

波動境界層の二次の解について

水 口 優*

1. はじめに

室内実験における波動による滑面上の底面境界層流れは、 $\hat{U}\delta/\nu$ ($\hat{U}$ は境界層外縁での流速の振幅、 δ は境界層の厚さ、 ν は、動粘性係数である。) で定義されるレイノルズ数が約 200 以下であれば層流である事が知られている [例えば、近藤・堀川 (1976)¹⁾ 参照]. 海岸工学的に興味のある現象のうちいくつかのもの、例えば底質の移動開始状況や掃流状態での移動量に関する議論などは、この範囲内で生じている。

本論文においては、波動による底面境界層の層流流れ時の二次の解を解析的に求める。ここでいう二次については次のような微小量に対応するものが考えられる。

(1) 波動の有限振幅性を考慮するパラメータ ϵ_1 で、ストークス波を念頭におけば ka (k は波数、 a は振幅である。) である。しかし、 ka は展開のパラメータであり、解の有効さを示す摂動解の収束性はアーセル数 $Ur = gHT^2/h^2$ (ここで、 g は重力の加速度、 $H=2a$ は波高、 T は周期、 h は水深である。) にもよる。特に、境界層が問題となる浅海域では ϵ_1 は、底面流速の二次の振幅と一次の振幅の比を取って、 $\epsilon_1 \doteq 3ka/4 \sinh^3(kh)$ と考えるのが妥当であろう。

(2) 境界層近似が成立する為の条件であり、 $\epsilon_2 = \delta/L$ (ここで $L=2\pi/k$ は波長である。) なる量が微小であることである。 δ は境界層の厚さを表すパラメータであり、以下に見るように波の角周波数を $\sigma (=2\pi/T)$ として $\delta = (2\nu/\sigma)^{1/2}$ である。

(3) 境界層方程式において非線形項を無視する際の微小量で、以下にみるように $\epsilon_3 = \hat{U}_1/c$ となる。ここで、 $\hat{U}_1$ は波による底面での一次の流速の振幅であり、 c は波速である。

(4) 境界層を考えることにより完全流体として解かれる波動場が受けるフィードバックの程度を表すものであり、 ϵ_4 としては境界層の存在による水深の補正量を示す δ/h 、または粘性による波高減衰の代表長さ L_a をもちいての L/L_a などが考えられよう。

現在までの波動境界層の層流流れに関する研究成果

は、例えば Batchelor (1970)²⁾ p. 353- に取りまとめられている。特に、二次の解を扱ったものでは、Longuet-Higgins (1953)³⁾ による質量輸送速度に関するものがあるが、Schlichting (1932) [Schlichting (1979)⁴⁾ p. 428- 参照] も、波動で言えば重複波にあたる境界層外縁で振幅のみが場所的に変化する場合の振動流境界層の、変動分も含んだ完全な二次の解を得ている。さらに、岩垣 他 (1966)⁵⁾ は、進行波に対する二次の解を発表しているが、波動としての有限振幅性は考慮されていないし、得られた結果にも誤りがあるようである。

以下、波動としては二次のオーダの有限振幅性を考慮した部分重複波を考え、それに対応する定常周期解としての底面層流境界層の流れの流速分布、底面せん断応力および質量輸送速度分布の解析的な解を導き、その結果について検討する。

2. 境界層方程式と境界条件

境界層内で成立する基本式は、上記の ϵ_2 が微小である事に対応して次のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 u, v は波の進行方向である x 方向および鉛直 y 方向の速度成分であり、 ρ は流体の密度、 p は圧力である。境界条件は、完全流体として解かれた底面での水平流速を u_B として次のようになる。

$$y=0 \quad \text{で} \quad u=v=0 \dots\dots\dots (4)$$

$$y \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad u=u_B=u_{B1}+u_{B2} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 u_{B1}, u_{B2} は部分重複波としてのストークス波の二次の解をとると、進行波と反射波の干渉項は登場せず [例えば、Goda and Abe (1968)⁶⁾ 参照]、次のように表される。この段階でパラメータ ϵ_1 の微小性が用いられている。

$$u_{B1} = \text{Re}(U_1 e^{i\sigma t}), \quad U_1 = \hat{U}_1 (e^{-ikx} - r e^{ikx}) \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科

$$u_{B2} = \text{Re}(U_2 e^{2i\sigma t}), \quad U_2 = \hat{U}_2(e^{-2ikx} - r^2 e^{2ikx}) \quad (7)$$

$$\hat{U}_1 = \frac{a\sigma}{\sinh kh} \quad (8)$$

$$\hat{U}_2 = \frac{3ka^2\sigma \coth(2 \coth^2 kh - 1)}{2 \sinh 2kh} \quad (9)$$

