

低 Reynolds 数乱流モデルの底面振動流境界層への適用

浅野敏之*・五道仁実**・岩垣雄一***

1. はじめに

最近、波動や振動流の流れの場の解析に乱流輸送モデルを用いた研究が行われるようになり、境界層内の流速場のみならず乱れの輸送過程についても解明されるようになってきた^{1)~3)}。しかしこれまでの研究は、高 Reynolds 数の流れを前提とした定常流に対する乱流輸送モデルを振動流に適用したものである。このモデルでは定常流においても、底面近傍の Reynolds 数の低い領域における分子粘性の効果や、乱れの逸散過程の非等方性を考慮できないという問題を有する。粘性底層は、境界層全体に占める割合はわずかであるが、境界層内の平均流の速度変化のかなりの部分がこの領域内で起こり、その流速分布が底面せん断応力に直接影響することから、境界層全体の流速場を支配する重要な領域であるといえる。これに加えて、特に振動流場においては、流向の反転時に流速の絶対値が小さくなり、すべての位相を通じて乱流であるとは限らないため、低 Reynolds 数の流れを表現することのできる乱流輸送モデルの適用が是非必要であると考えられる。

本研究は Jones-Launder⁴⁾ による低 Reynolds 数に対する乱流輸送モデルを振動流場に適用し、底面近傍の低 Reynolds 数の領域を含めた乱流境界層内の水粒子速度場の特性を考察したものである。

2. 低 Reynolds 数乱流モデルの概要

Jones-Launder⁴⁾ はそれまでの高 Reynolds 数を前提とした乱流モデルを、粘性底層をも含めた底面付近の流速場を表現できるモデルに拡張するために、以下の性質をモデルに導入した。

(a) 乱れエネルギー k 、乱れエネルギー逸散率 ϵ に分子粘性による拡散項を導入した。

(b) 乱れエネルギーおよびその逸散率の方程式中に、逸散過程が非等方的である事実を説明する項を付加した。

(c) 方程式中の一部の係数を乱れ Reynolds 数 R_T の関数とした。ここで R_T は k 、 ϵ および動粘性係数 ν によって次式で表わされる。

$$R_T = k^2 / \nu \epsilon \dots\dots\dots (1)$$

定常流の分野においては、上記のモデルのように粘性底層を直接考慮する以外に、Wall function 法を用いる方法がしばしば用いられる⁵⁾。この方法は経験則に基づいて、底面での境界条件を粘性底層外縁における境界条件に置き換えるものであり、局所的平衡すなわち乱れエネルギーの生成率と逸散率が等しいことを前提として導かれたものである。しかし、振動流においては後に示すように乱れエネルギーの生成率と逸散率は差を有するので、この方法の適用は適切ではない。

3. 数値解析の概要

3.1 基礎式

底面に沿って x 軸、鉛直上向きに z 軸をとると、振動流の境界層方程式は次式となる。

$$\frac{\partial(u - u_p)}{\partial t} = -\frac{\partial u'w'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 u 、 u_p はそれぞれ境界層内、境界層外縁での x 方向平均流速、 u' 、 w' はそれぞれ x 方向、 z 方向の乱れ速度である。Reynolds 応力 $-\overline{\rho u'w'}$ は渦動粘性係数 ν_T を用いて、

$$-\overline{u'w'} = \nu_T \frac{\partial u}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

と定義されるが、ここで ν_T は次式で表わされる。

$$\nu_T = c_\mu f_\mu k^2 / \epsilon \dots\dots\dots (4)$$

上式中の係数 c_μ 、 f_μ については後で説明する。

Jones-Launder が提示した乱れエネルギー k 、同逸散率 ϵ に対する方程式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right] - \overline{u'w'} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial z} \right)^2 \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right\} - c_1 f_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{u'w'} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & - c_2 f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + 2\nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工修 建設省 四国地方建設局

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

上式で $\sim$ を付けた箇所が, 2. で述べたように低 Reynolds 数の流れを表現するために導入した項あるいは係数である. 式 (4)~(6) に現われる諸定数は Jones-Launder によって次のように定められている.

$$\left. \begin{aligned} c_\mu &= 0.09, & c_1 &= 1.55, & c_2 &= 2.0, \\ \sigma_k &= 1.0, & \sigma_\epsilon &= 1.3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

また f_1, f_2, f_μ は乱れ Reynolds 数 R_T の関数であり, Jones-Launder は次式で与えた.

