

斜め入射波に対する放物型方程式の適用性の拡張

平 口 博 丸*・丸 山 康 樹**

1. 緒 言

沿岸域を伝播する波浪の変形を精度良く推定することは、海岸工学にとって非常に重要な問題であり、今までにも伊藤・谷本¹⁾の数値波動解析法、Berkhoff²⁾の緩勾配方程式、渡辺・丸山³⁾の非定常緩勾配方程式などが提案されている。これらの方法による波浪場の推定精度は非常に高いが、計算の簡便性・経済性および広域に渡る推定値の必要性という工学的な要請に十分答えられる手法とはいえない面がある。この工学的な要請という意味において最近注目されているのが Radder⁴⁾の放物型方程式である。しかし、その計算精度を確保するためには波向と座標軸の方向とを極力一致させることが望ましく、波向ごとに座標軸を変える必要がある。Tsay・Liu⁵⁾や磯部⁶⁾は直交曲線座標系を用いてこの計算精度の問題を解決しているが、これらの方法には沿岸部での碎波変形が考慮されておらず、現地海岸への適用に際して不十分な点が残されている。

本研究では、放物型方程式の誘導過程を見直すことにより、波高変化を考慮した放物型方程式（デカルト座標系）を新たに誘導するとともに、碎波変形も同時にモデル化してその適用性の拡大を図る。ついで、球面浅瀬による波浪変形および斜め入射波が碎波する簡単な例を対象として数値計算を行い、新たに導いた放物型方程式の適用性について検討する。

2. 放物型方程式の誘導

(1) Radder の放物型方程式

新たな放物型方程式を導く際に、Radder の放物型方程式の誘導過程に関する議論が重要となる。そこで、その誘導過程を以下に概説する。

Berkhoff の緩勾配方程式は次式で与えられる。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \varphi) + \omega^2 C_g / C \cdot \varphi = 0 \quad (1)$$

ここに、 C は波速、 C_g は群速度、 ω は角周波数、 ∇ は水平方向 (x, y) の微分演算子である。また、 φ は水面変動の複素振幅であり、波動運動の速度ポテンシャル

$\Phi(x, y, z, t)$ と次の関係にある。

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \varphi(x, y) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

ここに、 k は波数、 h は水深、 i は虚数単位である。

式 (1) の緩勾配方程式は次式のように変形できる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -A \cdot \varphi - B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3)$$

ここに、 A, B は次式で表される。

$$A = k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \quad (4)$$

$$B = \frac{1}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial x} \quad (5)$$

ついで、Radder と同様に任意関数 φ^+ と φ^- 、および splitting matrix T に関する次の方程式を仮定する。

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \varphi \\ \partial \varphi / \partial x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \partial \varphi / \partial x \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\alpha + \gamma = 1, \quad \beta + \delta = 0 \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \partial \varphi / \partial x \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = -\frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} \quad (9)$$

式 (7) の両辺を x で微分し、式 (3)、(9) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} &= \frac{\partial T}{\partial x} \begin{pmatrix} \varphi \\ \partial \varphi / \partial x \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} \partial \varphi / \partial x \\ \partial^2 \varphi / \partial x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

が得られる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= -\beta A + \frac{\alpha \gamma}{\beta} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \gamma B \\ D_{12} &= -\beta A - \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha B \\ D_{21} &= \beta A + \frac{\gamma^2}{\beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \gamma B \\ D_{22} &= \beta A - \frac{\alpha \gamma}{\beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \alpha B \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで式 (10) の意味について考えてみよう。 φ^+ の x 方向勾配 $\partial \varphi^+ / \partial x$ は φ^+ と φ^- の値により表され、

* 正会員 工修 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 水理部

** 正会員 工博 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 水理部

$\partial\varphi^+/\partial x$ に対する各々の寄与率が D_{11} , D_{12} という係数で表現されている。もし, $D_{12}=D_{21}=0$ を満たすように matrix T が決定できれば, $\partial\varphi^+/\partial x$ は φ^+ だけで, $\partial\varphi^-/\partial x$ は φ^- だけで表現される。しかし, そのような T を求めることは一般には不可能である。

