

砕波の物理過程に基づいた砕波帯内の拡散係数のモデル化

灘 岡 和 夫*・ 広 瀬 文 人**

1. ま え が き

近年、現地観測や室内実験の進展を背景として、砕波帯内の水理現象に関する理解が急速に深まりつつある。しかしこの中にあって、砕波帯内の拡散については、それが砕波帯内のダイナミクスを特徴づける基本的な要素の一つであるにもかかわらず、これまでのところ、ごく初歩的な取扱いが行われているにすぎない。

例えば、海浜流の水平混合項の評価には通常、勾配拡散型のモデルが用いられているが、その場合の運動量拡散係数の表現としては、Thornton¹⁾ や Jonsson ら²⁾に見られるように、拡散係数を構成する[速度]と[長さ]のスケールに波による軌道流速や軌道直径等を単純に当てはめているものがほとんどである。この場合に基本的に問題になるのは、このような物理量が砕波帯内における拡散の実際の担い手である砕波による乱れの効果を直接表現していないという点が挙げられる。

一方、Longuet-Higgins³⁾は、通常の壁面乱流に関する混合距離理論を形式的にそのまま持ち込み、汀線を一種の壁面と見たてて、拡散の長さスケールが汀線からの距離に比例するとして取り扱っている。しかしそうすると例えば bar 地形において汀線近くで波が再生するような場合や、離岸堤などの海岸構造物すなわち他の固定境界が存在するような実際的な場合の海浜流計算において問題が生じてくる。

これに対して Battjes⁴⁾は、拡散係数の速度スケールを砕波による波のエネルギー散逸率から求め、長さスケールとして砕波による乱れが及ぶ深さをとっている。このような取り扱い、砕波の効果を拡散係数の見積りに直接反映させたものとして評価でき、その意味で従来の拡散係数の提案式の中では最も信頼しうるものであると考えられる。しかしこの場合においても、砕波による乱れがどのようなプロセスを経て実際の拡散となって現れてくるのかといった具体的な拡散の物理機構については触れておらず、通常の定常乱流での取り扱いがそのまま準用された形になっている。

最近、著者ら⁵⁾は、室内実験で得られた流速データの解析とモンテカルロ法を用いた拡散の数値シミュレーションにより、① 砕波帯内における水粒子の一周期間の平均移動距離の鉛直分布は上層で波の進行方向に大きく傾いた形となり、それが砕波帯内の拡散過程に支配的な役割を果たすこと (shear 効果)、② それは主として、砕波に伴って生じた組織的大規模渦による渦度流速成分の存在によって生じること、などを明らかにしている。そこで本研究では、このような砕波帯内での拡散のメカニズムをその本質をそこなわない範囲で簡略化しモデル化することを通じて、砕波の物理過程を反映した形の拡散係数を導出することを試みた。

2. 砕波帯内の拡散に対する shear 効果

ここでは上述のように砕波の効果を反映させた形での拡散係数を導出することを目的としているので、まず、これまで著者等によって行われた砕波帯内の乱流構造の実態やそれと拡散過程との関連についての研究結果^{5)~8)}をここで簡単に要約しておく。

① 砕波帯内の流速場は、次のような組織的大規模渦構造の存在によって特徴づけられる。すなわち、bore の crest 下部には波峰線に平行な水平軸を持つ二次元性が強い『水平渦』が存在するが、bore 後方では渦構造がかなり三次元性を帯びようになり、その渦塊は bore の進行に伴って stretch され bore の進行方向に傾いた軸を持つ『斜降渦』へと発達していく。このような大規模渦の存在により、上層での岸向き質量フラックスは、非砕波の場合に比べてかなり大きくなる^{6),7)}。

