

高次の自由波を考慮した波の浅水変形について

浜中 建一郎*・日比 康生**・佐伯 浩***

1. ま え が き

著者等はこれまで、WKB 法を用いて波の浅水変形に対する摂動展開を行い、斜面上の波の水粒子軌道や波速に及ぼす水底勾配の影響、浅水変形に伴う波の前傾化等を調べてきた^{1),2)}。そこでは、波の非線形性を表わすパラメータ ε と、変形性を表わすパラメータ δ とのふたつのパラメータによる摂動展開が用いられた。そのとき、 ε と δ に関する最初のオーダー ($\varepsilon^1\delta^0$) の解は微小振幅波の解と一致し (ここでは便宜上、基本波と呼ぶ)、その振幅の場所毎の値は、 $\varepsilon^1\delta^1$ のオーダーの自由水面境界条件から得られる式によって定まり、他の高次の振幅はこの基本波の振幅によって求まった。この基本波の振幅を決定する式は、定常波動場における基本波のエネルギー保存則を表わす式と一致する。一方、定常波動場における時間平均断面エネルギーフラックスを、同じ ε と δ で摂動展開した場合、各オーダーのエネルギーフラックスは各々独立に保存則を満たさなければならない¹⁾。このとき、最初のオーダーのエネルギーフラックスによる保存則は、基本波のエネルギー保存則と一致し、さらに前述した $\varepsilon^1\delta^1$ のオーダーでの自由水面境界条件から得られる式と一致している。

さて、用いた基礎方程式を摂動展開して得られる高次のオーダーでの基礎方程式は、考えているオーダーより低次の解による強制項を伴った線形非斉次方程式となる。これらの解は一般的には、非斉次方程式の特解とその斉次方程式の一般解との和によって構成される。これまでの著者等の展開では、このうち高次の一般解は無視され、特解だけによって構成されていた。しかし、高次のオーダーでのエネルギーフラックスを考えたとき、特解だけで構成された高次近似解ではエネルギー保存則を満たさないことが分かった。このことから、本研究では高次の一般解を考慮し、各オーダーでのエネルギー保存則を満たすような浅水変形波動解を導くことを目的とする。さらに、得られた結果とこれまでの解、ストークス波の解及

び実験結果との比較を行う。

この高次の一般解が解となる高次の斉次方程式は、基本波の方程式と同形である。従って解も基本波と同形となり、分散関係も一致する。このことからここでは高次の自由波と呼ぶ。

高次の自由波に関しては、Molin³⁾により、Second-order free-waves という言葉を用いて初めて述べられた。そこでは、波部の非線形干渉によって生ずる非線形長周期波が急変形をするとき、そこから同周期の自由波が発生するとされた。又、Mei et al.⁴⁾は Molin と同様の状況を考え、Chu et al.⁵⁾の摂動展開に基づき、高次の自由波を考えた。これらは、本研究で用いた摂動展開のオーダーで考えると、Molin の場合は $\varepsilon^2\delta^0$ のオーダーに、Mei の場合は $\varepsilon^2\delta^1$ のオーダーに対応している。しかし、いずれの場合も厳密にはエネルギー保存則を満たしていない。これに対し本研究では単一周周期波の緩変形を考えているため、Molin や Mei の場合とは設定した状況は異なるが、高次の自由波は $\varepsilon^1\delta^2$ と $\varepsilon^2\delta^0$ のオーダーで現れた。

2. エネルギーフラックス

正規直交座標系での断面エネルギーフラックスは、

$$F = \int_{-h}^{\eta} -V\phi\phi_t dz \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる。ここで、 ϕ は水粒子速度ポテンシャル、 η , h は各々水位変動と水深、 $V \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 。著者等がこれまでの展開で用いた座標系¹⁾では、

$$\begin{aligned} F &= \int_{-h}^{\eta} \{\gamma(\phi_\xi)^2 + \delta\phi_\xi V\phi\} dz \\ &= \int_{-h}^0 \{\gamma(\phi_\xi)^2 + \delta\phi_\xi V\phi\} dz \\ &\quad + \eta \{\gamma(\phi_\xi)^2 + \delta\phi_\xi V\phi\} \Big|_{z=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^2 \{\gamma(\phi_\xi)^2 + \delta\phi_\xi V\phi\} \Big|_{z=0} + \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる。ここで γ は波数 k の第 1 項、位相 ξ は