ここで、 a は水位変動の振幅、 r は反射率であり、 Re は実部を取ることを意味する。この時反応する波形 η は次のように表される。

$$\eta = a \cos \theta_i + a_2 \cos 2\theta_i + r a \cos \theta_r + r^2 a_2 \cos 2\theta_r + \frac{1}{2} r k a^2 (\tanh kh + \coth kh) \cos 2kx \quad (10)$$

$$a_2 = \frac{1}{4} k a^2 \coth kh (3 \coth^2 kh - 1) \quad (11)$$

$$\theta_i = kx - \sigma t, \quad \theta_r = kx + \sigma t \quad (12)$$

反射率が1の場合は $kx=0$ が重複波の腹になっている。

ここで、注意を要するのは波動としての二次のオーダーの定常流成分の扱いである。それ自身が二次のオーダーであり、かつその時間スケールが変動の周期に比して非常に大きいことから、境界層の厚さも δ に比べて非常に大きく、ここで扱う境界層内の流れに対する境界条件としては0とおいてよいことになろう。定量的に言えば、そのオーダーは $\varepsilon_1(\delta/h)$ であろう。

3. 振動流境界層としての解析解の誘導

まず、(5) 式を (2) 式に代入し三次以上の項を無視すると境界層外縁で成立するものとして次式を得る。

$$\frac{\partial u_{B1}}{\partial t} + \frac{\partial u_{B2}}{\partial t} + u_{B1} \frac{\partial u_{B1}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (13)$$

(3) 式より、(13) 式は境界層全域で成立し、(2) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u_{B1}}{\partial t} + \frac{\partial u_{B2}}{\partial t} + u_{B1} \frac{\partial u_{B1}}{\partial x} \quad (14)$$

(1) 一次の解

境界層内の流速についても、 ε_3 のオーダーの微小さで、 $u = u_1 + u_2$, $u_2 \ll u_1$ とおく。鉛直流速 v は (14) 式からもわかるように、一次のオーダーでは存在せず、二次での解は以下にみるように u_1 と連続の式から求まる。

さて、 u_1 は (13) 式において非線型項と二次の強制項を無視して得られる次の運動方程式を満たす。

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial u_{B1}}{\partial t} + \text{Re}(i\sigma U_1 e^{i\sigma t}) \quad (15)$$

一次のオーダーでの連続式は $v=0$ および $\partial u / \partial x = 0$ で満たされている。対応する境界条件は、次のようになる。

$$y=0 \quad \text{で} \quad u_1=0 \quad (16)$$

$$y \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad u_1 \rightarrow u_{B1} \quad (17)$$

以上より得られる一次の定常周期解は、よく知られているように次式で与えられる。

$$u_1 = \text{Re}\{U_1 f(y) e^{i\sigma t}\}, \quad f(y) = 1 - e^{-\alpha y} \quad (18)$$

$$\alpha = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{2\nu/\sigma} \quad (19)$$

ここで、 δ は鉛直方向のスケール量となっており、既に述べたように境界層の厚さをあらわすパラメータとなる。

(2) 二次の解

二次の解 u_2 は、(14) 式より次の式を満たす。

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\partial u_{B2}}{\partial t} + u_{B1} \frac{\partial u_{B1}}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (20)$$

右辺の計算に際して必要な v_1 は、既に述べたようにして次のようになる。

$$v_1 = -\int_0^y \frac{\partial u_1}{\partial x} dy = -\text{Re}\left\{\frac{dU_1}{dx} F(y) e^{i\sigma t}\right\} \quad (21)$$

$$F(y) = \int_0^y f(y) dy = (\alpha y + e^{-\alpha y} - 1)/\alpha \quad (22)$$

他の項についても、若干の計算をすれば、(20) 式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= \text{Re}\left[\frac{1}{2} U_1 \frac{dU_1^*}{dx} \left(1 - ff^* + \frac{df}{dy} F^*\right) + e^{2i\sigma t} \left\{2i\sigma U_2 + \frac{1}{2} U_1 \frac{dU_1}{dx} \times \left(1 - f^2 + f \frac{dF}{dy}\right)\right\}\right] \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、* は共役複素数を意味する。対応する境界条件は次式となる。

$$y=0 \quad \text{で} \quad u_2=0 \quad (24)$$

$$y \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad u_2 \rightarrow u_{B2} \quad (25)$$

