

ソリトン変形に及ぼす風の影響

筒井 茂 明*

1. 緒 言

浅海波に作用する風の応力は、表層流による砕波波高、砕波点の移動¹⁾、あるいは強風時での吹送流の発生など水理特性に影響を及ぼす。海岸構造物に対する設計波は通常強風時の波浪であるから、この風の影響について十分留意すべきである。しかし、その評価に適する波動理論は確立されておらず、未知な面が多々存在する。

本研究では、その第1歩として、波の非線形性および分散性と風の応力、海底摩擦および粘性項とが平衡状態にある場合の浅海長波の方程式を導き、次いで、差分法による数値シミュレーションを行ない、その結果に基づきソリトンの伝播変形に及ぼす風の影響、特に、波形、波高、砕波水深などの基本水理量の変化特性を調べる。

2. 風の影響を考慮した浅海方程式^{a)}

静水面上に原点をおく座標系 (x, z) を採り、時間を t とすると、連続方程式、運動方程式および境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_x + w_z &= 0, \\ u_t + uu_x + wu_z &= -p_x + R^{-1}\nabla^2 u, \\ w_t + uw_x + ww_z &= -1 - p_z + R^{-1}\nabla^2 w, \\ \eta_t + u\eta_x - w &= 0 \quad z \doteq \eta, \\ uh_x + w &= 0 \quad z \doteq -h, \\ p_a &= p - \frac{2\{w_x - (u_x + w_x)\eta_x + u_x\eta_x^2\}}{R(1 + \eta_x^2)} \quad z \doteq \eta, \\ \tau_a &= \frac{(u_x + w_x)(1 - \eta_x^2) - 2(u_x - w_x)\eta_x}{R(1 + \eta_x^2)} \quad z \doteq \eta, \\ \tau_b &= \frac{(u_x + w_x)(1 - h_x^2) + 2(u_x - w_x)h_x}{R(1 + h_x^2)} \quad z \doteq -h. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 (u, w) : 水粒子速度の (x, z) 成分、 η : 水面変位、 h : 水深、 p : 圧力、 τ : 接線応力、 $R = h_0\sqrt{g h_0}/\nu$ 、 ν : 水の動粘性係数、 ∇^2 : Laplacian であり、添字 t, x, z は偏微分を表わす。また、海面および海底で生じる境界層厚は水深に比べて十分薄いと仮定しており、対応する諸量には添字 a, b が付されている。

ここで、波動運動における水平方向の代表長 l を用いた微小パラメータ $\varepsilon = (h_0/l)^2$ により移動座標系

$$\xi_1 = \varepsilon^{1/2} \left\{ \int h^{-1/2} dx - t \right\}, \quad X = \varepsilon^{3/2} x \quad \dots\dots (2)$$

および次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \varepsilon \bar{u}, \quad w = \varepsilon^{3/2} \bar{w}, \quad \eta = \varepsilon \bar{\eta}, \quad p = -z + \varepsilon \bar{p}, \\ p_a &= \varepsilon \bar{p}_a, \quad \tau_{a,b} = \varepsilon^{5/2} \bar{\tau}_{a,b} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

さらに、これらを摂動展開 ($\bar{u} = u_1 + \varepsilon u_2 + \dots$, etc.) し、 $\sqrt{\varepsilon} R = O(1)$ と仮定することにより式 (1) から得られる方程式を原変数で表示すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \eta_x + \frac{3}{2} h^{-3/2} \eta \eta_\xi + \frac{1}{6} h^{1/2} \eta_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{4} h^{-1} h_x \eta \\ = \frac{2}{R} h^{-3/2} \eta_{\xi\xi} - \frac{1}{2} h^{-1/2} p_{a\xi} + \frac{1}{2} h^{-1} (\tau_a - \tau_b) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} u &= h^{-1/2} \eta, \quad w = -(1 + z/h) \eta_\xi, \quad p = -z + \eta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$\xi = \int h^{-1/2} dx - t \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり、圧力は水面勾配に、空気流をポテンシャル流で近似すると接線応力は水面変位にそれぞれ比例し、式 (4) 右辺の外力項は次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} p_a &= \sigma_p \eta_\xi, \quad \tau_a - \tau_b = \sigma_\tau (1 + \delta_1 \eta) - s u |u|, \\ \sigma_p &= C_s (\rho_a / \rho) (W_a - c)^2, \\ \sigma_\tau &= (1 + m_b) C_a (\rho_a / \rho) W_a^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 ρ_a : 空気の密度、 C_s : 遮蔽係数、 C_a : 海面摩擦係数、 s : 海底摩擦係数、 W_a : 風速、 m_b : 海底摩擦力が海面摩擦力に及ぼす影響の程度を示す係数、 δ_1 : 海面摩擦力の分布係数である。