$$\xi = \delta^{-1} \int k \cdot dx - t \dots\dots\dots (3)$$

である。式 (2) を ε と δ で展開し、各オーダーごとにまとめると、

* 正 会 員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科
 ** 学生会員 北海道大学 工学研究科
 *** 正 会 員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \varepsilon^2 \delta^0 \mathbf{F}^{(2,0)} + \varepsilon^3 \delta^0 \mathbf{F}^{(3,0)} + \varepsilon^4 \delta^0 \mathbf{F}^{(4,0)} + \dots \\ & + \varepsilon^2 \delta^1 \mathbf{F}^{(2,1)} + \varepsilon^3 \delta^1 \mathbf{F}^{(3,1)} + \dots \\ & + \varepsilon^2 \delta^2 \mathbf{F}^{(2,2)} + \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

となる。式(4)の時間平均をとり、定常波動場を考えると、それによるエネルギー保存則は、

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{F}}^{(2,0)} = 0, \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{F}}^{(3,0)} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

の様に各オーダーごとに成立しなければならない¹⁾。

以下、式(4)の右辺に、これまでの特解だけで構成された解を代入し、各項ごとに考察を進める。

$\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーでは、

$$\mathbf{F}^{(2,0)} = \int_{-h}^0 \gamma \{ \phi_{\xi}^{(1,0)} \}^2 dz \dots \dots \dots (6)$$

となり、

$$\phi_{\xi}^{(1,0)} = -\frac{b^2}{2} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} (ie^{i\xi} - ie^{-i\xi}) \dots \dots \dots (7)$$

$$\alpha = \gamma(z+h), \quad \beta = \gamma h$$

を用いて、時間平均をとると、

$$\bar{\mathbf{F}}^{(2,0)} = \frac{\gamma}{4} b^2 \frac{(\sinh^2 \beta + h)}{\cosh^2 \beta} \dots \dots \dots (8)$$

が得られる。これによるエネルギー保存則、すなわち式(5)は

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\gamma}{4} b^2 \frac{(\sinh^2 \beta + h)}{\cosh^2 \beta} \right\} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

であり、まがきで述べたように、 $\varepsilon^1 \delta^1$ のオーダーの自由水面境界条件から得られる式と一致する。

$\varepsilon^2 \delta^1$ のオーダーでは、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(2,1)} = & \int_{-h}^0 \{ 2\gamma \phi_{\xi}^{(1,0)} \phi_{\xi}^{(1,1)} + \phi_{\xi}^{(1,0)} \nabla \phi_{\xi}^{(1,0)} \} dz \\ & \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

となるが、この場合、右辺は振動項のみで定常項はない。従って時間平均したエネルギーフラックスは零となり、式(5)は恒等的に満たす。

$\varepsilon^2 \delta^2$ のオーダーでは、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(2,2)} = & \int_{-h}^0 [2\gamma \phi_{\xi}^{(1,0)} \phi_{\xi}^{(1,2)} + \gamma \{ \phi_{\xi}^{(1,1)} \}^2 \\ & + \mathbf{k}^{(0,2)} \{ \phi_{\xi}^{(1,0)} \}^2 + \phi_{\xi}^{(1,0)} \nabla \phi_{\xi}^{(1,1)} \\ & + \phi_{\xi}^{(1,1)} \nabla \phi_{\xi}^{(1,0)}] dz \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

となり、この場合は右辺に定常項が現れ、時間平均されたエネルギーフラックスも零とならない。従って式(9)に従って基本波の振幅が変化するとき、特解だけで構成された従来の解では一般的にはエネルギー保存則を満たさない。このことから高次の自由波の導入が必要となる。しかし、通常の海岸で対象となる 1/10 以下の緩斜面上では、式(11)は式(8)に比べ非常に小さな値を持つことが分かったため、具体的表記は省略する。

同様に、 $\varepsilon^3 \delta^0$ 及び $\varepsilon^3 \delta^1$ のオーダーのエネルギーフラックスを求めると、このふたつのオーダーでは定常項を持たないことが分かり、従ってその時間平均は零とな