明らかに、 u_2 は定常成分 $\bar{u}_2$ と倍周波数成分 $\tilde{u}_2$ に分かれ、それぞれ次の式と境界条件を満たす。

定常成分

$$-\nu \frac{d^2 \bar{u}_2}{dy^2} = \text{Re}\left\{\frac{1}{2} U_1 \frac{dU_1^*}{dx} \left(1 - ff^* + \frac{df}{dy} F^*\right)\right\} \quad (26)$$

$$y=0 \quad \text{で} \quad \bar{u}_2=0 \quad (27)$$

$$y \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \frac{d\bar{u}_2}{dy} = 0 \quad (28)$$

変動成分

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial y^2} &= \text{Re}\left[\left\{2i\sigma U_2 + \frac{1}{2} U_1 \frac{dU_1}{dx} \times \left(1 - f^2 + \frac{df}{dy} F\right)\right\} e^{2i\sigma t}\right] \quad (29) \end{aligned}$$

$$y=0 \quad \text{で} \quad \bar{u}_2=0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$y \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \bar{u}_2 \rightarrow u_{B2} \quad \dots\dots\dots (31)$$

二次の定常解は (26) 式を, (27), (28) 式の条件のもとで素直に2回積分することにより次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = Re \left[U_1 \frac{dU_1^*}{dx} / \sigma \left\{ -\frac{3}{4}(1+i) + \frac{1-i}{4} e^{-2y'} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-y'} \left(\frac{1+3i}{2} e^{-iy'} - \frac{i}{2} e^{iy'} - \frac{1-i}{2} e^{-iy'} \right) \right\} \right] \\ \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$y' = \frac{y}{\delta} \quad \dots\dots\dots (33)$$

変動成分については,

$$1 - f^2 + f \frac{dF}{dy} = (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \quad \dots\dots\dots (34)$$

と書けることから, 特解として $U_2 + A\alpha y \exp(-\alpha y) + B \exp(-\alpha y)$ の形を仮定して解くと, 最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = Re \left[\left\{ U_2 (1 - \exp(-\sqrt{2}\alpha y)) - iU_1 \frac{dU_1}{dx} / \sigma \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-\alpha y} (\alpha y - 1 + \exp((1 - \sqrt{2})\alpha y)) \right\} e^{2i\sigma t} \right] \\ \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

(32) および (35) 式が二次の流速場を表すわけである。この結果より境界層内の流れの非線型項のオーダー ϵ_3 は $(dU_1/dx)/\sigma$ (波動を考えると $\approx U_1/c$) であることがわかる。

(3) 底面せん断戦力

流速場がわかれば, 底面せん断応力 τ/ρ も容易に計算できて次のようになる。

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_1}{\rho} + \frac{\bar{\tau}_2}{\rho} + \frac{\bar{\tau}_3}{\rho} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{\tau_1}{\rho} = Re(\alpha \nu U_1 e^{i\sigma t}) \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{\bar{\tau}_2}{\rho} = Re \left(\frac{1-i}{4} \delta U_1 \frac{dU_1^*}{dx} \right) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\tau}_3}{\rho} = Re \left\{ (\sqrt{2}\alpha \nu U_2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right. \\ \left. \times iU_1 \frac{dU_1}{dx} / \sigma \right\} e^{2i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

(4) 質量輸送速度

(32) 式は, オイラー的な定常流成分であり, ラグランジュ的な質量輸送速度 u_{12} は周期平均を $-$ であらわして, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{12} = u_2 + \int u_1 dt \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int v_1 dt \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ = Re \left\{ U_1 \frac{dU_1^*}{dx} / \sigma \left(-\frac{3+5i}{4} + \frac{3-3i}{4} \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-2y'} + 2ie^{-(1+i)y'} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

