

浅水非線形水面重力波の斜面による反射の数値計算

岡村敬二*・八 鍬 功**

1. はじめに

本論文では、孤立波を典型例とする浅水非線形重力波の1次元斜面反射問題を、境界要素法と Lagrange 粒子法を組み合わせた数値計算法により扱う。

孤立波の鉛直壁反射及び緩斜面遡上の問題はどちらも水平方向に関して無限領域の扱いに帰着できるため摂動論を用いて理論的に展開されており^{1),2)}、実験・数値計算も数多く存在する^{3),4),5)}。これらの中間の勾配を持つ斜面での孤立波反射は、沿岸波浪の構造物への力学的影響を調べる上で重要であるにもかかわらず、なお知見が乏しいのが現状である⁶⁾。最近の Sugimoto, Kakutani らの Edge layer theory の展開により解析的扱いが可能になりつつある。今回の方法により、時間と共に運動する汀線で terminate した有限領域において非線形不等水深問題を数値的に扱うことが可能である。

2. 定式化と斜面反射問題への適用

図-1 は系の配置図で、左端は造波用ピストン、右端は斜面(勾配 S)である。流体は非圧縮、運動は非回転とし速度ポテンシャルを ϕ とする。波遡上時に斜面上に生じる粘性境界層の厚さ δ が水深 h に対して十分小さいとすれば流体内部で Laplace 方程式が成立する。

$$\Delta\phi=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

長さに関して h 、時間に関して $\sqrt{h/g}$ で無次元化された境界条件は自由表面 (Γ_s)、一定水深底 (Γ_b)、斜面 (Γ'_s)、造波ピストン (Γ_p) においてそれぞれ、

$$D\eta=0, \quad (\Gamma_s) \quad \dots\dots\dots(2)$$

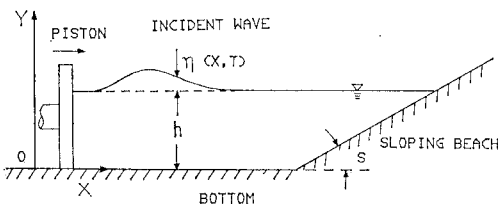


図-1 系の配置図

$$D\phi - (\phi_s^2 + \phi_n^2)/2 + \eta = 0, \quad (\Gamma_s) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\phi_n = 0, \quad (\Gamma_b + \Gamma'_s) \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\phi_n = \dot{X}_p(t), \quad (\Gamma_p) \quad \dots\dots\dots(5)$$

である。ただし D は Lagrange 微分、 $\eta = \eta(x, t)$ は表面変位、添字 s, n はそれぞれ境界に接線、法線方向の微分、 X_p は時刻 t におけるピストン変位、ドットは時間微分を表わす。(2), (4), (5) はそれぞれ $\Gamma_s, \Gamma_b + \Gamma'_s, \Gamma_p$ を流体粒子が突き抜けない条件、(3) は Γ_s における Bernoulli 方程式である。さらに Γ_s における初期境界条件

$$\phi = 0, \quad \eta = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

を課す。 Γ_s の ϕ, η は (2), (3), (6) によりすべての時刻に対して決定される。また $\Gamma'' (\equiv \Gamma_b + \Gamma'_s + \Gamma_p)$ の ϕ_n は (4), (5) で与えられる。節点運動を決定するために Γ_s 上で ϕ_n, Γ' 上で ϕ を求めることが必要である。これらの境界条件を陽に含むように、(1) を境界積分方程式に変換し、未知量を左辺に集めると、

$$\begin{aligned} & \alpha\phi_P - \int_{\Gamma'} \phi_Q \{\phi_n\}_{PQ} ds + \int_{\Gamma_s} \{\phi_n\}_Q \phi_{PQ} ds \\ &= \int_{\Gamma_s} \phi_Q \{\phi_n\}_{PQ} ds - \int_{\Gamma'} \{\phi_n\}_Q \phi_{PQ} ds \quad (P \in \Gamma') \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma'} \{\phi_n\}_Q \phi_{PQ} ds - \int_{\Gamma_s} \phi_Q \{\phi_n\}_{PQ} ds \\ &= -\alpha\phi_P - \int_{\Gamma_s} \{\phi_n\}_Q \phi_{PQ} ds + \int_{\Gamma'} \phi_Q \{\phi_n\}_{PQ} ds \end{aligned} \quad (P \in \Gamma_s) \quad \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここで P, Q は境界上の任意の2点、 α は P における偏角、 ϕ_r は (1) の特解 $\ln r/2\pi$ で今の場合 $r = PQ$ である。(7), (8) を節点 $i(P)$ に関する離散化方程式に変換すると、既知ベクトル u と未知ベクトル v の間の行列方程式に帰着する⁸⁾。