② 染料を瞬間鉛直線源として注入した拡散実験により、上述の大規模渦が砕波帯内における拡散過程に対して支配的な役割を果たすことが示された。すなわち、i) 上層に注入された染料は、『水平渦』の作用により全体として岸向きに移流されるとともに急激に岸沖方向に拡散する。『斜降渦』は染料を下層に向けて拡散させる役目を果し、約一周期後には底面付近にまでかなりの染料が拡がる。ii) 一方、下層に注入された染料は戻り流れによって全体として沖向きに移流され、その回りに若干の拡散を示すものの、その拡散幅は上層のそれに比べて

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 学生員 東京工業大学 大学院

1 オーダー以上小さい⁶⁾。

③ 二成分光ファイバー流速計によって得られている位相平均オイラー流速記録⁷⁾を時間に関して数値積分することにより、水粒子の平均的なラグランジュ的挙動を定量的に調べた結果、水粒子の一周期間の平均移動距離の鉛直分布は上層で波の進行方向に大きく傾いた形になることが示された⁵⁾ (図-1)。これは、染料による拡散の可視化実験で見られた特徴と一致する。

④ 著者らが先に示した、オイラー流速場をポテンシャル成分と渦度成分に分離する方法に基づいて水粒子の移動距離の成分分離を行った結果、上述の水粒子の平均移動距離の鉛直分布形は、主として渦度成分の存在によって生じるものであることが明らかにされた⁵⁾ (図-1)。

⑤ 上述の染料による拡散実験結果と水粒子の平均移動距離に関する計算結果に基づいて水粒子の一周後の遷移確率密度をモデル化し、モンテ・カルロ法によって拡散過程をシミュレートすることにより、砕波帯内の水平移流分散特性を検討した。その結果、水粒子の平均移動距離の鉛直分布形が岸向きに大きく傾くことが砕波帯内の水平移流分散過程に及ぼす効果 (『shear 効果』) は、支配的な重要性を持つことが明らかにされた⁵⁾。

このように、砕波によって生成される大規模渦は、上層における急激な岸方向拡散の直接の原因となるが、それと同時に、大規模渦に伴って生じた多量の渦度の存在により上層にかなり大きな岸向き質量フラックスが発生し、それによって水粒子の平均水平移動距離の鉛直分布は波の進行方向に大きく傾くことになる。その結果、開水路や管路流での拡散に支配的な役割を果たす shear 効果が砕波帯内の拡散過程においても重要な役割を果たすことになる。

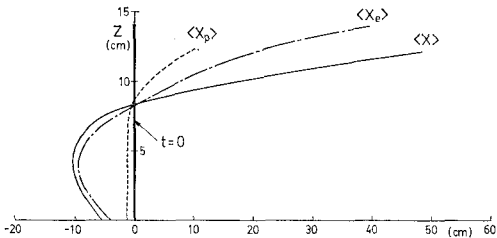


図-1 水粒子の一周期間の移動距離 $\langle X \rangle$ の計算値とその成分分離結果 ($\langle X_p \rangle$: ポテンシャル成分, $\langle X_e \rangle$: 渦度成分)

3. shear 効果に着目した拡散係数の導出

上述のように、砕波帯内の拡散過程においては shear 効果が本質的に重要な役割を果たしていると考えられるので、ここではこの shear 効果に着目した解析を行なう。そのためには水粒子の平均移動距離の算定モデルが必要となるが、上記の④項によれば、水粒子の平均移動距

離の鉛直分布形は主として渦度流速成分の存在によって決まるので、shear 効果の導入は、けっきょくこの渦度流速成分の算定モデルが基本となる。

(1) 渦度の収支から見た定式化

まず、ここでは対象となる場を図-2に示すような一定水深の帯状領域に簡略化して取り扱う。また、ここでは砕波変形が十分緩やかな領域を対象にすることとし、また、現象をとらえやすくするために local な波速 C で波とともに移動する系から見るとすれば、現象は準定常と見なせ、空間的には local な波長 L で周期的に変化する場となる。

