

数値波動水槽によるクノイド波の変形の解析

大 山 巧*

1. はじめに

現在、わが国の防波堤の多くは、砕石マウンドに直立ケーソンを載せた、いわゆる混成堤型式である。このような混成堤に作用する波圧に関しては、合田ら^{1),2)}の実験的アプローチを主体にした検討結果が広く実用に供されている。これに対して近年、海洋空間の有効利用等の新しいニーズから、従来の混成堤に比べて複雑な形状の海岸構造物が提案されている。したがって、波のはい上がりや作用する波圧を十分な精度で予測するためには、波の有限振幅性とともな構造物形状の影響が考慮できる数値解析法を確立する必要がある。

著者³⁾は、孤立波の伝播および反射を解析する新しい手法を提案した。そして、伝播波形および鉛直壁による反射の数値計算結果をもとに、従来の解析法に対する精度面、実用面での改善効果を明らかにした。本研究は、その解析法を周期性非線形波であるクノイド波の変形の問題へ拡張し、構造物設計上問題になる波力および周辺波動場に関する数値解析法を提案するものである。ただし、流体運動を時々刻々追跡する手法を用いて周期性波動場を取扱うときには、初期条件をどのように決めるかということが問題になる。本解析法では初期条件として静水状態を仮定し、解析領域の片側に設けた造波境界から波を発生させている。すなわち、水理実験をそのまま数値的にシミュレートするわけである。本論文では、このようないわゆる、2次元数値波動水槽の基本的な性能を検討するとともに、混成堤による反射の数値計算をもとに任意形状構造物に対する適用性を示す。

2. 基礎方程式と境界積分方程式

座標系を図-1のように定義し、造波境界 S_0 上で発生した波が、 x の正の方向へ伝播し、岸壁によって反射するものとする。流体を非圧縮、非粘性流体、流体運動を非回転と仮定し、速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ によって流体運動を記述する。 S_0 を岸壁から十分離れた位置に設定するとき、 ϕ に関する基礎方程式と境界条件は次のように表される。

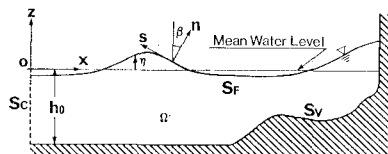


図-1 座 標 系

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_z = 0 \quad (\text{at } z = -h_0) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi_n = 0 \quad (\text{on } S_V) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\phi_n = -\phi_x = -U(z, t) \quad (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_n = \eta_t \cos \beta \quad (\text{on } S_F) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\phi_t + (1/2) \{ (\phi_n)^2 + (\phi_s)^2 \} + g\eta = 0 \quad (\text{on } S_F) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 x, z, t 等の添字はそれぞれによる偏微分を表す。 n, s, β は、図-1 に示すように、それぞれ境界面での外向き法線方向、接線方向および水面の勾配である。また、 $\eta(x, t)$ は、鉛直上向きを正としたときの平均水面からの水面変動量である。式(4)の U は、造波境界上で与えるクノイド波の水平水粒子速度で、ここでは Fenton⁴⁾ の理論解の3次オーダーまでを用いる。

ϕ が調和関数であることから、領域 Ω についてグリーン関数の公式を適用し、境界条件(2)~(5)を代入する。すなわち、点 $P(\xi, \zeta)$ 、 $Q(x, z)$ を境界上の点とすると次式が導かれる。

$$\phi(P) = -\frac{1}{\alpha^*(P)} \int_{S_F \cup S_0 \cup S_V} \phi G_n ds - \int_{S_F} \eta_t \cos \beta G ds + \int_{S_0} U G ds \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} G &= \ln(1/r) + \ln(1/r') \\ r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} \\ r' &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (z+\zeta+2h_0)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、点 P で境界線がなす内角を $\alpha(P)$ とするとき、 $\alpha^*(P) = \alpha(P)$ ($\zeta \neq -h_0$)、 $2\alpha(P)$ ($\zeta = -h_0$) である。

また、自由表面の圧力方程式(6)については、重み付き残差法を用いる。式(6)に式(5)を代入し、両辺に重み関数 w をかけ、 S_F 上で積分すると次式が得られる。