$$Av = Bu$$

$$v = \begin{pmatrix} \phi_j \\ \{\phi_n\}_j \end{pmatrix} \begin{matrix} \dots \Gamma' \\ \dots \Gamma_s \end{matrix} \quad u = \begin{pmatrix} \{\phi_n\}_j \\ \phi_j \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{i,j-1}^+ + a_{i,j}^- & (j \neq 1) \\ a_{i,n}^+ + a_{i,1}^- & (j = 1) \end{cases}$$

* 学生会員 工修 北海道大学大学院工学研究科

** 正会員 理博 北海道大学教授 工学部数物系共通

$$b_{i,j} = \begin{cases} b_{i,j-1}^+ + b_{i,j}^- & (j \neq 1) \\ b_{i,n}^+ + b_{i,j}^- & (j=1) \end{cases}$$

$$a_{i,j}^\pm = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_\pm(\zeta) \phi(\zeta) l_{j+1} d\zeta$$

$$b_{i,j}^\pm = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_\pm(\zeta) \{\phi(\zeta)\}_n l_{j+1} d\zeta$$

$$f_\pm(\zeta) = \frac{1}{2} (1 \pm \zeta)$$

$$l_{j+1} = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

ここで $f_\pm$ は節点間の内挿関数, l は節点間隔であり, $\zeta=1$ は点 j , $\zeta=-1$ は点 $j+1$ に対応する.

境界上の ϕ から接線方向の速度 $\{\phi_s\}_i$ を求めるため節点間隔の重みをかけた次の中心差分式を用いる⁹⁾.

$$\left. \begin{aligned} \{\phi_s\}_i &= (l_i/l_{i+1}) \cdot \phi_{i+1}/L' \\ &\quad + (l_{i+1}-l_i) \cdot \phi_i/L'' \\ &\quad - (l_{i+1}/l_i) \cdot \phi_{i-1}/L' \\ L' &= l_i + l_{i+1}, \quad L'' = l_i \cdot l_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

節点は局所流速 $\mathbf{v}_i = (v_s, v_n) = (\{\phi_s\}_i, \{\phi_n\}_i)$ で運動する Lagrange 粒子であるとする. 節点座標を (x_i, y_i) とすれば,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= v_x = v_s \cos \theta_i + v_n \sin \theta_i \\ \dot{y}_i &= v_y = v_s \sin \theta_i - v_n \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで θ_i は i における境界面が水平面となす角であり, i と i の前後2点を通る内挿2次曲線の i での微分値から求める. 条件 (2) は条件 (10) として表現されるので用いる方程式系は (3), (4), (5), (8), (9), (10) である. 時間発展方程式 (3), (10) の時間離散化には陽解法を用いる. 右肩の添字 k で時間ステップを表現すれば

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^{k+1} &= \phi_i^k + \{ [(\{\phi_s\}_i^k)^2 + (\{\phi_n\}_i^k)^2] / 2 - y_i^k \} \Delta t \\ x_i^{k+1} &= x_i^k + (v_x)_i^k \Delta t \\ y_i^{k+1} &= y_i^k + (v_y)_i^k \Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

計算の線形安定性のため Courant 条件 $c\Delta t/\Delta x < 1$ (無次元化により $c \sim 1$) 及び擬似分散が物理的分散より小さい条件 $\Delta t < O((\Delta x)^3)$, $L \gg \Delta x$ (L は波長) が満足されねばならない. 今回の計算では $\Delta x = 0.5 \sim 2.0$, $\Delta t = 0.02$, $L = 2 \sim 8$ であり安定条件を満足する. また系の質量 M 及びエネルギー E の値により計算の非線形安定性をチェックした.