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 1.0 \\ f_2 &= 1.0 - 0.3 \exp(-R_T^2) \\ f_\mu &= \exp\{-2.5/(1+R_T/50)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

式 (7), (8) に示す定数の値や関数形については, 定常流の分野においてもなお議論のあるところであり^{6),7)}, また振動流場へそのまま適用することが妥当であるかどうかともよくわからない. しかしこれらの諸定数は, 少なくとも定常流れに対しては普通定数に近いことが認められており, また各項は乱流輸送過程の役割を表現している点で, これらの諸定数は物理的意味を有すると考えられる. さらにこの低 Reynolds 数の乱流モデルでは式 (8) 中の乱れ Reynolds 数 R_T は, 式 (1) の定義からもわかるように, k と ϵ の時空間変化に伴って変化するので, 振動流などの時間的変動流の特性を反映することも期待できる. したがって本研究では以上の諸定数および関数形については Jones-Launder が定めたものをそのまま用いることにする.

3.2 無次元化および境界条件

林・篠田⁹⁾ にならって次のような無次元量を導入し, 基礎式を無次元化する.

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r &= (u - u_p)/\hat{u}_p, & z_r &= z/D, & t_r &= \omega t, \\ k_r &= k / \left(\frac{1}{2} \hat{u}_p^2 \right), & \epsilon_r &= \epsilon / \left(\frac{1}{2} \omega \hat{u}_p^3 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

ここに, $\hat{u}_p$: 境界層外縁での水粒子速度振幅, ω : 振動流の角周波数, D : 底面摩擦の影響が無視できる底面からの高さである. 式 (2), (3), (5), (6) に上式を導入し整理すると次式が得られる.

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t_r} = S \frac{\partial \tau_r}{\partial z_r} + \frac{S}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z_r^2} \dots\dots (10)$$

$$\tau_r = \frac{1}{2} S c_\mu f_\mu \frac{k_r^2}{\epsilon_r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z_r} \dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_r}{\partial t_r} &= \frac{\partial}{\partial z_r} \left\{ \left(\frac{S}{Re} + \frac{1}{2} S^2 c_\mu f_\mu \frac{k_r^2}{\epsilon_r} \right) \frac{\partial k_r}{\partial z_r} \right\} \\ &\quad + 2 S \tau_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z_r} - \epsilon_r - 2 \frac{S}{Re} \left(\frac{\partial k_r^{1/2}}{\partial z_r} \right)^2 \dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial t_r} &= \frac{\partial}{\partial z_r} \left\{ \left(\frac{S}{Re} + \frac{1}{2} S^2 c_\mu f_\mu \frac{k_r^2}{\epsilon_r} \right) \frac{\partial \epsilon_r}{\partial z_r} \right\} \\ &\quad + 2 S c_1 f_1 \frac{\epsilon_r}{k_r} \tau_r \frac{\partial u_r}{\partial z_r} - c_2 f_2 \frac{\epsilon_r^2}{k_r} \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{S^3}{Re} c_\mu f_\mu \frac{k_r^2}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z_r^2} \right)^2 \dots\dots (13)$$

ただし,

$$Re = \hat{u}_p D / \nu, \quad S = \hat{u}_p / \omega D \dots\dots (14), (15)$$

で, S は Strouhal 数 St の逆数である.

境界条件は次式のような簡単な形で与えることができる.

$z_r = 0$ で

$$\bar{u}_r = -\cos t_r, \quad k_r = 0, \quad \epsilon_r = 0 \dots\dots (16)$$

$z_r = 1$ で

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z_r} = 0, \quad \frac{\partial k_r}{\partial z_r} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon_r}{\partial z_r} = 0 \dots\dots (17)$$

3.3 計算方法

式 (10)~(13) を数値計算するにあたっては, Crank-Nicolson 法による陰形式差分を採用ことにした. 粘性底層内の流れを調べるために, 空間メッシュは境界層厚 D の 600 等分と十分細かくし, それに応じて時間メッシュも 1 周期を 2160 等分した. 適当な初期条件を与え, 周期的な解が得られるまで計算をくり返した. 計算は表—1 に示すように, Reynolds 数 Re と Strouhal 数 St の異なる計 5 ケースについて行った.