そこで, $\partial\varphi^+/\partial x$ に対する φ^- の影響が, あるいは $\partial\varphi^-/\partial x$ に対する φ^+ の影響が極力小さくなるように α , β を決定することを考える。その1つの方法として D_{12} , D_{21} の項の1部分を零とおく。Radder は式 (4) の右辺を k^2 と近似し, 式 (11) の D_{12} , D_{21} より,

$$\left. \begin{aligned} -\beta k^2 - \alpha^2/\beta &= 0 \\ \beta k^2 + \gamma^2/\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

としている。式 (8) を考慮して式 (12) を α , β について解き, φ^+ を x 軸方向の進行波, φ^- を逆行波とするならば, matrix は

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/k \\ 1 & i/k \end{pmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

のように決定される。

式 (13) を式 (10) に代入し, 逆行波成分を無視すれば φ^+ に関する放物型方程式

$$\frac{\partial\varphi^+}{\partial x} = \left[ik - \frac{1}{2kCC_g} \frac{\partial(kCC_g)}{\partial x} + \frac{i}{2kCC_g} \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \varphi^+ \dots\dots (14)$$

が得られる。

(2) 新たな放物型方程式

Radder は D_{12} や D_{21} に含まれる式 (4) の演算子 A の一部の項, 即ち k^2 のみを考慮している。ここでは, 式 (4) の右辺第2項 $\partial^2/\partial y^2$ の影響について考えてみる。

φ^+ の振幅を a , 位相関数を χ とし,

$$\varphi = ae^{i\chi} \dots\dots\dots (15)$$

とおけば, 次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi^+}{\partial y^2} &= -\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2\varphi^+ \\ &+ \left(\frac{\partial^2a}{\partial y^2} + 2i\frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial\chi}{\partial y} + ia\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right)e^{i\chi} \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

斜め入射波の場合 x , y 方向の波数を k_x , k_y とすれば,

$$(k_x, k_y) = (\partial\chi/\partial x, \partial\chi/\partial y) = \nabla\chi \dots\dots\dots (17)$$

と書ける。式 (16), (17) より式 (4) の演算子 A は

$$A = k^2 - k_y^2 + \dots\dots\dots (18)$$

と表され, A には k_y^2 の項が含まれていることが判る。

波が変形する場合, 位相関数 χ は振幅 a の空間微分の影響を受けるが, ここでは近似的に

$$(\partial\chi/\partial x)^2 + (\partial\chi/\partial y)^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 \dots\dots\dots (19)$$

が成り立つものとする。式 (18), (19) より式 (12) に対して

$$\left. \begin{aligned} -\beta(k^2 - k_y^2) - \alpha^2/\beta &= -\beta k_x^2 - \alpha^2/\beta = 0 \\ \beta(k^2 - k_y^2) + \gamma^2/\beta &= \beta k_x^2 + \gamma^2/\beta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

が得られる。上式を満たす matrix T

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/k_x \\ 1 & i/k_x \end{pmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

を用いて放物型方程式は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi^+}{\partial x} &= \left[i \left(k_x + \frac{k_y^2}{2k_x} \right) - \frac{1}{2k_xCC_g} \frac{\partial}{\partial x} (k_xCC_g) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2k_xCC_g} \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \varphi^+ \dots\dots (22) \end{aligned}$$

以上のようにして新たな放物型方程式を得たが, ここで上式の物理的意味を考察しておこう。 x 軸に平行に進行する単一波の場合, $k_x = k$, $k_y = 0$ となるから式 (22) は Radder の導いた式 (14) と完全に一致する。したがって, このような入射条件下では式 (22) は式 (4) と同等の精度が保証される。

