys. Res., Vol. 87, pp. 7932~7940, 1982.
- 4) 磯部雅彦: 波向線座標における放物型方程式を用いた屈折・回折の計算法, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 95~99, 1985.
- 5) 泉宮尊司: 屈折・回折による方向スペクトルの変形計算法, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 169~173, 1985.
- 6) Dalrymple, R. A., J. T. Kirby and P. A. Hwang: Wave diffraction due to areas of energy dissipation, ASCE, Vol. 110, No. WW1, pp. 67~79, 1984.
- 7) 堀川清司(編): 海岸環境工学, 東大出版会, 582 p., 1985.
- 8) 渡辺 晃・丸山康樹: 屈折・回折・砕波減衰を含む波浪場の数値解析法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103~107, 1984.
- 9) 渡辺 晃・原 哲・堀川清司: 重合した波浪場における砕波について, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 5~9, 1983.
- 10) 合田良実: 砕波指標の整理について, 土木学会論文報告集, 第180号, pp. 39~49, 1970.
- 11) 佐々木幹夫・佐伯 浩: 砕波後の波の変形に関する研究(2), 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 39~44, 1974.
- 12) 泉宮尊司・堀川清司: 砕波帯における波のエネルギー方程式のモデリング, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 15~19, 1983.
- 13) 磯部雅彦: クノイド波理論第1次近似解の数値計算法とその応用, 第41回年講, 2, 1986.
- 14) 岩垣雄一・木村 晃・岸田典史: 斜面上における不規則波の砕波に関する研究, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 102~106, 1977.
- 15) 磯部雅彦・西村仁嗣・柄登志彦: 不規則波の砕波変形に関する実験的研究, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 139~142, 1980.
- 16) 榎木 亨・岩田好一郎・石井敏之: 不規則波の砕波変形に関する実験的研究, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 143~147, 1980.
- 17) 合田良実: 浅海における波浪の砕波変形, 港湾技研報告, 第14巻, 第3号, pp. 59~106, 1975.
- 18) 合田良実・鈴木康正: 光型型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No. 230, 45p., 1975.