図-2 は節点の初期配置で, 全節点数 N , Γ_p 上の節

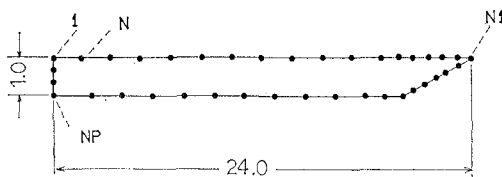


図-2 節点の初期配置図

点数 NP , 汀線の節点番号は $N1$ (反時計回りにピストン上端から数えて) である. 汀線付近は節点間隔を沖側の半分に設定する.

3. 波の伝播特性 (分散関係とスケール関係)

今回の計算における線形分散関係及び離散化による擬似分散効果を調べる目的で, 関数 X_p を $\sin(\omega t)$ 型として微小振幅波 (水深規格化振幅 $A \leq 0.05$) を造波し, 波長-位相速度の計算値を有限水深の厳密解と比較した (図-3). 波長・波速に必要な波峰の位置は波形のスパライン内挿値から求めた. 初期の節点間隔 Δx が 2.0 の場合擬似分散効果は大きい, 今回の計算で用いた $\Delta x = 1.0$ の場合には厳密解との一致は満足すべき結果である.

次に孤立波の伝播特性を調べる目的で X_p を $X_p^0 \tanh((t-t_0)/w)$ にとりピストンストローク $2X_p^0$ と時定数 w の関係が次式に従うものとする⁴⁾.

$$2X_p^0 = \sqrt{\frac{4}{3}} \left\{ w(1+A) \right\} \dots\dots\dots (12)$$

発生した孤立波波形は $6 \sim 10h$ の伝播で安定化する.

図-4 は孤立波の振幅 A に対して位相速度 v_p の計算値を●印で示した図で, Laitone の理論式 $v_p = 1 + A/2 - 3A^2/20$ が実線, 点線はこの式の $O(A)$ までを示している. A を大きくすると孤立波の幅 L に比して Δx が無視できなくなる ($\Delta x = 1.0$) ための sampling error が理論値からのずれの一因であろう. 以後用いる $A \leq 0.30$ の孤立波に対して振幅分散関係は満足されていると考えられる.

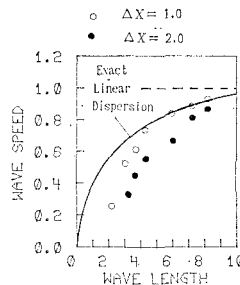


図-3 線形分散関係

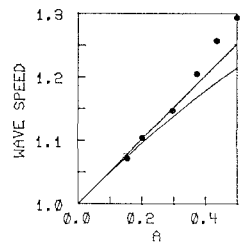


図-4 振幅分散関係

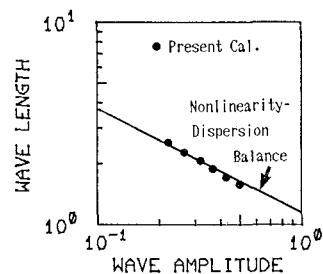


図-5 $A-L$ 間のスケールング則

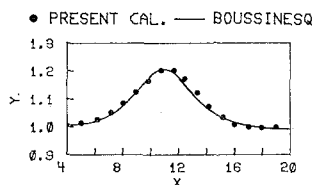


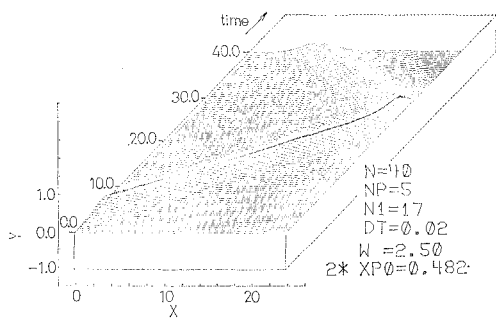
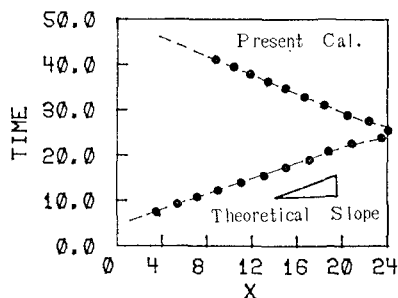
図-6 波形の厳密解との比較