り、式(5)を満たす。

$\varepsilon^4 \delta^0$ のオーダーでは、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(4,0)} = & \int_{-h}^0 [2\gamma \phi_{\xi}^{(1,0)} \phi_{\xi}^{(3,0)} + \gamma \{ \phi_{\xi}^{(2,0)} \}^2 \\ & + \mathbf{k}^{(2,0)} \{ \phi_{\xi}^{(1,0)} \}^2] dz \\ & + 2\gamma \eta^{(1,0)} \phi_{\xi}^{(1,0)} \phi_{\xi}^{(2,0)} \Big|_{z=0} \\ & + \gamma \{ \eta^{(2,0)} + \zeta^{(2,0)} \} \{ \phi_{\xi}^{(1,0)} \}^2 \Big|_{z=0} \\ & + \gamma \{ \eta^{(1,0)} \}^2 \phi_{\xi}^{(1,0)} \phi_{\xi}^{(1,0)} \Big|_{z=0} \\ & + \eta^{(1,0)} \phi_{\xi}^{(1,0)} \mathbf{V}^{(2,0)} \Big|_{z=0} \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\zeta^{(2,0)}$ 、 $\mathbf{V}^{(2,0)}$ は $\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーの解に現れる平均水位の変化と定常流を表す。式(12)の右辺に従来の解を代入し時間平均をとると、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}^{(4,0)} = & \frac{\gamma}{4\gamma^2} k^{(2,0)} \frac{b^2}{\cosh^2 \beta} \\ & \times \{ \beta (\cosh 2\beta - \sinh 2\beta) + \beta - 2\beta^2 \} \\ & + \frac{3}{8} \frac{\gamma}{\gamma} \left(\frac{\gamma b}{\sinh 2\beta} \right)^4 \\ & \times (\sinh 2\beta \cosh 2\beta + 2\beta) \\ & + \frac{3}{8} \gamma b^4 \frac{\gamma^2 + 1}{\sinh^2 \beta} + \frac{\gamma}{2} \zeta^{(2,0)} b^2 \\ & + \frac{1}{8} \gamma \gamma^2 b^4 \left(1 + \frac{3}{2 \cosh^2 \beta} \right) + \frac{3}{8} \gamma b^4 \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{V}^{(2,0)} b^4 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

が得られる。このオーダーでも式(11)と同様、一般的にはエネルギー保存則、式(5)を満たさない。又、著者等がこれまで展開した ε と δ に関する 3 次近似解を用いて得られるエネルギーフラックスで有意となるのはこのオーダーまでである。

3. 高次の自由波

前節で述べたように、従来の解を用いて求めた各オーダーごとの時間平均断面エネルギーフラックスのうち、恒等的には零にならないものには、 $\varepsilon^2 \delta^0$ 、 $\varepsilon^2 \delta^2$ 、 $\varepsilon^4 \delta^0$ のオーダーのものであった。そのうち、 $\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーのフラックスによるエネルギー保存則、すなわち基本波に対するエネルギー保存則、式(9)は、 $\varepsilon^1 \delta^1$ のオーダーの境界条件を満たす解としても得られるのであるから認めざるを得ない。その結果、式(11)、(13)で表わせる $\varepsilon^2 \delta^2$ 、 $\varepsilon^4 \delta^0$ のオーダーのエネルギーフラックスは一般的には保存則を満たさなくなり、高次の自由度の導入が必要となる。

さて、これまでの展開と同様、パラメータ δ で水平方向に圧縮し、位相 ξ を用いて座標変換した基礎方程式^{1),2)}を、 ε と δ で振動展開し各オーダーでまとめると、一般的には、

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 \phi_{\xi}^{(m,n)} + \phi_{zz}^{(m,n)} &= S_1^{(m,n)} \\ \phi_z^{(m,n)} + \gamma \eta_{\xi}^{(m,n)} &= S_2^{(m,n)} \quad (z=0) \\ \gamma \eta^{(m,n)} - \phi_{\xi}^{(m,n)} &= S_3^{(m,n)} \quad (z=0) \\ \phi_z^{(m,n)} &= S_4^{(m,n)} \quad (z=-h) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

と表わされる。ここで、 m は ε の展開次数、 n は δ のそれを表わす。又、 $S_1 \sim S_4$ は (m, n) 次より低次の解で構成される強制項である。特に $m=1, n=0$ の場合は、 $S_1 \sim S_4$ は零となり、基本波に対する方程式となる。式 (14) の解はまえがきで述べたように、一般的には強制項を含んだ非斉次方程式の特解と、強制項を零とした斉次方程式の一般解の和として表わされる。これまでの解はこのうちの特解だけで構成されていた。しかし、すでに述べたように、この特解だけで構成された解によっては、高次のオーダーでのエネルギー保存則は満たされなかった。このことから、式 (14) の一般解を導入し、エネルギー保存則を満たすようにその振幅を定めるというのが、この研究の基本的な考えである。このとき、この一般解に対する斉次方程式は基本波に対する方程式と同形となり、解も基本波のそれと同形となる。従って便宜上、高次の自由波と呼んだ。