海面摩擦力の平均応力は主に海水の平均流に、変動成分は表層流の生成にそれぞれ寄与する²⁾と考えられるので、ここでは変動成分のみを対象とする。したがって、式 (7) の第2式は次式となる。

^{a)} 全物理量は、座標原点での水深 h_0 、重力加速度 g 、水の密度 ρ を用いた基準長 h_0 、時間 $\sqrt{h_0/g}$ 、速度 $\sqrt{g h_0}$ および応力 $\rho g h_0$ による無次元量である。

$$\tau_a - \tau_b = \delta_1 \sigma \eta - s h^{-1} \eta |\eta| \dots\dots\dots (8)$$

さらに, 変換式

$$\eta = -6h^2 \zeta, \quad \tau = (9/2) \int h^{1/2} dx, \quad \sigma = 3\xi \dots\dots (9)$$

を用いると, 摂動項をもつ Korteweg-de Vries (P-KdV) 方程式として次式が得られる.

$$\zeta_t - 6\zeta\zeta_\sigma + \zeta_{\sigma\sigma} = \varepsilon_1 \zeta + \varepsilon_2 \zeta_{\sigma\sigma} + \varepsilon_3 \zeta |\zeta| \dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -(9/4)h^{-1}h_\tau + (1/9)\delta_1\sigma_\tau h^{-3/2} \\ \varepsilon_2 &= (4/R)h^{-2} - \sigma_\tau h^{-1} \\ \varepsilon_3 &= -(2/3)s h^{-1/2} \operatorname{sgn} \zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

なお, 分布係数 δ_1 は, 上述のポテンシャル近似では周期波の場合には波数の2倍であるから, ソリトンに対してはその波高を H とすると次式で与えられる.

$$\delta_1 = \sqrt{3H} \dots\dots\dots (12)$$

3. 差分スキーム

式 (10) の差分法による数値計算では, 初期波形

$$\left. \begin{aligned} \eta &= H_0 \operatorname{sech}^2 \sqrt{3H_0/4}(x - ct) \\ c_0 &= 1 + H_0/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

を与え, 初期波の波高 H_0 , 見かけの周期 T_0 を用いて波高および周期がともに1となるように正規化を行って差分計算を行った. ただし, 見かけの周期はソリトン幅に対して十分大きくし, この影響が差分計算に及ばないよう留意した. 差分スキームは, 左辺 KdV 項に対しては Fromm の形式である Zubusky³⁾ の差分スキーム, 右辺各項は陰の差分スキームとし, Burgers 項には中心差分を用いた. 差分スキームの安定性については, 次式で与えられる von Neumann の必要条件⁴⁾を満たしている.

$$|\text{増幅係数}| \leq 1 + O(\Delta\tau) \dots\dots\dots (14)$$

上式は通常条件と $O(\Delta\tau)$ の項だけ異なるが, 式 (10) の右辺に ζ が含まれているため解は指数関数的に増加する傾向をもっている. したがって, 安定条件として上式を用いれば, このような特性をもつ解を含むことができる.

4. 逆散乱法による漸近解

P-KdV 方程式 (10) に対して各種の方法で解が求められているが, ここでは逆散乱法 (I.S.T.) による Karpman ら⁵⁾ の諸結果を適用する. 式 (10) の解を次式で仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \zeta(\sigma, \tau) &= -2\kappa^2(\tau) \{\operatorname{sech}^2 \vartheta + \omega(\vartheta, \tau)\} \\ \vartheta &= \kappa(\tau) \{\sigma - \theta(\tau)\}, \quad \theta(0) = 0, \quad \omega(\vartheta, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに, θ は位相であり, ω は式 (10) 右辺の摂動項により付加される波動解で, 波峯の後方で生じる水位上昇 (plateau) および振動的な tail を表わしている. 波高増幅率を支配する κ に対する方程式は次式となる.