図-5 は $A-L$ 関係で、計算値 (●印) は孤立波のスケール関係 (実線) を満足する。なお L の評価は、Koop-Butler の波形前面積分法⁹⁾ による。

図-6 は $A=0.21$ の孤立波波形を Boussinesq の厳密解 (実線) と比較した図である。この波形は波峰がピストンから離れて無次元時間 10.0 後である。

4. 孤立波の斜面反射の計算結果と考察

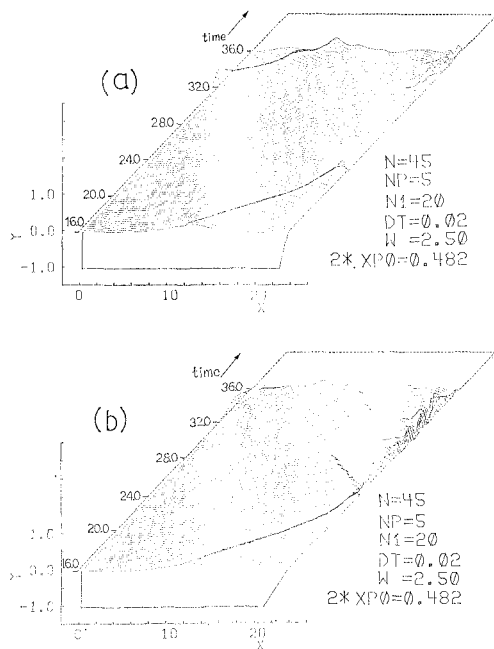
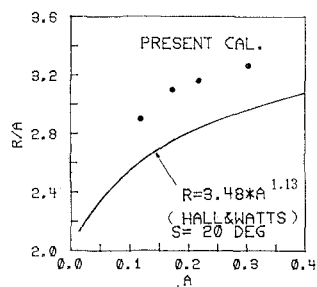
孤立波が鉛直壁反射 (壁に関する対称性から 2 孤立波の正面衝突と等価) に対して安定であることは多くの実験及び数値計算によって確かめられている^{3), 4), 10)}。図-7 は $A=0.21$ の孤立波の鉛直壁反射の計算結果で、 Γ_0 の形状を無次元時間 0.4 ごとに示した。波峰はピストン速度が極大値となる $t_0=5.0$ にピストン面を離れ $t \approx 23.0$ に壁に達する。静止水面から測った最大遡上高 R は 0.46 で理論式 $R=2A+A^2/2$ (Byatt-Smith) による値 0.44 (線形値 0.42) に近く非線形干渉が再現されている。さらに、孤立波の L と同程度の波長の trailing wave が波峰後方に見られる以外に反射波形は入射波形

図-7 孤立波の鉛直壁反射 ($A=0.21$)図-8 図-7 の孤立波波峰の $x-t$ 面での軌跡

に対して変化していない。

図-8 は 図-7 の孤立波波峰の位置を $x-t$ 面で示した図で、孤立波の壁との相互作用により波峰が $t=23.0 \sim 26.0$ の間壁面上に存在する典型的な軌跡図となる。

図-9 は 図-7 と同じ孤立波を (a) $S=45 \text{ deg}$ 及び (b) $S=20 \text{ deg}$ 斜面上で反射させた計算結果で、勾配 S を小さくした場合に反射波に波峰分裂と見られる現象が存在する。また trailing wave の振幅も小さな S に対してより大きくなっているが、汀線付近の異常な振動から発生した波も含まれており定量的議論には注意を要する。 S の減少あるいは孤立波の A の増加により backwash 時に反射波峰後方が段波状を呈することが知られている^{10), 11)}。Pedersen らによるこの backwash 碎波の理論的 criteria¹¹⁾ は $A \geq 0.48$ ($S=45 \text{ deg}$)、 $A \geq 0.16$ ($S=20 \text{ deg}$) であり 図-9 (b) は物理的に碎波領域に入って

図-9 孤立波 ($A=0.21$) の斜面反射
(a) $S=45 \text{ deg}$, (b) $S=20 \text{ deg}$ 図-10 孤立波の $A-R/A$ 関係