4. 計算結果および考察

4.1 Reynolds 数および Strouhal 数による結果の特性の変化

表—1 の計算条件から読みとれるように, CASE-I, III, IV は Strouhal 数がほぼ等しく, これらの結果の比較から Reynolds 数の効果を検討することができる. 一方, CASE-I と CASE-II, CASE-IV と CASE-V は Reynolds 数が共通であるから, 両者の比較から Strouhal 数の効果を調べることができる.

図—1 は, CASE-I, II, III について平均流速 u_r , Reynolds 応力 τ_r , 乱れエネルギー k_r および同逸散率 ϵ_r の鉛直分布を振動流の位相 $1/6\pi$ ごとに示したものである. また 図—2 は CASE-I と III について各水理量の位相による変化を示したものである.

図—1 および 図—2 の CASE-I と CASE-III の比較, およびここでは示さなかったが CASE-IV との比較検討から Reynolds 数による各水理量の変化特性として以下のことが明らかになった.

表—1 計 算 条 件

	$\bar{u}_p$ (cm/sec)	T (sec)	D (cm)	Re	St
CASE-I	30.0	9.8	4.0	12000	1/11.7
CASE-II	30.0	15.0	4.0	12000	1/17.9
CASE-III	40.0	9.8	5.0	20000	1/12.5
CASE-IV	49.9	9.8	7.0	34900	1/11.1
CASE-V	49.9	15.0	7.0	34900	1/17.0