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = \frac{2}{3}\varepsilon_1\kappa - \frac{8}{15}(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)\kappa^3 \dots\dots\dots (16)$$

後述するように, tail の波高に及ぼす影響は無視できるので, 式 (9) および (15) から波高は次式で近似される.

$$H \doteq 12\kappa^2 h^2 \{1 + \omega(0, \tau)\} \dots\dots\dots (17)$$

いま, 一定勾配 m の海底地形 ($h = 1 - mx$) を考えると

$$\varepsilon_1 = \{m/2 + (2/3)\sigma_\tau h\kappa\} h^{-3/2} \dots\dots\dots (18)$$

となり, 式 (16) は次式のように変形される.

$$\frac{d\kappa}{dh} = -\frac{3}{2}h^{-1}\kappa - \frac{2\sigma_\tau}{m}\kappa^2 + \frac{12}{5m}\left(\frac{4}{R}h^{-3/2} - \sigma_\tau h^{-1/2} + \frac{4}{3}\right)\kappa^3 \dots\dots\dots (19)$$

plateau 高 $\omega^{(p)}$ および tail $\omega^{(t)}$ は

$$\lambda = 8\kappa^2\tau, \quad y = 2\kappa\sigma/(3\lambda)^{1/3} \dots\dots\dots (20)$$

とおくとそれぞれ次のようになる.

$$y \gg (3\lambda)^{2/3}:$$

$$\omega^{(p)} \sim -\frac{\varepsilon q}{2} \int_{-\infty}^y Ai(y) dy \sim -\frac{\varepsilon q}{2} \dots\dots\dots (21)$$

$$y < 0, \quad |y| \gg (3\lambda)^{2/3}:$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(t)} &\sim \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda p}} \frac{e^{-p\pi}}{1+p^2} \left\{ \varepsilon q - \frac{4}{15}(3\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \frac{p^2}{\kappa} \right\} \\ &\quad \times \cos\left(2\lambda p^3 + \frac{\pi}{4} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{p}\right), \\ p &= \{2\kappa|\sigma|/(3\lambda)\}^{1/2}, \quad \sigma < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ただし, $Ai(y)$ は Airy 関数であり,

$$\varepsilon q = -\frac{\varepsilon_1}{3\kappa^3} - \frac{4}{15\kappa}(2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \dots\dots\dots (23)$$

である. また, ソリトンの主峯における ω は

$$\omega(0, \tau) = \varepsilon q/2 \dots\dots\dots (24)$$

となる. $\tau = 0$ で $\kappa = \kappa(0)$ とすると初期波高は

$$H_0 = 12\kappa^2(0) \dots\dots\dots (25)$$

であるから, 波高増幅率は次式で与えられる.

$$H/H_0 = h^2 \{\kappa/\kappa(0)\}^2 (1 + \varepsilon q/2) \dots\dots\dots (26)$$

上式および式 (21) から, ソリトンの波高増幅率に対して plateau の影響を考慮しなければならないことが判る.

以上の漸近解の適用範囲は次式で与えられる.

$$\tau_s \ll \tau \sim \tau_p \dots\dots\dots (27)$$

ここに, $\tau_s = \{2\kappa(0)\}^{-3}$ はソリトン時間⁶⁾と呼ばれ, ソリトンがその幅に相当する距離を通過するに要する時間スケールを表わす. また, $\tau_p = |\varepsilon q \kappa^3(0)|^{-1}$ は摂動によりソリトンに plateau, tail などの重要な変形が生じるまでの時間スケールである.

ソリトン時間に相当する水深 h_s は

$$h_s = \{1 - \sqrt{3} m H_0^{-3/2}\}^{2/3} \dots\dots\dots (28)$$

b) 式 (10) において τ は空間座標であるから, ソリトン幅に相当する時間内の伝播距離を表わすが, ここでは同じ名称を用いる.