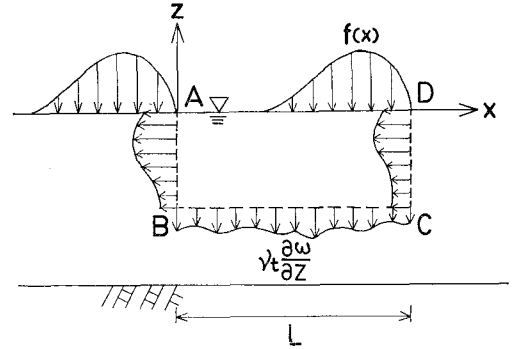


図-2 渦度の収支

そこで、図-2に示すような形で検査面 $ABCD$ をとって定常状態の渦度 ω の収支を考える。まず、 $\overline{AB}$ と $\overline{CD}$ を通過する渦度フラックスは、仮定した場の準周期性によりほぼ等しいと置けるので相殺されると考えてよい。一方、 $\overline{AD}$ 間の全渦度フラックスは、砕波により水表面から供給される渦度フラックスを $f(x)$ とすれば、

$$\int_0^L f(x) dx \dots\dots\dots (1)$$

であり、 $\overline{BC}$ 間の全渦度フラックスは、渦度の鉛直方向輸送が勾配拡散型で記述できるものとすれば、 ν_t を渦度の鉛直拡散係数として次のように表わされる。

$$\int_0^L \nu_t(x, z) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} dx \dots\dots\dots (2)$$

これらは、定常状態を考えていることから互いに等しくなければならない。すなわち、

$$\int_0^L \nu_t(x, z) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} dx = \int_0^L f(x) dx \dots\dots\dots (3)$$

ここで、上式の左辺を次のように近似する。

$$\int_0^L \nu_t(x, z) \frac{\partial \omega(x, z)}{\partial z} dx \cong \bar{\nu}_t(z) \frac{\partial}{\partial z} \int_0^L \omega(x, z) dx \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$\bar{\nu}_t(z) = \frac{1}{L} \int_0^L \nu_t(x, z) dx \dots\dots\dots (5)$$

また、次式で定義される $\bar{\omega}$, $\bar{f}$ を導入する。

$$\bar{\omega}(z) = \frac{1}{L} \int_0^L \omega(x, z) dx \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad \dots\dots\dots (7)$$

そうすると、式(3)はけっきょく次のように書ける。

$$\bar{v}_t(z) \cdot \frac{d}{dz} \bar{\omega}(z) \cong \bar{f} \quad \dots\dots\dots (8)$$

上式は平均渦度流速成分の算定に関する基本式となる。なお、上式中の $d\bar{\omega}/dz$ は、固定座標系においても同形となるので、以下では固定座標系を前提に議論をすすめる。

(2) 渦度供給過程のモデル化

上に示した定式化からも明らかなように、bore 前面での砕波による渦度供給量を見積ることが、ここでのアプローチの最も基本的な部分になる。著者等の可視化実験によれば、bore 前面では波高スケールの大規模渦がほぼ周期的に生成されることが見い出されている。砕波による表層での渦度の生成は、bore 前面でのこのような大規模渦の周期的な発生によってもたらされると考えられるので、ここではこの点に注目して渦度の供給過程をモデル化する。

いま、これらの渦の一個当りの循環を Γ_0 とし、単位時間当りの渦の発生個数を n とすれば、単位時間当たりの渦度供給量は一波長当り $n\Gamma_0$ となる。よって、

$$\bar{f} = \frac{n\Gamma_0}{L} \quad \dots\dots\dots (9)$$

このうち n は、

$$n \cong \frac{q_0}{\pi r_0} = \frac{\Gamma_0}{2(\pi r_0)^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(q_0 : 渦外縁の流速, r_0 : 渦の半径 $\cong H/2$) として概略見積もれるので、問題は、循環 Γ_0 の見積もりに帰着される。ここでは、これを次のように考えて取り扱った。

