

Lagrange 表記に基づく表面波動の数値解析

西村 仁嗣*・武 若 聡**

1. 緒 言

昨今、水面波の数値解析が盛んに行われるようになり、とくに断面2次元の波動については採用される計算法も差分法¹⁾、FEM²⁾、BEM^{3),4)}等多岐に亘っている。これらの計算では支配方程式系の記述に Euler 座標系を用いるのが普通である。この場合、波動現象の解析において最も重要な意味をもつ表面近傍に計算誤差が集中する傾向があり、これが計算全体の精度ならびに安定性を損なう要因となる。本研究では支配方程式系を Lagrange 表記し、表面条件のとり扱いの精度を高めることを意図して断面2次元の表面波動の数値解析を試みた。

Lagrange 流の考え方に基づく流体運動の計算は過去にいくつか行われているが^{5),6)}、これらの研究に続報がないのはそこに根本的な困難さが潜在するためと思われる。とくに大きな技術上の問題としては

- (1) 基礎方程式が時間に関して2階の微分項を含むために2重の積分が必要となること、
- (2) 流体粒子位置算定のために流速の各方向成分を同一点で計算する必要があり、適切な格子計画がとり難いこと、

の2点があげられる。本論文ではこれらの問題点解決の可能性が模索される。

2. 支配方程式の Lagrange 表記

水面波動を非圧縮性流体の非回転運動としてとり扱う。いま、鉛直2次元の波動を考え、物理平面内に固定された座標系として水平方向に X 軸、鉛直方向に Y 軸をとる。ある流体粒子の位置ベクトルを $\mathbf{Z}(X, Y)$ 、速度ベクトルを $\mathbf{W}(U, V)$ と書けば、Lagrange 座標系で運動方程式および連続式はつぎのように記述される。

$$X_{tt} \cdot X_a + (Y_{tt} + g) \cdot Y_a = -P_a \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$X_{tt} \cdot X_b + (Y_{tt} + g) \cdot Y_b = -P_b \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_a \\ \mathbf{Z}_b \end{pmatrix} = \left| \frac{\mathbf{Z}_a}{\mathbf{Z}_b} \right| = J \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに t は時間、 g は重力加速度、 (a, b) は流体粒子を

識別する Lagrange 変数の組であり、添字は偏微分を表すものとする。 J は時間によらない関数である。また、 P は流体の密度で除した圧力である。

式(1)、(2)から P を消去し、 t で1回積分すると

$$\mathbf{Z}_{at} \cdot \mathbf{Z}_b - \mathbf{Z}_{bt} \cdot \mathbf{Z}_a = C \quad \dots\dots\dots (4)$$

を得る。これは渦度の保存を示す式であり、 C もまた時間によらない関数である⁷⁾。上式に

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{W} \quad \dots\dots\dots (5)$$

の関係を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{W}_a \cdot \mathbf{Z}_b - \mathbf{W}_b \cdot \mathbf{Z}_a = C \quad \dots\dots\dots (6)$$

一方、(3)式を t について偏微分すると

$$U_a \cdot X_b - U_b \cdot X_a + V_a \cdot Y_b - V_b \cdot Y_a = 0 \quad \dots\dots (7)$$

を得る。

非圧縮性流体の非回転運動を記述する方程式系は、式(5)、(6)および(7)に適当な初期条件および境界条件を加えることにより構成される。

以下においては、Lagrange 変数として基準時刻 $t=0$ における粒子の座標 (X, Y) をとることにする。

一般に運動学的境界条件として、ある境界上の流体粒子は、常にその境界上に存在することが要求される。仮に境界形状が曲線で与えられ、あるいはそれが時間的に変動する場合でも、本計算では (a, b) 座標系の任意性を利用して比較的容易にこれに対処することができる。境界に沿ってとられた a もしくは b の一定値に対して、物理座標 X, Y による境界形状の表記そのものが、これらの未知量の満たすべき条件式となる。