いる。このような場合の節点粒子移動法と汀線付近の節点間隔(図-9 の場合 0.5)の選び方が今後の課題であらう。

$S=20 \text{ deg}$ の場合の $A-R/A$ 関係の計算結果(●印)を Hall & Watts の実験式(実線)と比較した図が図-10 で、計算値が常に 20~30% 実験値より大きくなることを示している。ここで本計算が理想流体に基づく方法であるため水深が浅い、遡上先端の節点程、斜面方向に大きな流速で運動するのに対して水槽実験では、斜面上に生じる境界層による速度依存型のエネルギー損失と表面張力が遡上端の流速を抑える。この流速差が R/A の値の差を与えると定性的に予想できる。

図-11 は $S=30 \text{ deg}$ の汀線付近の節点粒子運動を無次元時間 1.6 ごとに示した図で、 $R=0.80$ 、汀線運動の最大速度はほぼオーダー 1 (次元量では $\sqrt{gh}$) であり、汀線は斜面距離 0.74 を運動する(鉛直壁で 0.48)。

図-12 は汀線から 9.3 (水深規格量) 沖側、即ち本計算では $x=14.7$ の位置で測定した波形を松田の水槽実験結果¹⁰⁾と比較した図で $A=0.30$ 、 $S=20, 30, 45, 90 \text{ deg}$ の場合が示されている。計算値(●印)は S が小さくなるに従って反射波峰の分裂と trailing wave の発生を示した実験結果の反射波と定性的に一致するが、振幅・位相に関して一致はよくない。松田は $S=20, 30 \text{ deg}$ における碎波を指摘しており、エネルギー損失の有

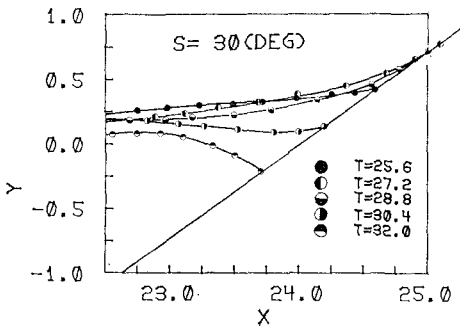


図-11 孤立波 ($A=0.30$) の 30 deg 壁反射

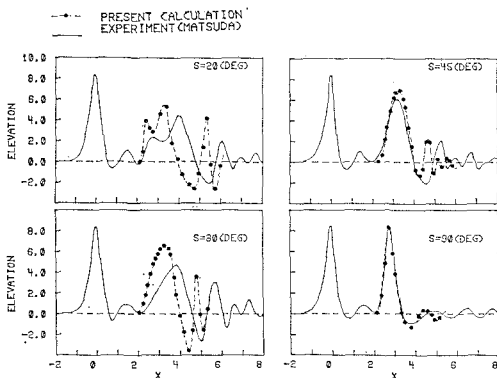


図-12 計算波形と実験波形の比較 ($A=0.30$)