4. 波動による周期的変動の場合

以上の結果は, (6), (7) 式の前半において表されているように境界層外縁の流速が周期的に変動する場合の一般的な表現である。(6), (7) 式の後半で表される波動による場合に限定すると, 水面変動が (10) 式で与えられる場合の結果としては次のようになる。

$$u_1 = \hat{U}_1 \{ q_1(\theta_i, y') - r q_1(-\theta_r, y') \} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$q_1(\theta, y) = \cos \theta - e^{-y} \cos(\theta + y) \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = \frac{\hat{U}_1^2}{c} \left[(1-r^2) \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-2y'} + e^{-y'} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{2} \sin y' - \cos y' \right) - \frac{1}{2} y' e^{-y'} \right. \right. \\ \left. \left. \times (\sin y' + \cos y') \right\} - 2r \sin 2kx \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{-2y'} - e^{-y'} \left(\frac{1}{2} \cos y' \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin y' \right) - \frac{1}{2} y' e^{-y'} (\sin y' - \cos y') \right\} \right] \\ \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = \hat{U}_2 \{ q_2(2\theta_i, \sqrt{2} y') - r^2 q_2(-2\theta_r, \sqrt{2} y') \} \\ + \frac{\hat{U}_2^2}{2c} \{ q_2(\theta_i) - r^2 q_2(-\theta_r) \} \quad \dots\dots\dots (45) \\ q_2(\theta) = -\sqrt{2} y' e^{-y'} \cos(2\theta + y' - \pi/4) \\ + e^{-y'} \cos(2\theta + y') - \exp(-\sqrt{2} y') \\ \times \cos(2 + \sqrt{2} y') \quad \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\rho} = \frac{\delta \sigma \hat{U}_1}{\sqrt{2}} \{ \cos(\theta_i - \pi/4) - r \cos(\theta_r + \pi/4) \} \\ \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{\tau}_2}{\rho} = \frac{k \delta \hat{U}_1^2}{4} (1-r^2 + 2r \sin 2kx) \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\tau}_3}{\rho} = \delta \sigma \left(\hat{U}_2 - \frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{\hat{U}_1^2}{c} \right) \\ \times \{ \cos(2\theta_i - \pi/4) - r^2 \cos(2\theta_r + \pi/4) \} \\ \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{12} = \frac{\hat{U}_1^2}{c} \left\{ (1-r^2) \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} e^{-2y'} - 2e^{-y'} \cos y' \right) \right. \\ \left. + 2r \sin 2kx \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} e^{-2y'} - 2e^{-y'} \sin y' \right) \right\} \\ \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

(41) または (50) 式は Longuet-Higgins³⁾ の結果と同じである。

(1) 進行波の場合

波動が進行波の場合は, 波としては (6)~(11) 式, 境界層内の流れとしては (42)~(50) 式において $r=0$ とおけばよい。以下, 具体的な計算例を示す。図-1 は, $a=3\text{cm}$, $T=2\text{s}$, $h=40\text{cm}$ ($kh=0.681$, $H/L=0.0162$, $Ur=14.7$) の場合の水面変動と底面流速の時間波形である。アーセル数の値は, 波動の二次の理論の適用限界付