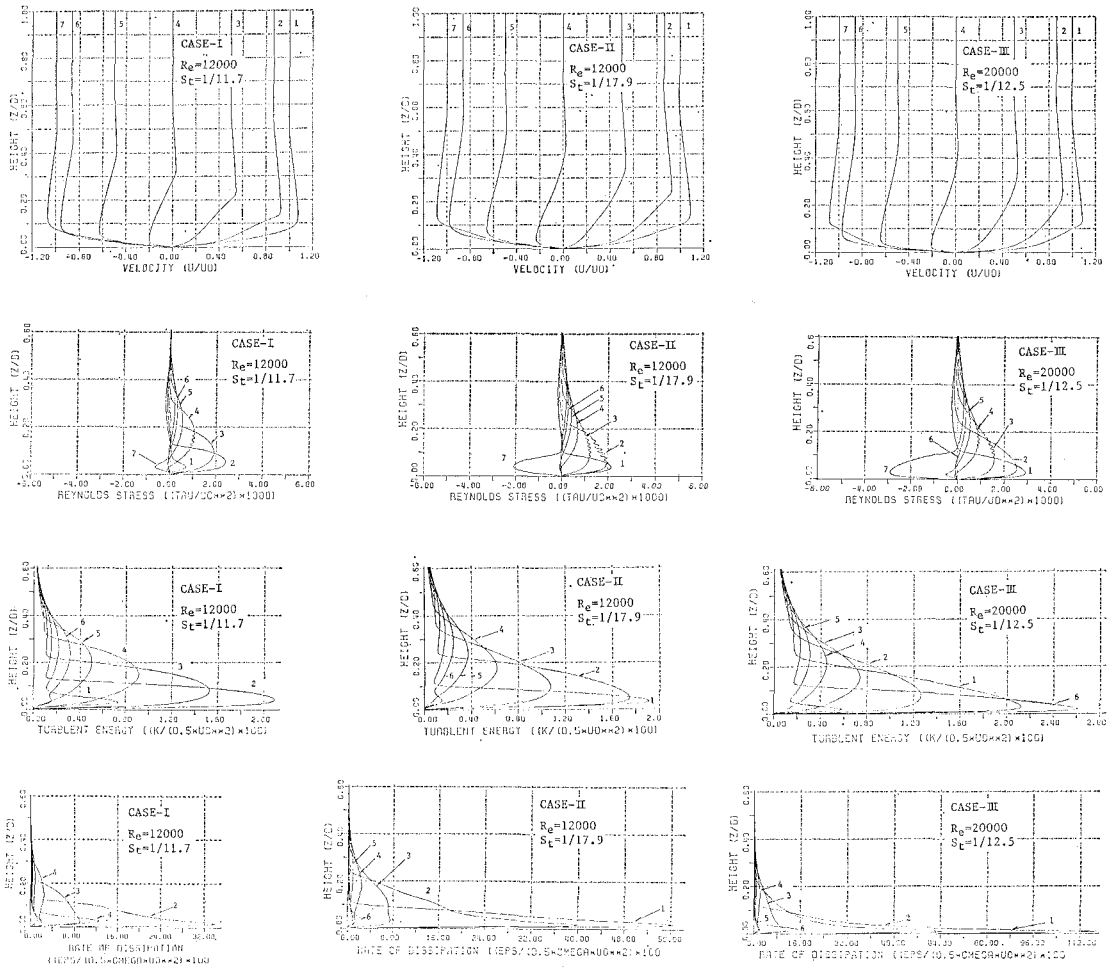


図-1 平均流速 u_r (最上段), Reynolds 応力 τ_r (二段目), 乱れエネルギー k_r (三段目) および乱れエネルギー逸散率 ϵ_r (四段目) の鉛直分布

(1) 位相 0 および π における平均流速の極大値を示す高さは Reynolds 数の増加とともに高くなる。

(2) τ_r, k_r, ϵ_r の値は Reynolds 数の増加とともに全体的に大きくなる。

(3) τ_r, k_r, ϵ_r の極大値を生じる位相の、主流流速が極大となる位相からの遅れは Reynolds 数が小さくなるにつれて大きくなる。

一方、図-1 の CASE-I と CASE-II およびここでは示していないが CASE-IV と CASE-V の比較から、Strouhal 数に関して同様の検討を行った結果、以下のことがわかった。

(1) Strouhal 数が小さい (周期 T が大きい) 方が、平均流速の鉛直分布の最大値は高い位置にくる。

(2) Strouhal 数が小さい方が τ_r, k_r の最大値は小さくなる。 ϵ_r についてはその無次元化に周期が用いられているために、Strouhal 数の小さい方が ϵ_r は大きな値となる。

4.2 乱れエネルギーの輸送過程

図-3 は振動流境界層内のエネルギー輸送過程を示したもので、CASE-I について式 (12) 右边各項の分布を位相 $\pi/6$ ごとに表示したものである。式 (12) の右边第 1 項は拡散項、第 2 項は生成項、第 3 項は逸散項、第 4 項は壁面近くでの非等方的なエネルギー逸散を表わす項であり、図中ではそれぞれ Dif, P, ϵ, Ni で表示した。図から各位相において生成項 P と逸散項 ϵ はつり合わないこと、拡散項 Dif は壁面近傍で正の値をとり、無次元高さ z_r がある程度大きくなると負となること、非等方的なエネルギー逸散を表わす項 Ni は粘性底層に相当する領域において負の値となり、それより上方では 0 に近いこと等が読みとれる。

4.3 粘性底層に関する考察

図-4 は CASE-I の平均流速の鉛直分布を縦軸の無次元高さ z_r を対数にとって表示したものである。図中には梶浦の理論⁹⁾による粘性底層厚さ D_L と、中間層の

上限高さ d を境界層厚 D で無次元化した位置を示した。 $z_r < D_L/D$ の領域は梶浦の理論では粘性底層に相当するが、位相 $0, \pi/6$ および π における流速変化は z_r に比例すること、また $D_L/D < z_r < d/D$ の範囲は梶浦の理論では対数則の成立する領域であり、位相 $0, \pi/6$ および π ではほぼ直線に近い分布となることがわかる。しかしそれ以外の位相では上述の性質は必ずしも認められない。

梶浦の理論では粘性底層の高さは時間的に不変であるとして取扱っているが、その高さは振動流の位相によって変化することを以下に示す。

全せん断応力 τ_A は、

$$\tau_A = \rho(\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial z} \dots \dots \dots (18)$$