* 正会員 清水建設(株) 技術研究所海洋グループ

$$\int_{S_F} \omega \left[\phi_t + \frac{1}{2} \{ (\eta_t \cos \beta)^2 + (\phi_s)^2 \} + g\eta \right] ds = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(7), (9)を線形要素を用いて空間的に離散化し, さらに式(9)については Galerkin 法を適用すると, 節点上の ϕ (on S_F, S_G, S_V) および ϕ_t, η, η_t (on S_F) を未知数とする離散化方程式を得る。これについては, 前報で詳しく述べたので, ここでは省略する。

3. 逐次計算法

空間的に離散化した方程式を各時間ステップで解くためには, η と η_t, ϕ と ϕ_t の関係づけが必要になる。 n ステップにおける $\eta, \eta_t, \phi, \phi_t$ を1ステップ前の値のまわりで Taylor 展開し, η, ϕ の1時間ステップあたりの増分 $\Delta\eta, \Delta\phi$ で表すと, 次のようになる。

$$\eta^{(n)} = \eta^{(n-1)} + \Delta\eta^{(n)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\eta_t^{(n)} = 2\Delta\eta^{(n)}/\Delta t - \eta_t^{(n-1)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\phi^{(n)} = \phi^{(n-1)} + \Delta\phi^{(n)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\phi_t^{(n)} = 2\Delta\phi^{(n)}/\Delta t - \phi_t^{(n-1)} - 2\phi_s^{(n-1)}\Delta\eta^{(n)}/\Delta t - \Delta t\eta_t^{(n-1)}(\phi_{zt}^{(n-1)} + \eta_t^{(n-1)}\phi_{zz}^{(n-1)}) \quad \dots (13)$$

ただし, Δt は時間増分量である。式(13)の右辺第3項以降が, 節点の位置変動に対応する非線形項であり, これらの項を考慮することにより従来の解析手法⁵⁾に比べて精度を高めることができる。式(10)~(13)を離散化方程式に代入すると, 最終的に $\Delta\eta^{(n)}, \Delta\phi^{(n)}$ に関する連立方程式を得る。ただし, $\Delta\eta^{(n)}$ が未知数として連立方程式に取り込まれているため, n ステップでの境界形状がわからない。そこで本解析法では, 1ステップ前の境界形状を初期値として, 境界形状が収束するまで同一ステップで計算を繰り返す。

ここで, 式(13)に現れる ϕ_s 等の微係数の算定方法について述べる。まず, ϕ_s については, ϕ_n, ϕ_s を用いて次のように表される。

$$\phi_s = \phi_n \cos \beta + \phi_s \sin \beta \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)に運動学的条件(5)を代入すると, 次式を得る。

$$\phi_s = \eta_t \cos^2 \beta + \phi_s \sin \beta \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(15)において, η_t は式(11)より直接求められ, また ϕ_s は, その節点と両側節点の ϕ 値から, 差分法を用いて計算できる。ここで, ϕ_s の1時間ステップあたりの増分を $\Delta\phi_s$ とすると, $\Delta\phi_s^{(n)}$ は, Taylor 展開により次のように表すことができる。

$$\Delta\phi_s^{(n)} = \Delta t(\phi_{st}^{(n-1)} + \eta_t^{(n-1)}\phi_{stz}^{(n-1)}) + \dots \quad \dots\dots (16)$$

式(16)を式(13)に代入すると, 式(13)は結局次のように表される。

$$\phi_t^{(n)} = 2\Delta\phi^{(n)}/\Delta t - \phi_t^{(n-1)} - 2\phi_s^{(n-1)}\Delta\eta^{(n)}/\Delta t - \eta_t^{(n-1)}\Delta\phi_s^{(n)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで, $\Delta\phi_s^{(n)}$ は境界形状補正の繰返し計算の中で求め

る。すなわち, 同一ステップで m 回目の計算をする場合, $m-1$ 回目の計算値から式(15)を用いて $\phi_s^{(n)}$ を求めておき, $\Delta\phi_s^{(n)} = \phi_s^{(n)} - \phi_s^{(n-1)}$ として評価する。ただし, 1回目の計算ではこの項を無視する。