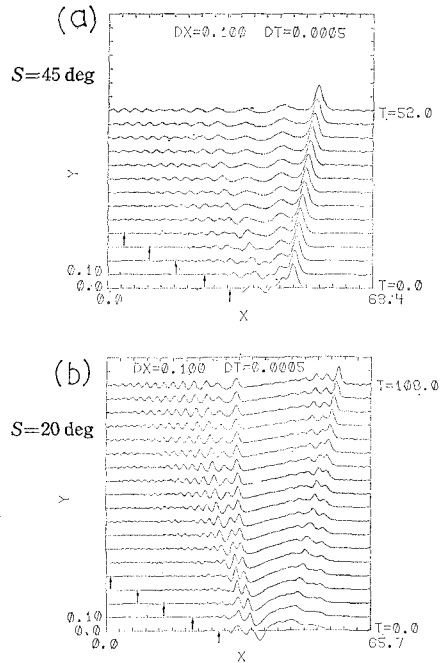


図-13 K-dV 方程式による反射波形の長時間発展

無が両結果の不一致の一因であると思われる。

本計算法では計算時間と記憶容量の有限性のため水平距離を数倍に引き伸ばし反射波形の長時間発展を追うことができない。波形の時間発展を調べる目的で、計算により求めた $A=0.21$ の孤立波の反射波形 ($S=20 \text{ deg}$ の場合 $t=30.0$ 、 $S=45 \text{ deg}$ の場合 $t=27.0$) を K-dV 方程式の初期値として Goda の離散化及び安定性解析¹²⁾に従って $c=1$ の移動座標系で時間発展を調べたのが図-13 である。なお初期波形は図-9, 12 と左右逆になっている。矢印は静止時の汀線を、 DX 及び DT はそれぞれ x, t の離散化量を表す。反射波は平坦化した正の変位部及び trailing wave から成っており振幅分散のため時間と共に両者の間隔は広がる。注目すべきことは反射により平坦化した波峰がさらに多くの孤立波に分裂してゆく点であろう。 $S=45 \text{ deg}$ では 1~2 個、 $S=20 \text{ deg}$ では少なくとも 3 個以上の孤立波に分裂している。この S の初期波形から計算したアーセル数 U_r は約 15 で $\beta^{-1} \equiv 9U_r$ は約 130 である。長島の K-dV 固有値問題の結果¹³⁾から判断すると $\beta^{-1} > 72$ の時 5 個以上の multi-soliton 状態に漸近する。今回の計算結果は、孤立波が斜面反射により多くの孤立波と trailing wave に分裂することを示す。

5. 結 語

境界要素法を孤立波の斜面反射問題に適用し、分散関係とスケール関係が満足されていることを確認した。さ

らに $A=0.21$ の孤立波を用いて $S=90, 45, 20 \text{ deg}$ 反射の数値計算を行い, S が小さくなると反射波の波峰が分裂する可能性を指摘した. $K-dV$ 方程式による長時間発展計算結果はこれらの S に対し反射波が multi-soliton 状態に漸近することを示す. 最大遡上高 R の計算値に関して本計算は $S=20 \text{ deg}$ の場合 20~30% の過大評価値を与えることを示した.

本計算には北海道大学計算機センター M-280H を使用した. 計算時間は時間ステップ 2000, 節点数 40 で約 6 分であった. 本研究を進めるに当たり, 有益な討論・助言をして頂いた理学第 1 講座水田 洋助手に厚く感謝の意を表します.

参 考 文 献

- 1) Mirie, R. A. and C. H. Su: Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study, *J. Fluid Mech.*, Vol. 115, pp. 475~492, 1982.
- 2) Kakutani, T.: Effect of an uneven bottom on gravity waves, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 30, pp. 272~276, 1971.
- 3) Fenton, J. D. and M. M. Rienecker: A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems, *J. Fluid Mech.*, Vol. 118, pp. 411~443, 1982.
- 4) Nakayama, T.: Boundary element analysis of nonlinear water wave problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 953~970, 1983.
- 5) Renouard, D. P., F. J. S. Santos and A. M. Temperville: Experimental study of the generation, damping and reflexion of a solitary wave, *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, Vol. 9, pp. 341~358, 1985.
- 6) Kim, S. K., P. L-F. Liu and J. A. Liggett: Boundary integral equation solutions for solitary wave generation, propagation and run-up, *Coastal Eng.*, Vol. 7, pp. 299~317, 1983.
- 7) Sugimoto, N. and T. Kakutani: Reflection of a shallow-water soliton. Part 1. *J. Fluid Mech.*, Vol. 146, pp. 369~382, 1984.
- 8) 榎園正人: マイコンによる境界要素解析, 培風館, 1984.
- 9) Koop, C. G. and G. Butler: An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, Vol. 112, pp. 225~261, 1981.
- 10) 松田健志: 孤立波の斜面反射特性に関する研究, 第 28 回海岸工学講演会論文集, pp. 357~361, 1981.
- 11) Pedersen, G. and B. Gjevik: Run-up of solitary waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 135, pp. 283~299, 1983.
- 12) Goda, K.: On stability of some finite difference schemes for the Kortweg-de Vries equation, *Proc. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 39, pp. 229~235, 1975.
- 13) 長島弘樹: $K-dV$ Soliton とその応用: 第 21 回海岸工学講演会論文集, pp. 49~55, 1974.