与えられるので、条件式 (27) は次式となる。

$$h \ll h_s \dots\dots\dots (29)$$

5. 数値計算結果

まず、水深変化のみを考えた場合のソリトン変形の基本特性および差分計算結果の妥当性について検討する。

図-1 は海底勾配 $m=1/50$ の海岸での時間波形の空間変化を初期波形から砕波点まで示している。なお、砕波点は主峯の移動速度と水平水粒子速度を用いて Rankine-Stokes の砕波条件により定めた。小振幅の tail が最初に発生し、図中に矢印で示されたソリトン時間付近から plateau の形成が始まり、砕波点近くでは plateau が明瞭に現われている。また、tail はその位相速度が小さく、伝播とともに主峯から遅れ、ソリトンの波高算定には tail の影響は無視できることが判る。

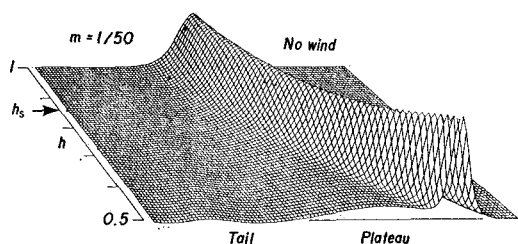


図-1 無風時のソリトン波形 ($H_0=0.3$)

無風時の場合には、逆散乱法による式 (19) の解は、

$$\left. \begin{aligned} \kappa/\kappa(0) &= h^{-3/2} G(h)^{-1/2} \\ G(h) &= 1 + \frac{96}{5} \frac{\kappa^2(0)}{m} \left\{ \frac{1}{R} f\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{3} s f(2) \right\} \\ f(a) &= (h^{-a} - 1)/h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

となり、次式が得られる。

$$H/H_0 = (1 + \varepsilon q/2)/h \dots\dots\dots (31)$$

$$\varepsilon q = -4\sqrt{3} m H_0^{-3/2} G^{3/2} h^3 \dots\dots\dots (32)$$

$H_0=0.3$, $m=1/50$ のときの波高増幅率は図-2 のようになる。波高は初期には $h^{-1/4}$ に、途中から h^{-1} に比例して増大している。この結果は Camfield ら⁶⁾の実験式とほぼ一致しており、差分計算結果は妥当であると考えられる。逆散乱法による式 (31) で $G=1$ の場合が $h < h_s$ の範囲で併記されているが、波高増幅率の増加割合が若干大きくなっている。

図-3 は plateau 高の変化

$$H_p/H_0 = -(\varepsilon q/2)/h \dots\dots\dots (33)$$

を示すもので、描点は差分計算波形において plateau が明瞭に形成されている地点での値である。逆散乱法による上式は、 εq を沖側で過大に、岸側で過小に評価する傾向をもっており、その結果、図-2 に示されているように砕波点付近での波高増幅率は少し大きい値となる。

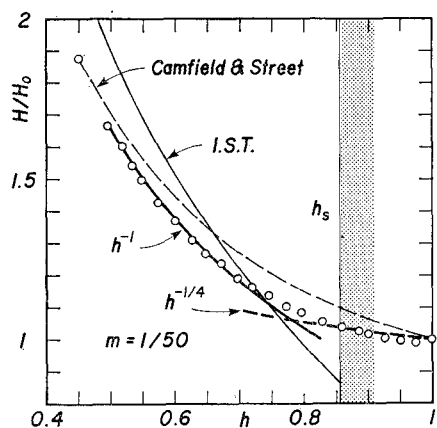


図-2 無風時のソリトンの波高増幅率 ($H_0=0.3$)

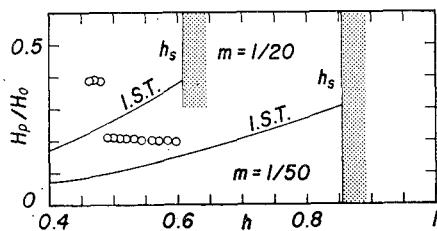


図-3 無風時の plateau 高の変化 ($H_0=0.3$)

なお、安田ら⁷⁾も $m=1/50$ に対して同様の計算例を示しているが、逆散乱法による上述の結果とほぼ一致している。また、式 (32) 中の $m H_0^{-3/2}$ は安田らのパラメーター λ である。

次に、図-4 は $m=1/20, 1/50$ に対して風の応力を考慮した場合の波高増幅率を示すものである。ただし、 $R=5 \times 10^7$, $s=0.02$ であり、風の応力は $\sigma_p/\sigma_r \doteq (1+m_0)^{-1} \cdot (C_s/C_a)$ となること、および通常 C_s は C_a の 10 倍程度であるとされていることから、 $\sigma_p/\sigma_r=5, 10, 15$ とし、 $\sigma_r/s=0.02 \sim 0.5$ の範囲とした。また、初期波高は $H_0=0.3$ である。