4. クノイド波の発生とその定常性

(1) 離散化パラメーターの選択

数値計算を行う上で, 離散化パラメーターである時間増分 Δt および要素長をどの程度にとればよいかが問題になる。前報では, 孤立波の波形保存性という観点から考察し, $\Delta t\sqrt{g/h_0} = 0.8, \Delta x/h_0 = 0.5$ (Δx は要素の x 軸の投影長さ) という目安を提案したが, これらのパラメーターに及ぼす波高水深比の影響についても考察する必要がある。そこで, 若干の理論的根拠のもとに, これらのパラメーターの選択方法を再検討する。ただし, 前報と同様に一定水深水路中を進行する波を検討の対象とする。

まず, Δx については, 無次元水位変動量 η/H_0 (H_0 は波高) の節点間の差 $\Delta\eta/H_0$ の最大値を規定することにする。いま, Taylor 展開の1次オーダーのみを考えると, これは次のように表せる。

$$(\Delta\eta/H_0)_{\max} = \Delta x(\eta_x/H_0)_{\max} = C_x \quad (\text{const.}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで, クノイド波の近似解であるハイパボリック波の第2次解⁶⁾を用いて $(\eta_x/H_0)_{\max}$ を求め, 式(18)に代入して整理すると, 次式が導かれる。

$$\frac{\Delta x}{h_0} = \frac{L_0}{4K h_0} \frac{C_x}{\gamma\sqrt{1-\gamma} \{1-A(1-2\gamma)\}} \quad \dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= (11A-3+\sqrt{41A^2+14A+9})/(20A) \\ A &= (3/4)\{1+(1/K)(H_0/h_0)\}(H_0/h_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし, L_0 は波長, K は, 第1種完全楕円積分である。

一方, Δt については, 無次元水位変動増分 $\Delta\eta/H_0$ の最大値を規定し, 次のように置く。

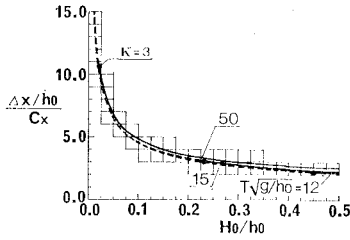
$$(\Delta\eta/H_0)_{\max} = \Delta t(\eta_t/H_0)_{\max} = C_t \quad (\text{const.}) \quad \dots (21)$$

Δx の場合と同じ手順を用いると, 最終的に次式を得る。

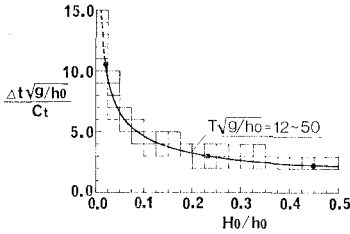
$$\Delta t\sqrt{\frac{g}{h_0}} = \frac{T\sqrt{g/h_0}}{4K} \frac{C_t}{\gamma\sqrt{1-\gamma} \{1-A(1-2\gamma)\}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし, T は波の周期である。図-2 は, $T\sqrt{g/h_0} = 12, 15, 50$ に関して式(19), (22)を示したもので, 横軸には波高水深比をとっている。また●印は, それぞれの波周期に対して $K=3$ となる, ハイパボリック波の適用限界を表しており, この限界を越える部分は破線で示してある。これらの図から, ハイパボリック波の適用可能領域では, 波周期はパラメーターの選択にほとんど影響がないのがわかる。

式(19), (22)の定数 C_x, C_t は積分方程式の空間的離



(a) $\Delta x/h_0$ と H_0/h_0 の関係



(b) $\Delta t\sqrt{g/h_0}$ と H_0/h_0 の関係

図-2 離散化パラメータの選択 (ハイパボリック波)

散化方法や時間に対するスキームのとり方によって異なると考えられる。そこで、前報で検討した結果をもとに、本解析法におけるこれらの定数値を決める。すなわち、 $H_0/h_0=0.3$ の孤立波に対して、 $\Delta t\sqrt{g/h_0}=0.8$ 、 $\Delta x/h_0=0.5$ として、式 (19), (22) より C_x 、 C_t を求めると、 $C_x=0.26$ 、 $C_t=0.19$ が得られる。