自由表面では外的な拘束がないので、上記のような条件は与えられないが、力学的な境界条件が課される。初期水面が静水面であったとすれば、水表面上の流体粒子は $b=b_0=\text{const.}$ で表現され、自由表面の条件は $P|_{b=b_0}=\text{const.}$ で与えられる。したがって、式(1)より、 $b=b_0$ で $U_t \cdot X_a + (V_t + g) \cdot Y_a = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$ となる。

Euler 座標系で同じ問題を定式化すると、自由表面での2つの境界条件は、よく知られているようにともに非線形となる。これに対して Lagrange 座標系での表面条件は式(8)のみであり、大幅に簡単化されている。水面波動においては表面近傍の水理が現象全般を支配する

* 正 会 員 工 博 筑波大学助教授 構造工学系

** 学生会員 筑波大学大学院 工学研究科

ので、表面条件のとり扱いを容易とすることは解析に際して大いに有利である。しかしながら、非圧縮、非回転の条件式は Euler 座標系におけるよりもむしろ複雑であり、水粒子の位置が変数となるために方程式系が時間に関して2階となる。これらの点は数値解析の困難さをもたらす、ならびに精度低下の原因ともなり得よう。

式(5)~(8)に基づいて解析を進めれば、圧力は陽に現われず、 Z および W が与えられた後、式(1)および(2)から算定される。

3. 数値計算の方法

前章で示した方程式系を時間発展的な境界値問題として解くためには、一般に数値計算が必要となる。ここでは、支配方程式系の直接差分による数値計算の方法について説明する。

3.1 計算点配列

数値計算を行うに当たり、 W および Z を時間的、空間的に離散化する必要がある。図-1に示すように初期空間 (a, b) において方形格子を設定し、各格子点で W , Z を定義することにより空間的な離散化を行う。以下においては、便宜上 a, b 方向の格子間隔 $\Delta a, \Delta b$ を等しくとることにする。

時間的には中央差分を用いる。

$$Z^{l+1} = Z^l + W^{l+1/2} \Delta t \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 Δt は時間刻み、 l 等は計算ステップ番号を表す。

通常の数値計算では、staggered scheme を用いることにより支配方程式、および拘束条件の合計数と未知数の個数を合理的に一致させることが可能である。各計算セルの中心を節点とし、その各辺を横切る形態の管路網で流れの場を近似するとき、staggered scheme における計算点配列はこのモデルの適切な表現となっている。これに対して Lagrange 座標系では、流体粒子の変位と流速が式(5)で直接的に関連付けられ、同一点で計算され

る。このような計算点配列では方程式と未知数の個数を一致させることが困難である。この場合には、上述のような線状の物理モデルは介在し得ず、離散化された諸量は単に連続的な流速および圧力の分布を代表するものとなる。そこでは近接する計算値間に大きな変動は本来許されないもので、一部の条件式あるいは計算点を除外することが計算結果に大きく影響することはないものと思われる。

3.2 方程式系の差分表示

流体の非圧縮性を考えると、各計算セルの面積は変形後も一定に保たれていなければならない。セルの面積は、図-1中の格子点番号を用いて

$$A = \frac{1}{2} \{ (X_3 - X_1) \cdot (Y_4 - Y_2) - (X_4 - X_2) \cdot (Y_3 - Y_1) \} \quad \dots\dots\dots (9)$$

のように表わされる。1ステップの流体運動による面積の変化率は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{A^{l+1} - A^l}{\Delta t} &= \{ (U_3^* - U_1^*) \cdot (Y_4 - Y_2) + (V_4^* - V_2^*) \cdot (X_3 - X_1) \\ &\quad - (U_4^* - U_2^*) \cdot (Y_3 - Y_1) - (V_3^* - V_1^*) \cdot (X_4 - X_2) \} \\ &\quad + \{ (U_3^* - U_1^*) \cdot (V_4^* - V_2^*) \\ &\quad - (U_4^* - U_2^*) \cdot (V_3^* - V_1^*) \} \Delta t \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに、 $*$ はステップ $l+1/2$ の時刻における値を表わす。 $\{ \}$ で括られた第1項は式(6)を図-1のセルについて直接差分表示したものに符合し、第2項は時間ステップのずれに応じた補正項である。実際の計算においては、流体運動の連続性を表わす条件式として、式(10)で Δt のオーダーの項を省略し、前ステップまでに累積した面積の誤差を補正する項を付加した次式を用いる。