ついで, ある海域に斜め入射波が来襲する場合について考える。今, 計算対象領域を平行等深線海岸で近似し, Snell の法則等により解析的に与えられる k_x , k_y を用いて式 (22) を計算する。この操作は対象海域に近似的な波向線を与えたことに相当する。想定した波向線が実波浪の波向線を良く近似しているならば, 波向と x 軸との成す角度には関係なく, 式 (22) の放物型方程式は高精度の解を与える。したがって, 式 (22) の放物型方程式は k_x , k_y を適切に選定することにより斜め入射波に対しても適用可能となり, 計算結果は座標軸の取り方による影響をさ程受けなくなる。

(3) 碎波減衰のモデル化

碎波減衰を考慮した波の変形計算法としては, 渡辺・丸山の非定常緩勾配方程式がある。それによると, 線流量 Q に関する運動方程式に碎波減衰項 f_D を線形的に付加し,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{C^2}{n} \nabla(n\zeta) + f_D Q = 0 \dots\dots\dots (23)$$

を導びいている。ここに, Q は線流量ベクトル, n は C_g/C , ζ は水面変位である。このモデル化に従えば, 新たな放物型方程式 (22) に碎波減衰項を付加することは比較的容易である。

ζ と φ^+ との間には次の関係

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \frac{i\omega}{g} \varphi^+ e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (24)$$

がある。上式を用いて φ^+ に関する式 (22) を水面変位 ζ に関する式に書き直し, 渡辺らのモデル化と同様にして碎波減衰項 f_D' を付加すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta}{\partial x} &= \left[i \left(k_x + \frac{k_y^2}{2k_x} \right) - \frac{1}{2k_xCC_g} \frac{\partial}{\partial x} (k_xCC_g) \right] \zeta \\ &\quad + \frac{i}{2k_xCC_g} \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial\zeta}{\partial y} \right) - f_D' \zeta \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

上式は碎波減衰を考慮した ζ に関する放物型方程式である。ここで, 水面変位 ζ の振幅を ξ とし,

$$\zeta = \xi e^{ix} \dots\dots\dots (26)$$

の関係式(25)に代入すれば、その実数部から次のエネルギー式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(CC_g k_x \hat{\xi}^2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(CC_g \frac{\partial \chi}{\partial y} \hat{\xi}^2\right) + 2CC_g k_x f_D \hat{\xi} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

非定常緩勾配方程式(23)から得られるエネルギー式と式(27)を比較すると、 f_D と f_b の関係が次のように求められる。

$$f_b = f_D/2C \dots\dots\dots (28)$$

線流量表現された f_D を水面変位 ζ に関する表現に書き直し、さらに式(28)の波速 C に長波近似を適用すれば、結局 f_b は次式のように表現できる。

$$f_b = \begin{cases} 0 & ; \text{ (碎波帯外)} \\ \frac{\alpha_D S_D}{2h} \sqrt{\frac{\xi}{\gamma' h} - 1} & ; \text{ (碎波帯内)} \end{cases} \dots\dots\dots (29)$$

ただし、再生効果を表すため

$$\xi < \gamma' h \text{ のとき } f_b = 0 \dots\dots\dots (30)$$

とする。ここに、 S_D は碎波点近傍沖側の平均海底勾配、 h は水深、 α_D と γ' は定数である。

一方、碎波判定子 u_{co}/C' は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{co}/C' &= \frac{g}{\omega C} \xi \sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2} \\ &= \frac{g}{\omega C} \xi k \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここに、 g は重力加速度である。

3. 数値計算法

(1) 差分スキーム

碎波減衰項を含む ζ に関する放物型方程式(25)は空間的な変動成分を含んでいる。その成分をあらかじめ分離しておくことにより、計算間隔 Δx 、 Δy が大きく取れる利点がある。そこで、沖側境界における入射波の水面変位を ζ_0 とし、 ζ を

$$\zeta = \zeta' \zeta_0 \dots\dots\dots (32)$$

と表わすことにする。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= a_0 e^{ix_0}, \quad \zeta' = a' e^{ix'} \\ \chi_0 &= k_0 \cos \theta_0 x + k_0 \sin \theta_0 y \\ &= k_{x_0} x + k_{y_0} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