以上に述べた離散化パラメータの選択方法が妥当であるかを、一定水深水路中に発生したクノイド波の波形を理論解と比較することにより検討する。対象とした波浪諸元は表-1 に示すとおりで、 $T\sqrt{g/h_0}=15$ とし、 H_0/h_0 を変化させた 4 ケース、 $H_0/h_0=0.2$ とし、 $T\sqrt{g/h_0}$ を変化させた 4 ケースの合計 7 ケース (1 ケースは重複) である。ただし、 K が 3 を下回る場合は、離散化パラメータとして図-2 から得られる値よりも若干小さい値を採用した。水路長はいずれも $1.5L_0$ とし、造波境界 S_0 および水路端部の鉛直壁での要素数はいずれも 5 とした。また、Fenton の理論解において、 S_0 での水面変動量が 0 になるときを $t=0$ と設定し、このとき水路内は静水状態 ($\phi=\eta=0$) とした。

表-1 離散化パラメータの選択に関する計算条件

CASE	$T\sqrt{g/h_0}$	H_0/h_0	L_0/h_0	K	$\Delta x/h_0$	$\Delta t\sqrt{g/h_0}$
1	15	0.1	14.68	2.26	1.00	0.75
2		0.2	14.97	2.92	0.86	0.63
3		0.3	15.36	3.49	0.70	0.50
4		0.4	15.79	3.99	0.62	0.44
5	12	0.2	11.69	2.43	0.70	0.53
6	16		16.07	3.09	0.86	0.63
7	20		20.44	3.81	0.88	

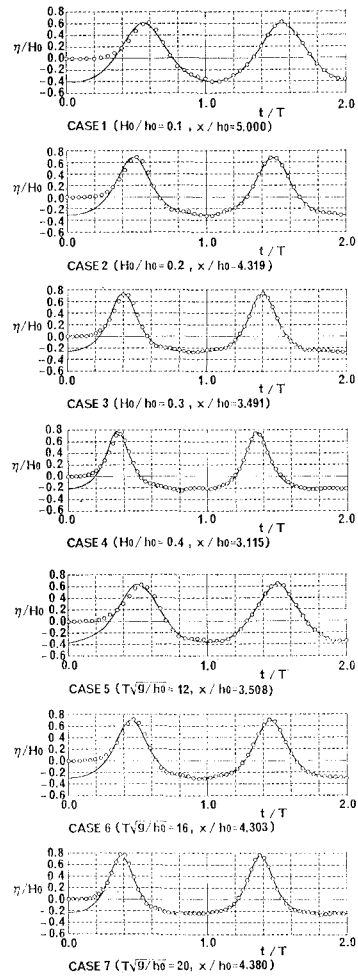


図-3 造波境界近傍での時間波形

図-3 は、 S_0 から 5 節点離れた位置における水面の時間変化を示したもので、実線が Fenton の第 3 次近似解、○印が本解析結果である。これらの図からわかるように、発生直後の波の峰は初期条件の影響を受けるが、第 2 波目の波の峰付近では、いずれのケースも理論解と良く一致している。したがって、先に述べた考え方に基づいてパラメータを選択することにより、十分妥当な結果が得られることがわかる。

(2) 鉛直壁への波のはい上がりと波圧

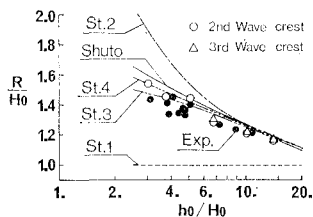
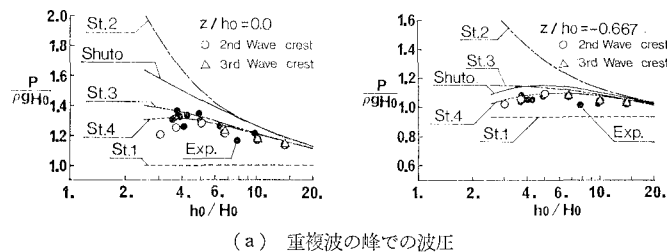
本解析法では、静水状態を初期条件としている関係上、発生直後の波は水路を伝播するに従って変形してしまう。このことは、水理実験を行うと同様、周期性の波を取扱う上で十分な注意を必要とする。そこで、 $1.5 \sim 2.0L_0$ の長さの一定水深水路を用い、水路右端に設けた鉛直壁への波のはい上がり高さや鉛直壁上の波圧を計算し、これを理論解、実験値と比較することにより、波の定常性について考察する。