であるが、渦動粘性係数 ν_T は式 (1), (4) から、

$$\nu_T = c_\mu f_\mu \nu R_T \dots \dots \dots (19)$$

となつて、乱れ Reynolds 数 R_T の関数であり、結局、 τ_A を構成する分子粘性の割合も R_T の関数であることがわかる。試算の結果、 R_T が 5 以下では Reynolds 応力は分子粘性によるせん断応力の 4.5% となり、 R_T が 1 以下では約 0.8% 以下となる。 $R_T=5$ となる高さで粘性底層の高さを定義すると、その位相平均値は梶浦の理論より得られる粘性底層高さとするすべての計算ケースではほぼ一致する結果を得た。両者の結果が一致するのは、本モデルも梶浦の理論も定常流の壁面境界層の知見を基に導かれたものであり、むしろ当然である。図-5 は $R_T=1$ および $R_T=5$ となる底面からの高さの位相変化を示したものである。図から粘性底層の高さは位相とともに変化し、平均流速の加速期に極大値を持つことがわかる。これは流れの加速期に乱れエネルギーが極小となることを意味し、加速流の再層化現象に対応するものである。

一方、Strouhal 数の効果について検討したところ、Reynolds 数が一定の場合に Strouhal 数が減少すると粘性

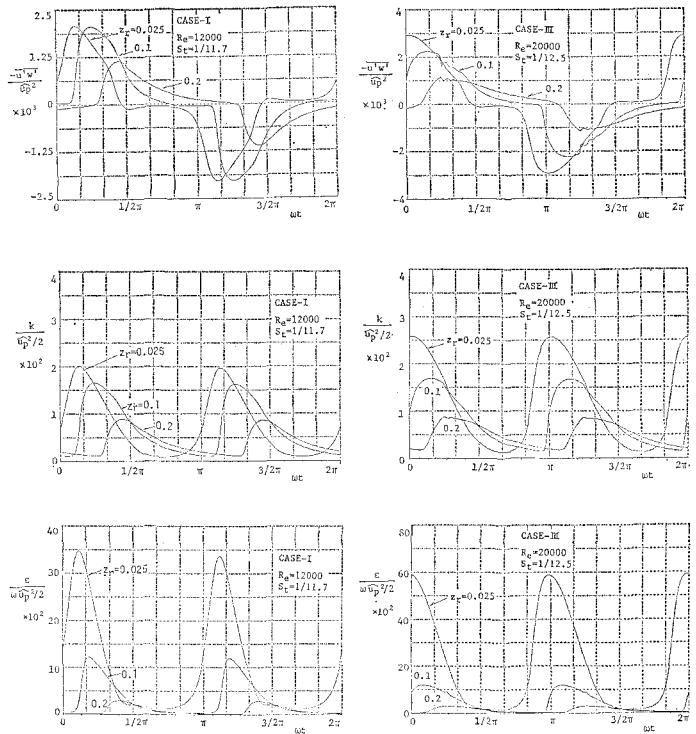


図-2 Reynolds 応力(最上段), 乱れエネルギー(第二段)および乱れエネルギー逸散率(第三段)の位相変化

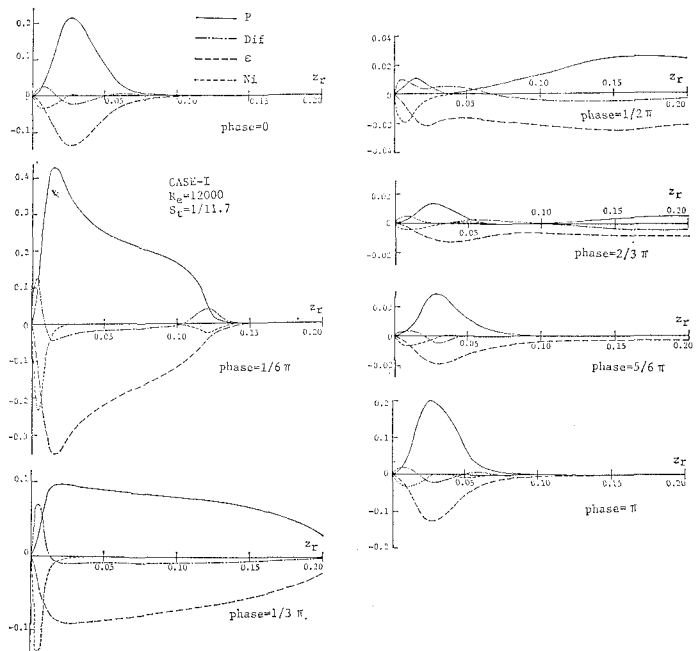


図-3 壁面近傍での乱れエネルギー方程式(12)の右辺各項の分布

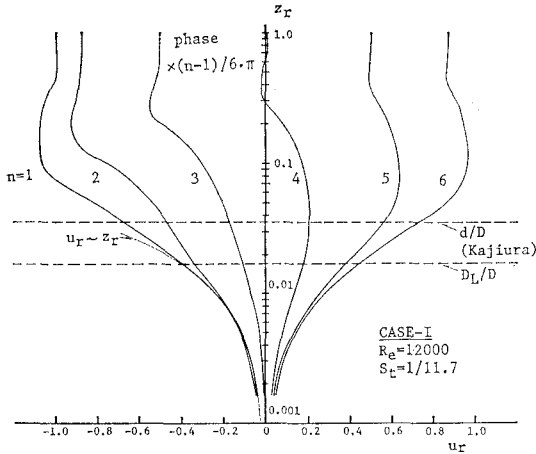


図-4 平均流速の鉛直分布

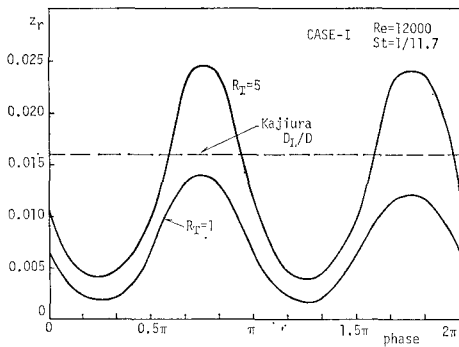


図-5 粘性底層の高さの位相変化

底層の位相平均した高さは増加することが確かめられた。

5. 結 論

(1) Reynolds 数および Strouhal 数を変えた計算を行うことにより、これらのパラメータによる乱れの特性的量の時空間的な変化特性を明らかにした。

(2) 平均流速の鉛直分布については、振動流の位相 0 および π 付近では、粘性底層内で z に比例し、それより上方で対数分布するという定常流の性質に近い結果を得たが、それ以外の位相ではこの性質は認められなかった。