である。ただし a_0 、 k_0 、 θ_0 は各々沖側境界上での入射波の振幅、波数および波向である。

式(32)を用いて基礎式(25)を ζ' に関する方程式に書き改めれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial y^2} + E \frac{\partial \zeta'}{\partial y} + F \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + G \zeta' &= 0 \\ E &= 2ik_{y_0} + \frac{\partial}{\partial y}(\ln CC_g) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F &= 2ik_x \\ G &= 2k_x(k_x - k_{x_0}) + k_y^2 - k_{y_0}^2 \\ &\quad + ik_x \frac{\partial}{\partial x}(\ln CC_g) + ik_{y_0} \frac{\partial}{\partial y}(\ln CC_g) \\ &\quad + 2ik_x f_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

上式の ζ' を計算点 (i, j) を中心にして差分展開すれば、

$$p_{ij} \zeta'_{i+1,j} + q_{ij} \zeta'_{i,j} + r_{ij} \zeta'_{i,j-1} = S_{ij} \dots\dots\dots (35)$$

と一般に表現でき、 ζ'_{ij} を容易に求めることができる。

式(34)中の f_b の中には ξ が含まれるため非線形となるが、ここでは1ステップ前の値を用いて ξ を評価する。

(2) 境界条件

式(32)のように入射波成分をあらかじめ分離しておけば、 ζ' に関する沖側境界は

$$\zeta' = 1$$

とすれば良い。

側方境界については次のようにする。 ζ を式(26)のように表わした場合、位相関数 χ の y 方向変化は考慮するが振幅 ξ の局所的变化は無視すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = i \frac{\partial \chi}{\partial y} \zeta \dots\dots\dots (36)$$

あるいは、

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial y} = i \frac{\partial \chi'}{\partial y} \zeta' \dots\dots\dots (37)$$

が得られる。境界上の ζ' と計算領域内の ζ' とを上式により関係付けて側方境界を設定する。ただし実際の計算では、 $\partial \chi' / \partial y$ は1ステップ前の値を用いる。

4. 適用性の検討

(1) 斜め入射波

球面浅瀬上での波の変形を対象とし、Radderの原式(14)と新たに誘導した式(22)とによる計算結果の比較検討を行う。

図一1に示した計算結果は、Radderの原式を用いた計算値である。この計算例では x 軸に対する沖波の入射角を 0° としており、Radderが放物型方程式を導いた際の前提条件に合致するように座標系 x 、 y を選定している。なお、側方境界条件には式(37)を適用しているが、境界からの擾乱波の発生はほとんど認められず、この計算例に対する同式の有効性が確認された。

球面浅瀬上での波浪変形は放物型方程式によって非常に良く再現できる現象の1つである。そこで、この計算結果を以下の検討における基準値と考えることにする。

Radderの式を用いた試算例として、 x 軸に対する波の入射角 θ_0 が 30° と 45° の場合の結果を図一2、図一3に示す。これらの結果は図一1の結果を θ_0 だけ回転させた結果と一致すべきものである。しかし、 $\theta_0 = 30^\circ$