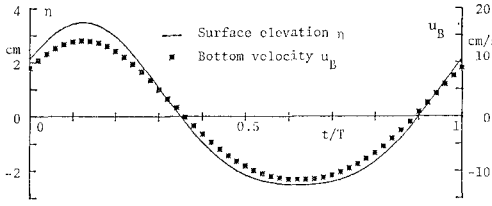


図-1 進行波 ($r=0$) の $kx=\pi/4$ 地点での水面変動と底面流速

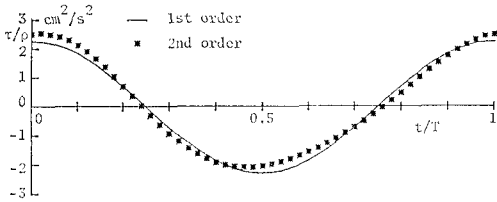


図-2 進行波の $kx=\pi/4$ 地点でのせん断応力 τ/ρ の時間波形

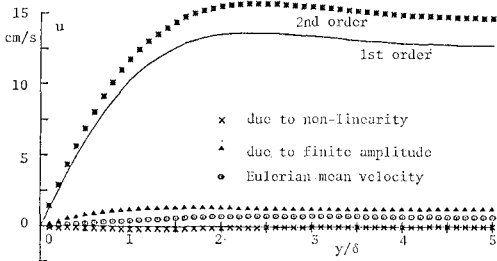


図-3 進行波の位相 $\theta_i=0$ での流速分布

近の値である。図-2 は同じ条件で $\nu=0.010 \text{ cm}^2/\text{s}$ の場合の底面せん断応力の時間波形を示したものである。この時のレイノルズ数は 102 である。二次の寄与は最大値にして約 12% の増加として現われている。そのうち、2.5% は定常成分からの寄与である。二次の変動成分においては (49) 式からもわかるように、波動としての二次の項が卓越してせん断応力の位相の進みが小さくなっている。波動としての二次と境界層内の非線型性による二次の項は符号が逆であり、両者は $kh=1.40$ の時に相殺し合う。しかし、 $kh>1$ の条件下では、 ϵ_1 、 ϵ_3 共に小さく、一般的に言って二次の効果は無視できる。図-3 は、位相 $\theta_i=0$ での流速分布の計算例である。この図においても、二次の変動成分としては、波動としての二次の項の寄与が大きいのがわかる。実際、(44) 式における両者の係数の比は $\hat{U}_2/(\hat{U}_1^2/2c) \doteq 2\epsilon_3/\epsilon_1 \doteq 8/3 \sinh^2(kh)$ (この場合 $\doteq 4.9$) であり、浅海域では ($kh<1$) では予想されることである。

(2) 重複波の場合

図-4 は、同じ条件で、反射率が 0.5 の場合に $kx=\pi/4$ の地点における水面変動、せん断応力の時間波形および対応する流速分布図 (進行波の位相 θ_i が 0 の場合)

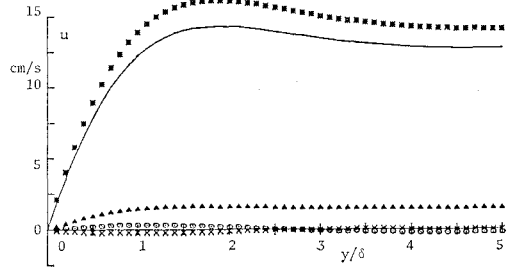
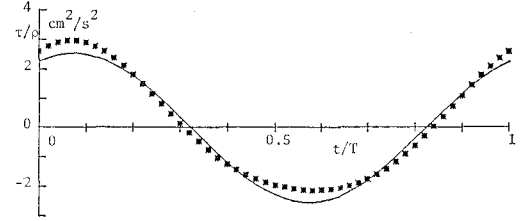
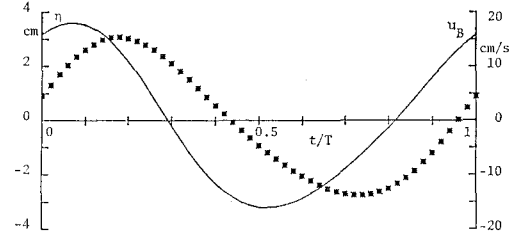


図-4 部分重複波 ($r=0.5$) の場合の $kx=\pi/4$ 地点での計算例

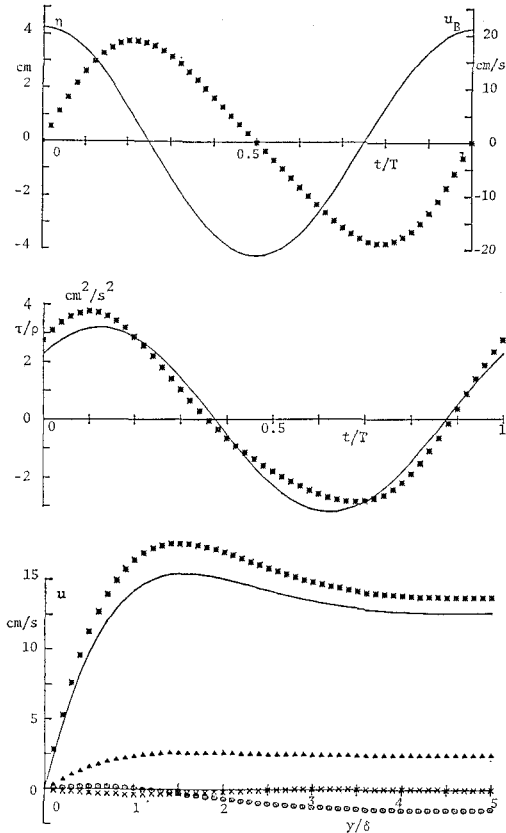
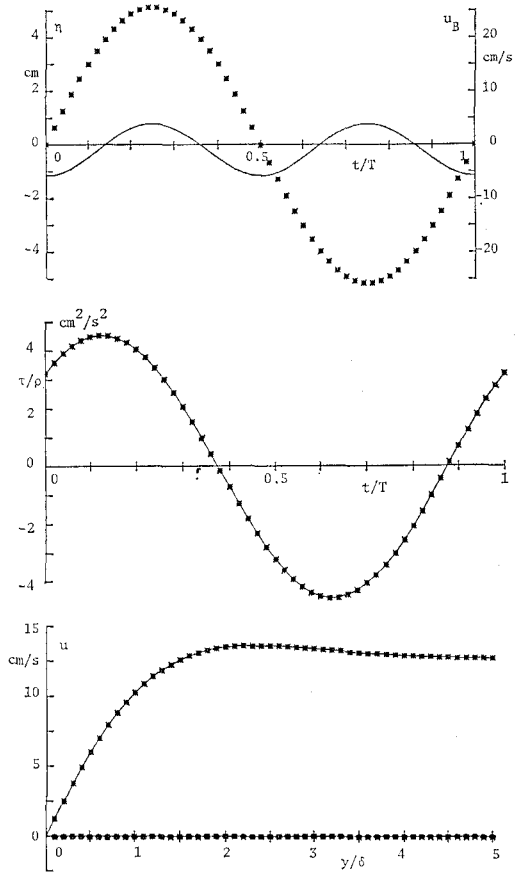
を示す。全ての量が、進行波の場合と後にしめす完全重複波の場合との中間の値を取っている。