$$\begin{aligned} &\{ (U_3^* - U_1^*) \cdot (Y_4 - Y_2) + (V_4^* - V_2^*) \cdot (X_3 - X_1) \\ &\quad - (U_4^* - U_2^*) \cdot (Y_3 - Y_1) - (V_3^* - V_1^*) \cdot (X_4 - X_2) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{A^l - A^0}{\Delta t} = 0 \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

流体運動の非回転性を表わす条件式は、式(6)を直接差分表示することにより

$$\begin{aligned} &(U_3^* - U_1^*) \cdot (X_4 - X_2) - (U_4^* - U_2^*) \cdot (X_3 - X_1) \\ &\quad + (V_3^* - V_1^*) \cdot (Y_4 - Y_2) - (V_4^* - V_2^*) \cdot (Y_3 - Y_1) \\ &\quad = 0 \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

と書かれる。

運動学的な境界条件は、流速について見ると、壁面に対して垂直な流速成分を0とすることによって満たされる。壁面と底面の接合する隅点はよどみ点となる。

表面の力学的な境界条件は、図-1中の番号を用いて表すと

$$\begin{aligned} &(U_0^* - U_0) \cdot (X_2 - X_1) + (V_0^* - V_0 + g \Delta t) \cdot (Y_2 - Y_1) \\ &\quad = 0 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となる。

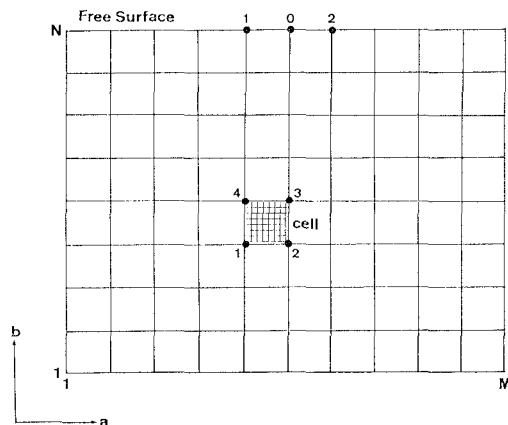


図-1 計算格子

式 (11), (12) および (13) から流速 W^* を定めれば, 式 (8) から新たな粒子位置 Z を算定し, さらに計算を進めることができる. ここでは, W^* に関する線形な連立方程式系を式 (11), (12), (13) および固定境界における流速の境界条件式で構成した. このとき, 前項の考察に基づき, 表面と壁面の接合点における表面条件を除外することによって未知量 W^* と拘束条件の数を一致させた. 上記方程式系の W^* に対する係数行列は sparse な高次行列であり, 本計算では比較的低次であるために掃き出し法によってこれを解いた.

4. 計算例

前章で述べた数値モデルの妥当性を検討するために, 方形の貯水タンクを振動させたときに生じる内部流体の共振波動の数値解析を試みた. タンクとともに変位する移動座標系 (X, Y) を採用するならば, 側方境界は $X = \text{const.}$ で示され, 表面条件式 (13) には交番的な外力,

$$-A_0\omega^2 \sin \omega t$$

が追加される. ここに, A_0 はタンクの振幅, ω は振動の角周波数である.