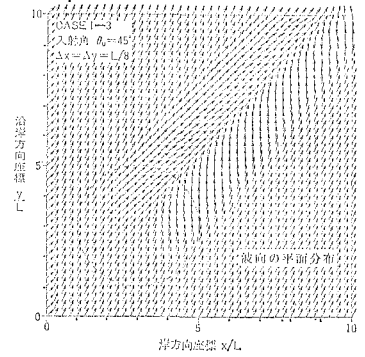
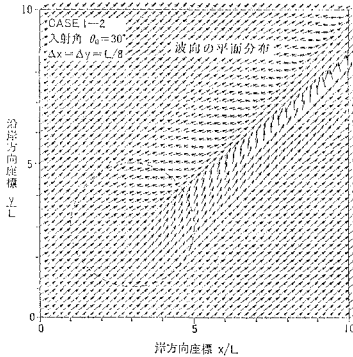
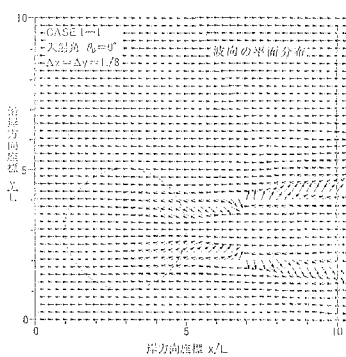
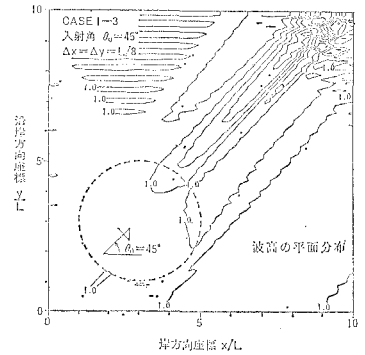
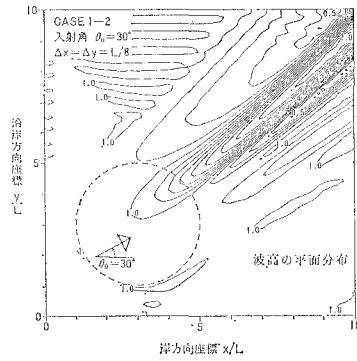
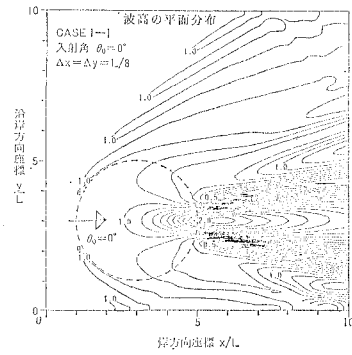


図-1 Radder の式による計算例
($\theta_0 = 0^\circ$)

図-2 Radder の式による計算例
($\theta_0 = 30^\circ$)

図-3 Radder の式による計算例
($\theta_0 = 45^\circ$)

の場合でも波高分布には基準値との差異が認められ、 $\theta_0 = 45^\circ$ の場合ではもはや基準値との関連性はほとんど失われていると言える。波向の結果についても同様である。

ついで、新たな放物型方程式 (22) について同様の検討を行う。球面浅瀬と入射波との関係をマクロ的に見れば、水深一様な場に波が斜めに進行する現象として捕えることができる。そこで x, y 方向の波数成分を

$$k_x = k \cos \theta_0, \quad k_y = k \sin \theta_0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

と与えるのが妥当であろう。ここで、波数 k は周期と局所水深とから分散関係式により決まる。沖波入射角 θ_0 が $30^\circ, 45^\circ$ の場合についての計算結果を図-4, 5 に示す。これらの図を Radder の式による計算結果と比較すれば、新たに導びいた放物型方程式の有効性は明らかである。しかし、基準となる計算結果の図-1 と図-4, 5 とを比較する

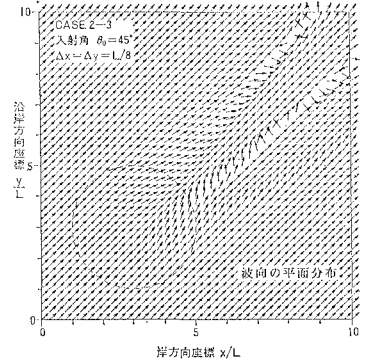
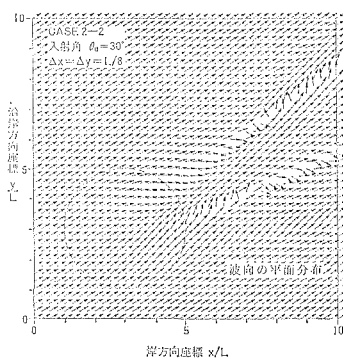
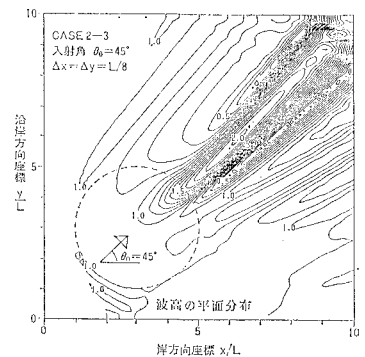
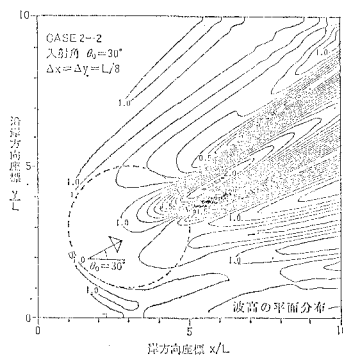