(3) 粘性底層の高さは振動流の位相とともに変化し、平均流速の加速期に極大値を持つことがわかった。

参 考 文 献

- 1) 林 泰造・篠田 薫： 往復流乱流境界層に関する基礎的研究，第 23 回水理講演会論文集，pp. 41~48，1979。
- 2) Cousteix, J., A. Desopper and R. Houdeville: Structure and development of a turbulent boundary layer in an oscillatory external flow, Turbulent Shear Flow, Vol. 1, Springer-Verlag, pp. 154~171, 1979。
- 3) Sheng, Y. P.: A turbulent transport model of coastal processes, Proc. of 19th Inter. Conf. of Coastal Eng., pp. 2380~2396, 1984。
- 4) Jones, W. P. and B. E. Launder: The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301~314, 1972。
- 5) Rodi, W.: Turbulence models and their application in hydraulics, a state of the art review, Univ. Karlsruhe, SFB 80/T/127, p. 140, 1978。
- 6) Hanjalic, K. and B. E. Launder: Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds number turbulence, J. Fluid Mech., Vol 74, pp. 593~610, 1976。
- 7) 細田 尚・余越正一郎: Turbulent Reynolds 数が低い領域での ϵ 方程式の散逸項の表示，第 30 回水理講演会論文集，pp. 517~522，1986。
- 8) Kajiura, K.: A model of the bottom boundary layer in water waves, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 46, pp. 75~123, 1968。