前節で述べたように、 $\varepsilon^2 \delta^1$ 、 $\varepsilon^3 \delta^0$ 、 $\varepsilon^3 \delta^1$ のオーダーのエネルギーフラックスは恒等的に零となり保存則、式 (5) を満たした。このことから $\varepsilon^1 \delta^1$ 、 $\varepsilon^2 \delta^0$ 、 $\varepsilon^2 \delta^1$ のオーダーの解には高次の自由波を導入する必要のないことが分かる。従って、 $\varepsilon^2 \delta^2$ と $\varepsilon^4 \delta^0$ のオーダーでのエネルギー保存則を満たすためには、前者に対しては $\varepsilon^1 \delta^2$ のオーダーの解に、後者に対しては $\varepsilon^3 \delta^0$ のオーダーの解に高次の自由波を導入すれば良いことが分かる。各々の速度ポテンシャルを、

$$\phi_F^{(1,2)} = -\frac{1}{2} b_F^{(1,2)} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} (ie^{i\zeta} - ie^{-i\zeta}) \dots (15)$$

$$\phi_F^{(3,0)} = -\frac{1}{2} b_F^{(3,0)} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} (ie^{i\zeta} - ie^{-i\zeta}) \dots (16)$$

とすると、それによるエネルギーフラックスは式 (11) と式 (12) から

$$\bar{F}_F^{(2,2)} = \frac{\gamma}{2} b b_F^{(1,2)} \frac{(\sinh^2 \beta + h)}{\cosh^2 \beta} \dots (17)$$

$$\bar{F}_F^{(4,0)} = \frac{\gamma}{2} b b_F^{(3,0)} \frac{(\sinh^2 \beta + h)}{\cosh^2 \beta} \dots (18)$$

となる。これらを含んだエネルギーフラックスによるエネルギー保存則は、

$$\nabla \cdot \{\bar{F}^{(2,2)} + \bar{F}_F^{(2,2)}\} = 0 \dots (19)$$

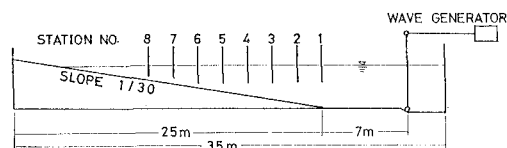
$$\nabla \cdot \{\bar{F}^{(4,0)} + \bar{F}_F^{(4,0)}\} = 0 \dots (20)$$