表-2 鉛直壁による波の反射に関する計算条件

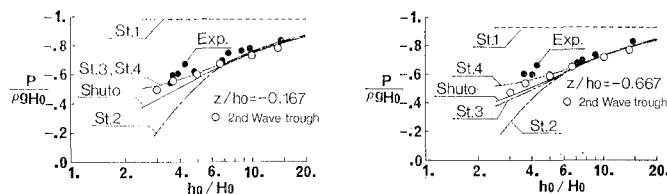
CASE	h_0/H_0	k	L_0/h_0	X_L/L_0	$\Delta x/h_0$	$\Delta t \sqrt{g/h_0}$
1	14.00	0.857	15.66	2.0	1.00	0.75
2	10.00	0.916	15.73			
3	6.67	0.963	15.88			
4	5.00	0.983	16.07	1.5	0.78	0.56
5	3.74	0.993	16.35	1.8	0.75	0.53
6	3.00	0.997	16.65	1.5	0.62	0.44

表-2 に計算条件を示す。ただし、 $T\sqrt{g/h_0}$ は16で一定としている。表中、 k は発生するクノイド波の母数、 X_L は水路長を表す。ここで、土屋ら⁷⁾によれば、 $k \geq 0.98$ の場合は隣接波の影響が無視できる。したがって、この条件を満たす CASE 4~6 については発生直後から波形が保存されると考えられるため、 k が 0.98 を下回る CASE 1~3 についてのみ第3波目の反射まで計算した。

図-4, 5 は、鉛直壁での波のはい上がり高さ R および重複波の峰、谷における壁面上の波圧 P を示したものである。ただし、 ρ は流体の密度である。図中、●印は土屋ら⁹⁾の実験結果、St. 1~St. 4 はストークス重複波の第1次から第4次までの近似解、Shuto は荻原⁹⁾の定常長波に対する第2次近似解である。また、○印、△

図-4 鉛直壁へのはい上がり高さ ($T\sqrt{g/h_0}=16$)

(a) 重複波の峰での波圧



(b) 重複波の谷での波圧

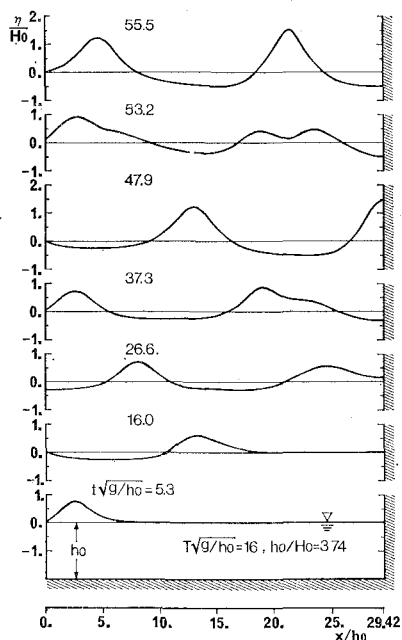
図-5 鉛直壁上の波圧 ($T\sqrt{g/h_0}=16$)

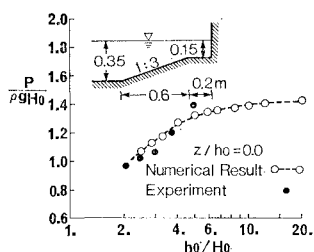
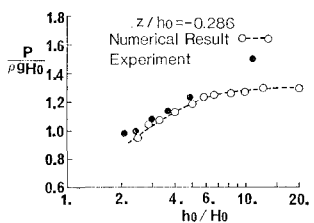
図-6 鉛直壁によるクノイド波の反射

印は本解析結果で、それぞれ発生後第2波目、第3波目に対応した計算値である。ただしこれらは、圧力方程式を用いて求めている。これらの図に示した理論解のうち、ストークス波の第3次および第4次近似解が全体的に実験値と良く適合しているが、本解析結果も実験値やこれらの理論解と比較的一致しているのがわかる。また、 k が 0.98 を下回る場合において、第2波目と第3波目の波の峰での結果にはほとんど差がない。したがって、このように k が 0.98 を若干下回る場合でも、水路の長さを2波長程度に設定すれば、第2波目以降の波は安定して伝播するものと考えてもよいであろう。