幅 1 m のタンクを考え, 静水深を 0.6 m, 外力の周期を微小振幅重複波の発生を仮定した場合の共振周期 $T=1.159$ sec, タンクの振幅を $A_0=0.005$ m とする. 計算格子間隔は, $\Delta a=\Delta b=0.05$ m, 時間間隔は $\Delta t=T/100$ にとった. 図-2 は, 側壁位置における水位変化の計算結果を高山の解析解⁸⁾と比較したものである. ただし, 計算結果は $4\Delta t$ 毎にプロットされている. 最初

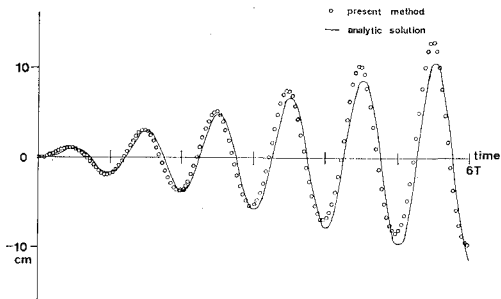


図-2 水位の時間変動 (1)

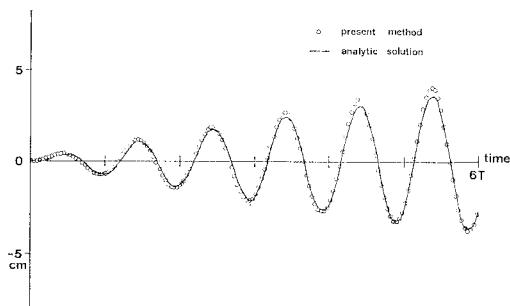


図-3 水位の時間変動 (2)

の数波についてはほぼ満足すべき結果と言えるが, その後計算上の水位変動が時間的に徐々に早まる傾向が認められる. すなわち, 内水の波動周期がタンクの振動周期と一致していないことになる.

Nakayama ら⁹⁾は境界要素法によって全く同様の数値解析を行なっているが, そこでは上記のような傾向は報告されていない. そこで, 同一条件の sloshing 現象に本計算法を適用したところ, 図-3 の結果を得た. この場

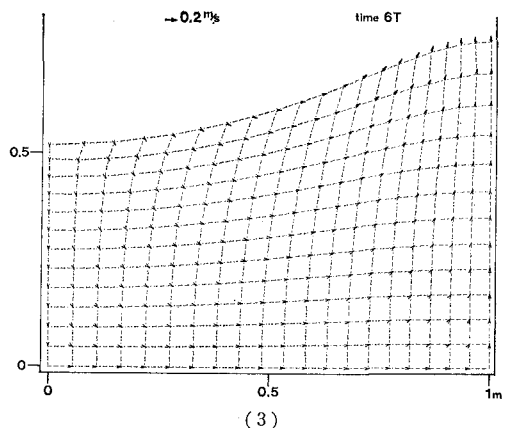
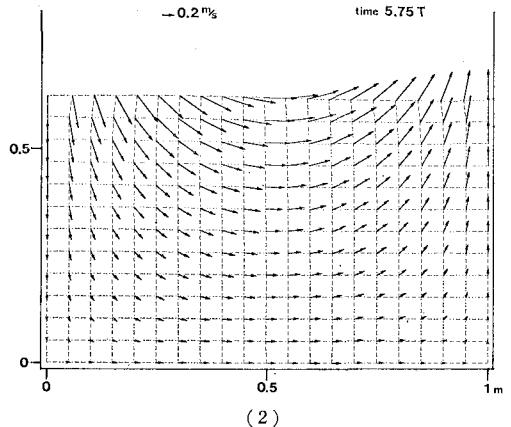
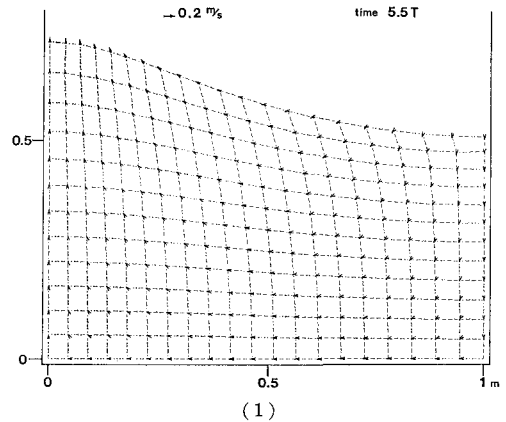