図-2 と同様に逆散乱法による式 (19) を数値積分した結果がソリトン時間以後について細い実線で示されている。○印は砕波点である。全般的傾向として、風の応力の増加とともにソリトンの波高は無風時の波高よりかなり増大し、その増加割合は緩勾配斜面ほど大きいことが判る。また、緩勾配斜面ほど風の応力の効果が顕著に現われ、ソリトンが砕波しやすいことを示している。式 (11) の σ_p, σ_r の係数を比べれば判るように、水深が浅くなると圧力よりも接線応力が卓越する。さらに、式 (10), (11) から圧力は主峯近くではサクションとして作用している。したがって、砕波には表層流モデル¹⁾と同様に接線応力の寄与が大きいことがわかる。

これらのソリトン波形は図-1 と同様の特性をもっているが、ソリトン時間に達する前に砕波する場合には、

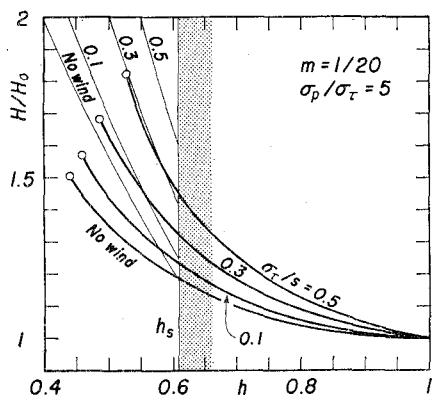
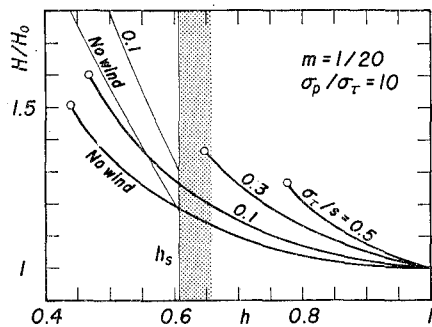
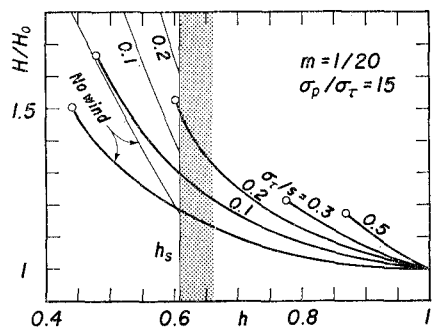
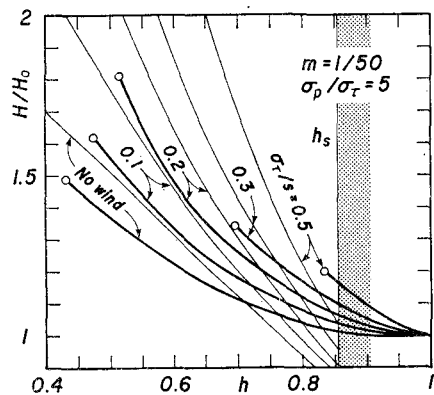
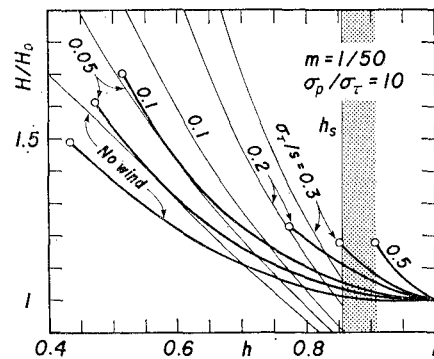
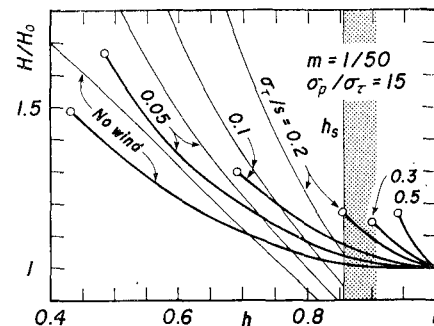
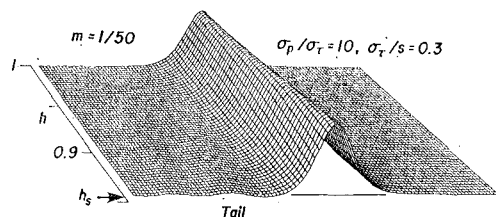
(1) $\sigma_p/\sigma_\tau=5$ (2) $\sigma_p/\sigma_\tau=10$ (3) $\sigma_p/\sigma_\tau=15$ 図-4.1 ソリトンの波高増幅率 ($m=1/20$, $H_0=0.3$)(1) $\sigma_p/\sigma_\tau=5$ (2) $\sigma_p/\sigma_\tau=10$ (3) $\sigma_p/\sigma_\tau=15$ 図-4.2 ソリトンの波高増幅率 ($m=1/50$, $H_0=0.3$)