で表わされる。高次の自由波の振幅 $b_F^{(1,2)}$ 、 $b_F^{(3,0)}$ は、式 (19)、式 (20) を満たすように定まる。

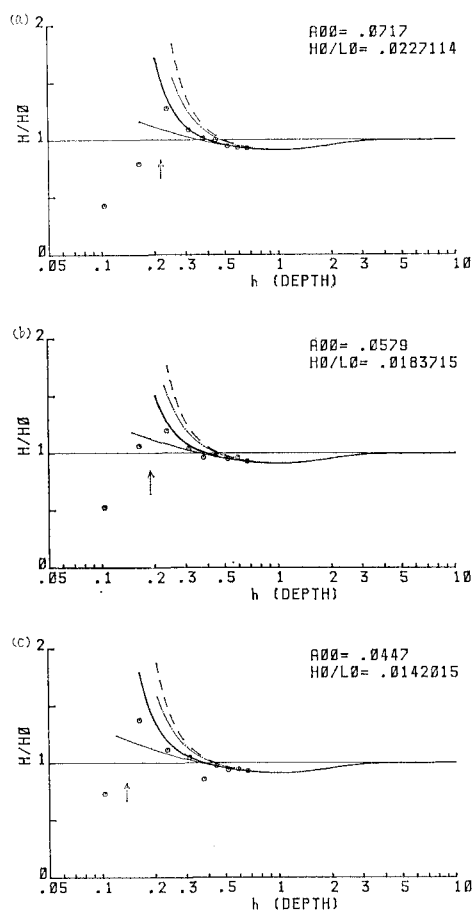
4. 実験値との比較及び考察

実験は、長さ 35 m、幅 0.8 m、高さ 1.2 m の片面ガラス張り造波水路に、1/30 勾配の底面を設けて行った。

水位変動の測定は容量式波高計により、斜面の始まる点から汀線に向けて 2 m 間隔に 9 点で行った。各々の水深は 63.6 cm, 56.2 cm, 49.3 cm, 42.1 cm, 35.8 cm, 29.6 cm, 22.3 cm, 15.5 cm, 9.8 cm である (図—1)。波の周期は、1.9 sec, 1.54 sec, 0.98 sec で各々に対し、3 ~ 4 種の波高を与えた。図—2 はこのうち周期 1.9 sec の波の波高の変化を、沖波波高との比で表わしたものである。図中、太い実線は高次の自由波を含んだ本研究による 3 次近似解、破線は高次の自由波を含まない 3 次近似解、一点鎖線はストークス 3 次近似解、細い実線は線形解、○印は実験値を示す。又、すべての値は角周波数 ω と重力加速度 g で無次元化してある。例えば、 $h = \hat{h} \omega^2 / g$ ($\hat{h}$ 印は有次元量)。



図—1 造波水路



図—2 波高の変化 (周期 1.9 秒)

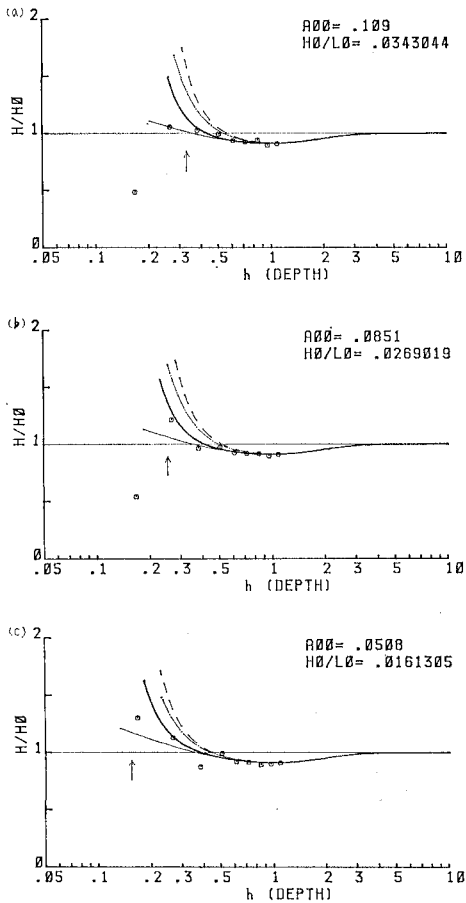


図-3 波高の変化 (周期 1.54 秒)

沖での基本波の理論振幅は (図中 A00), 最も沖側の測定点 (水深 63.6 cm) での実測波高が理論波高に一致する様に定めた。又, 図中, H , $H0$, $L0$ は各々, 各測定点での波高, 沖での波高, 沖での波長を示す。又, 矢印は, 目視観測によるおよその砕波点を示す。

同様にして, 図-3 は周期 1.54 sec の場合の比較である。これらの図から, 高次の自由波を導入したことから本理論がかなり改善されていることが分かる。ストークス波との比較においても, 全般的に本理論の方が良い結果を与えている。又, 少なくとも波高に関しては, 砕波点のかなり近傍まで良い推定値を与えていることが分かる。しかし, 砕波点そのものは本理論でも表現することはできず, 波高に対しても強い過大評価を与えている。

参考文献

- 1) Hamanaka, K. and Kato, K.: Asymptotic analysis of finite amplitude waves in water of gradually varying depth, Coastal Engg. in Japan, Vol. 26, pp. 1~10, 1983.
- 2) Hamanaka, K.: Two-dimensional shoaling of finite amplitude waves, Proc. 4th APDIAHR, pp. 301~310, 1984.
- 3) Molin, B.: On the generation of long-period second-order free waves due to changes in the bottom profile, Paper of Ship Research Institute, No. 68, 1982.
- 4) Mei, C. C. and Benmoussa, C.: Long waves induced by short-waves groups over an uneven bottom, Jour. Fluid Mech., Vol. 139, pp. 219~235, 1984.
- 5) Chu, V. C. and Mei, C. C.: On slowly varying stokes waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 41, pp. 873~887, 1970.