図-4 内部流速分布

合, タンクの幅は 0.9 m, 静水深は 0.6, 振動周期は共振周期よりも僅かに長い 1.14 sec, 振幅は 0.002 m であるが, 解析解との間に顕著な差異は見られない。しかし, タンクの振動周期を共振点に近づけて計算を行うと, やはり波動の時間的なずれが生じることから, これが共振時に特有の結果であることがうかがわれる。ただし, その直接的な原因については目下のところ不明である。

図-4 は, 計算された流体要素の変形と内部流速の分布を例示したものである。かなり発達した重複波について, 滑らかな格子変形と流速の場が得られている。

5. 陽解法の検討

ここで提示した計算方法は, Euler 流の表記に基づく差分解法に比して様々な利点を有するが, その最大の難点は計算量の大きさにある。前節の試算には筑波大学学術情報処理センターの計算機 M-380 を用いたが, 格子点数約 270, ステップ数 600 の計算にすでに数分を要しており, 実用段階ではかなり膨大な演算を行うことになる。演算時間の短縮に向けて, 陽的な解法の導入が望まれる。

Lagrange 流の考え方に立つ数値解析に緩和法を適用した例はいくつか見られるが^{6), 7)}, いずれの場合にも十分満足な成果をあげるには至っていない。この種の計算においては, 座標軸に対して斜交する行列上の計算点間には秩序が保たれるものの, 隣接点の計算値相互間に不整合もしくはカップリングが生じ勝ちである。これは基本式 (11) および (12) の差分形態からも予想されるところであり, 計算の過程で累積する残差と共に不安定な誘起する大きな要因となる。こうした計算上の障害を除去するためには, 何らかの平滑化操作と, これに伴う数値粘性の解消策の研究が必要である。

6. 結 語

以上の各節において, Lagrange 表記に基づく 1 つの数値解析手法が提示され, その流れの場への適用性が検

討された。得られた結論を要約すると次の通りである。

- (1) この計算手法は任意形状の移動境界あるいは固定境界における境界条件の取り扱いの容易さと精度の面で優れている。
- (2) 2 重の積分を行うことによる計算精度の低下, および計算 scheme 上の問題点はいずれもある程度克服することが可能である。
- (3) 計算所要時間の節減に向けて, 今後, 安定な陽解法の開発が望まれる。

最後に, 研究の初期の段階で貴重な助言を頂いた東北大学京藤敏達助手に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Hirt, W. C. and B. D. Nichols: Volume of Fluid (VOF) Method for the dynamics of free boundaries, J. Comp. Phys., Vol. 5, pp. 201~225, 1981.
- 2) 滝川 清・岩垣雄一・中川政博: 有限要素法による斜面上の碎波変形と内部機構の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 20~24, 1983.
- 3) Longuet-Higgins, M. S. and E. D. Cokelet: The deformation of steep surface waves on water, A Numerical Method of Computation, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 350, pp. 1~26, 1976.
- 4) 中山 司: 非線形造波問題の境界要素解析, 数理科学, pp. 53~58, 1982.
- 5) Hirt, W. C., J. L. Cook and T. D. Butler: A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface, J. Comp. Phys., Vol. 5, pp. 103~124, 1970.
- 6) Brennen, C.: Some Numerical solution of unsteady free surface wave problems using the Lagrangian description of the flow, Lecture Notes in Physics, 8, pp. 403~409, 1970.
- 7) 今井 功: 流体力学 (前編), 裳華房, 428 p., 1973.
- 8) Takayama, T.: Theory of transient fluid waves in a vibrated storage tank, Report of Port and Harbour Res. Inst., Vol. 15, No. 2, pp. 3~53, 1976.
- 9) Nakayama, T. and K. Washizu: The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 17, pp. 1631~1646, 1981.