図-5 に例示するように tail の発生は見られるが plateau は形成されない。

図-6 および 7 は碎波点での波高水深比 H_b/h_b および碎波水深 h_b に及ぼす風の影響を示すものである。これらの図は、風の応力効果が浅水効果より大きいときに碎波波高・水深が変化することを示唆しており、図-4 と同様に、緩勾配ほど風の影響が大きい。

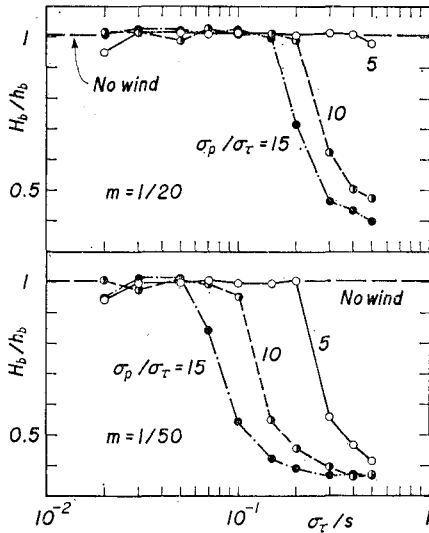
6. 結 言

ここでは、ソリトンを対象としてその波形変化、波高増幅率、碎波時の波高・水深に及ぼす風の影響を差分法による数値計算結果に基づき検討した。その結果は以下

図-5 ソリトン時間以前に碎波する場合の波形 ($H_0=0.3$)

のように要約される。

1) ソリトンの波形には、水深変化および風の応力の作用により plateau と tail が発生するが、plateau の発生時

図-6 砕波点での波高水深比の変化 ($H_0=0.3$)

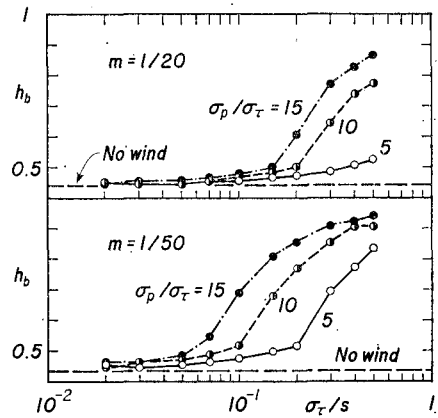
期はソリトン時間以後である。

2) plateau の高さはソリトンの波高増幅率と深く関係し、緩勾配斜面では plateau の規模は小さく、波高増幅率は大きくなる。

3) 風の応力の作用により波高の増大に伴って砕波点が無風時の位置から移動するので、海岸構造物に対する設計波の決定に際しては風の影響についても十分考慮すべきであろう。

参 考 文 献

- 1) 筒井茂明・土屋義人：表層流に起因する砕波，第31回海岸

図-7 砕波水深の変化 ($H_0=0.3$)

工学講演会論文集，pp. 15～19，1984。

- 2) Longuet-Higgins, M. S.: Action of a variable stress at the surface of water waves, Phys. Fluid, Vol. 12, pp. 737～740, 1969.
- 3) Zubusky, N. J.: Solitons and bounded states of time-dependent Schrödinger equation, Physical Review, Vol. 168, pp. 124～128, 1968.
- 4) 矢嶋信男・野木達夫：発展方程式の数値計算，応用数学叢書，岩波書店，232 p., 1977.
- 5) Karpman, V. I. and E. M. Maslov: Structure of tails produced under the action of perturbations on solitons, Sov. Phys. JETP 48(2), pp. 252～259, 1978.
- 6) Camfield, F. E. and R. L. Street: Shoaling of solitary waves on small slopes, Proc. ASCE, WW1, pp. 1～21, 1969.
- 7) 安田孝志・三島豊秋・土屋義人：傾斜海浜上におけるソリトンとその変形，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 109～113，1985。