図-4 提案式による計算例 ($\theta_0 = 30^\circ$)

図-5 提案式による計算例 ($\theta_0 = 45^\circ$)

と、計算誤差が容認できるのは $\theta_0=30^\circ$ までであり $\theta_0=45^\circ$ では波高の空間分布に差異の生ずることが分る。図-5(a)の右上隅角部付近で波高分布の乱れが見られる。これは境界条件設定上の問題であり、式(37)を導びく際に波高の局所的変化を無視したことに起因するものと思われる。この計算例の場合、境界条件について一層の検討が必要である。

(2) 碎波減衰

新たに導入した碎波減衰項 f_b の妥当性を検討する。勾配 1/50 の一様勾配斜面上を斜めに進行する波が汀線付近で碎波する場合を対象として数値計算を行う。計算領域を図-6に示す。

碎波減衰項を含む放物型方程式(25)の中の x, y 方向の波数成分は、

$$k_x = k \cos \theta, \\ k_y = k \sin \theta \quad \dots (39)$$

と設定し、角度 θ は沖波入射角 θ_0 から Snell の法則により解析的に与える。計算領域中央の縦断面上 ($y=1.5$ m) での波高および波向の計算結果を図-7に示す。設定した碎波位置より沖側の計算値は波高・波向ともに

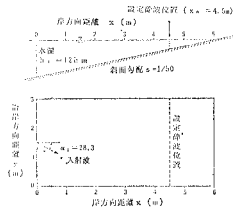


図-6 計算領域

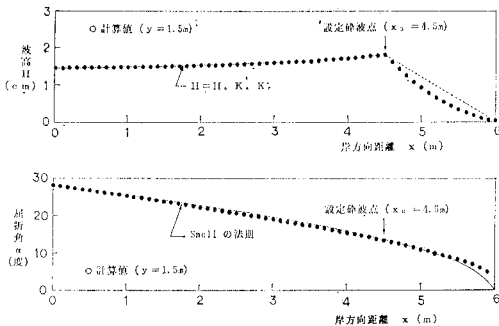


図-7 碎波減衰の計算例

理論値とはほぼ完全に一致している。なお、この計算例の場合、Radder の式を用いると波向変化は不十分ながら表わすことができるが、屈折効果による波高減少は全く評価できないことが理論的にも証明できる。

碎波位置より岸側の波高分布には碎波に伴う明らかな減衰が見られる。このことから、新たに導入した碎波減衰項 f_b の妥当性が確認された。

5. 結 語

Radder の放物型方程式の誘導過程を見直すことにより、波向変化が考慮できる新たな放物型方程式を誘導した。球面浅瀬を対象として波の変形計算を行い、提案式の原式に対する優位性を示すとともにその適用範囲についても明らかにした。さらに、提案式に碎波減衰項を付加し、簡単な試算によりその効果を確認した。

なお、数値計算については開発計算センターの定森良夫氏の協力を得た。

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・谷本勝利: 数値波動解析法とその応用——構造物周辺の波——, 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 67~70, 1971.
- 2) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., pp. 471~490, 1972.
- 3) 渡辺 晃・丸山康樹: 屈折・回折碎波減衰を含む波浪場の数値解析法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103~107, 1984.
- 4) Radder, A. C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 159~176, 1979.
- 5) Tsay, T. K. and P. L.-F. Liu: Numerical solution of water-wave refraction and diffraction problems in the parabolic approximation, J. Geophys. Res., Vol. 87, pp. 7932~7940, 1982.
- 6) 磯部雅彦: 波向線座標における放物型方程式を用いた屈折・回折の計算法, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 95~99, 1985.