完全重複波の場合は (42)~(50) 式において $r=1$ とおけばよく、図-5, 6 は、上と同一条件での $kx=\pi/4$, $\pi/2$ (節) での結果である。 $kx=0$ では $u_B=0$ となり、水位変動を除いて全て 0 となる。 $kx=\pi/4$ でのせん断応力の最大値は 17% 増大しているのに、節では境界層内では二次の項は全て消える。重複波で面白いのは、(48) 式と (50) 式よりわかるように平均的なせん断応力の向きと境界層外縁の質量輸送速度の向きが逆なことである。なお、(44), (45) 式における $\bar{u}_2$ および $(\bar{U}_2=0$ とおいた場合) の $\bar{u}_2$ の鉛直方向の分布は Schlichting⁴⁾ の結果に一致する。この一致は (32), (35) の両式において $U_2=0$ として中カッコ内のそれぞれの実部、虚部を比較することによっても確かめられる。

5. 考 察

ここでは、1. で述べたパラメータについて考える。まず、今までに登場しなかった ϵ_4 についてである。粘性による波高変化の代表長さは、浅海域を考慮して境界層内でのエネルギー損失に着目すると

$$La = \frac{a}{da/dx} \doteq \frac{2kh + \sinh 2kh}{k^2 \delta} \dots\dots\dots (51)$$

図-5 重複波 ($r=1$) の場合の $kx=\pi/4$ 地点の計算例図-6 重複波の場合の $kx=\pi/2$ (節) での計算例

で与えられる。すなわち、

$$\frac{L}{L_d} = \frac{k\delta}{2kh + \sinh 2kh} \sim \frac{\delta}{h} \quad \dots\dots\dots (52)$$

となり、浅海域では水深補正量への寄与と同じになる。

で、本論文における扱いは、 $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ すなわち境界層厚 δ については一次のオーダー、 $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ すなわち波動と境界層内の非線型性については二次のオーダーまでの解となっている事になる。これは、2つの微小量のペアが独立であり、また水の動粘性係数が小さいことを考えれば意味があるケースと言えよう。ちなみに、上にのせた計算例の場合の $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ の値はそれぞれ 0.097, 0.00136, 0.070, 0.00199 である。確かに、 $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ は $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ より 1 オーダ以上小さい。

最後に、本研究は文部省の科学研究費（一般研究 C）の補助を受けたものである。

参 考 文 献

- 1) 近藤浩右・堀川清司：底面質量輸送速度の高次近似解について，土木学会第31回年次学術講演会概要集，II-37～38，1971.
- 2) Batchelor, G. K.: An Introduction to Fluid Dynamics, Camb. Univ. Press, 615 p., 1970.
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. 245, pp. 535～581, 1953.
- 4) Schlichting, H.: Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill, 817 p., 7th ed., 1979.
- 5) 岩垣雄一・土屋義人・坂井順行・陳 活雄：海底摩擦による波高減衰機構に関する研究——層流境界層の場合——，京大防災研年報第9号，pp. 1～19, 1966.
- 6) Goda, Y. and Y. Abe: Apparent coefficient of partial reflection of finite amplitude waves, Rep. Port & Harbour Res. Inst., vol. 7, No. 3, pp. 3～58, 1968.