図-6 は、表-2 の CASE 5 について、空間波形の時間的な変化を示したものである。この場合、 $t\sqrt{g/h_0}=47.9$ で第2波目の波の峰が鉛直壁に到達し、 $t\sqrt{g/h_0}=55.5$ では鉛直壁前面に左右対称な重複波が形成されているのがわかる。

5. 混成堤に作用する波圧

本解析法の応用例として、混成堤による波の反射をとりあげ、合田ら¹⁰⁾の実験値と比較する。合田らは、直立堤および砕石マウンドの上に直立ケーソンを載せた混成堤を対象に、直立部での波圧を測定している。その結果、マウンドを設けた場合の直立部での波圧は、マウンド上の水深に対応する直立堤の波圧、あるいはマウンドを無

(a) $z/h_0=0.0$ (b) $z/h_0=-0.286$ 図-7 混成堤直立部に作用する波圧 ($T=2.007$ sec)

視した直立堤の波圧のいずれよりも大きいことを確認している。このことは、マウンドの長さや形状が、波の反射とそれに伴って発生する波圧に影響を及ぼすことを意味するものである。

図-7 は、マウンド上の直立部に作用する波圧に関して、数値解析結果を合田らの実験値と比較したものである。ただし、合田らが行った実験のうち最も周期の長い波の条件を対象にしている。なお計算では、造波境界からマウンド法先までの距離を約 1.5 波長とし、砕石マウンドの表面は不透過壁面と仮定した。また、発生後第 2 波目のはい上がり高さが最大になるときの波圧を計算結果とした。これらの図から、両者は非常に良く一致しているのがわかる。したがって、従来は模型実験からしか推定できなかった任意形状壁面への波のはい上がり高さ、作用する波圧、波力に関して、本解析法は実用上十分妥当な精度をもつ解を与えることができると考えられる。

6. おわりに

前報で提案した非線形波動問題に対する数値解析法

の、周期性波動場への適用について述べた。そして、離散化パラメータの選択方法を具体的に提案するとともに、鉛直壁によるクノイド波の反射の計算に基づき波の定常性に関して考察を加え、さらに任意形状壁面に対しても十分な精度が確保できることを示した。これら系統的な検討により、数値波動水槽という位置づけのもとに、より高い汎用性をもつ解析手法が確立できたものと言えよう。

なお、本解析法は、傾斜堤のように水面付近に斜面をもつ構造物には直接適用できない。これは、自由表面上の節点の変動方向をすべて鉛直方向に規定しているためであるが、これを任意の方向に設定することも、基本的に可能である。そしてそれにより、波の斜面へのはい上がり、言い換えれば自由表面の拡大、縮小現象にも対応できる。これについては、別の機会に発表する所存である。

参考文献

- 1) 合田良実・福森利夫：直立壁および混成堤直立部に働く波圧に関する実験的研究，港湾技術研究所報告，第 11 巻第 2 号，pp. 3~45, 1972.
- 2) 合田良実：防波堤の設計波圧に関する研究，港湾技術研究所報告，第 12 巻第 3 号，pp. 31~69, 1973.
- 3) 大山 巧：境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析，第 32 回海岸工学講演会論文集，pp. 555~559, 1985.
- 4) Fenton, J. D.: A high-order cnoidal wave theory, J.F.M., Vol. 94, pp. 129~161, 1979.
- 5) 例えば，Nakayama, T.: Boundary element analysis of nonlinear water wave problems, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19, pp. 953~970, 1983.
- 6) 岩垣雄一：クノイド波理論の実用化，1972 年度水工学に関する夏期研修会講義集，B-10，土木学会水理委員会，1972.
- 7) 土屋義人・安田孝志・武山保徳：相互干渉を無視した場合のソリトンスpekトルの理論，第 28 回海岸工学講演会論文集，pp. 89~93, 1981.
- 8) 土屋義人・山口正隆：有限振幅重複波に関する基礎的研究 (2)——せつ動解の適合性に関する実験——，京都大学防災研究所年報，第 12 号 B，pp. 607~631, 1969.
- 9) 首藤伸夫：有限振幅の定常長波，第 15 回海岸工学講演会講演集，pp. 212~219, 1968.