すなわち、上層で生成される大規模渦はここで着目している渦度の source であると同時にエネルギーの dissipator でもある。そこで、渦によって消費される単位時間当りのエネルギーを循環 Γ_0 を用いて表わし、これが bore 全体のエネルギー減衰率と等しいとすることによって、エネルギー減衰率から逆に循環 Γ_0 を評価する。

まず、渦によるエネルギー損失の見積もりであるが、ここでは渦の運動エネルギーが全てエネルギー損失となるとして取り扱った。渦の運動エネルギーの算定には渦をモデル化する必要があるが、ここでは日野・山崎⁹⁾にならって次式で表わされる Rankine 渦でモデル化した。

$$\left. \begin{aligned} 0 < r < r_0; \quad q &= \frac{\omega}{2} r \\ \Gamma &= \omega \pi r^2 \\ r_0 < r; \quad q &= \frac{\omega}{2} \cdot \frac{r_0^2}{r} \\ \Gamma_0 &= \omega \pi r_0^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 q : 渦による流速, r : 渦中心からの距離。この場合、渦1個の単位幅当りの運動エネルギー e は、

$$e = \frac{\pi}{16} \rho \omega^2 r_0^4 \left(1 + 4 \ln \frac{a}{r_0} \right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。ただし、 ρ は流体の密度, a は $q \cong 0$ とみなせる r である。上式は、循環 Γ_0 を用いることにより、 $\Gamma_0 = \omega \pi r_0^2$ なる関係から、

$$e = \frac{\rho}{16\pi} \Gamma_0^2 \left(1 + 4 \ln \frac{a}{r_0} \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

とも表わせる。したがって、一波内での単位時間当りのエネルギー散逸量 ϵ は次式で表わされることになる。

$$\epsilon \cong n e = \frac{n\rho}{16\pi} \Gamma_0^2 \left(1 + 4 \ln \frac{a}{r_0} \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

一方、エネルギー散逸量 ϵ は、以下に示すように bore のエネルギー減衰率によっても関係づけられる。すなわち、固定座標系でのエネルギー保存式、

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_g E) = -\frac{\epsilon}{L} \quad \dots\dots\dots (15)$$

より、定常状態を考えれば、

$$\epsilon = -L \frac{\partial}{\partial x} (C_g E) \equiv L \Phi_a \quad \dots\dots\dots (16)$$

と表わされる。ここで、 Φ_a は、いわゆるエネルギー散逸関数である。

よって、式(14)と式(16)を等しく置くことにより、循環 Γ_0 をエネルギー散逸関数 Φ_a によって次のように表わすことができる。

$$\Gamma_0^2 = \frac{8\pi}{\rho n} \cdot L \Phi_a \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、ここで $2(1+4 \ln(a/r_0))^{-1} \cong 1$ と置いている。

(3) オイラー平均流速分布 $\bar{u}(z)$ の算定

shear 効果の導入の前提となる水粒子の平均移動距離の鉛直分布を得るには、先の④項に基づいてポテンシャル成分を無視するとしても、本来ならば、オイラー流速成分をラグランジュ的に一周期間積分して求める必要がある。しかし、ここでは簡単のため、一波長平均のオイラー流速 $\bar{u}(z)$ によって水粒子の平均移動距離が決まるとして取り扱うことにする。

先の式(8)を z について2回積分すると、オイラー平均流速 $\bar{u}(z)$ の鉛直分布形に関する具体的な関数形を得ることができる。

$$\bar{u}(z) = - \int_z^0 \int_{\zeta}^0 \frac{\bar{f}}{\bar{v}_t(\zeta')} d\zeta' d\zeta + \frac{d\bar{u}}{dz} \Big|_0 z + \bar{u}_0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $d\bar{u}/dz|_0, \bar{u}_0$ は、それぞれ $z=0$ での $d\bar{u}/dz, \bar{u}$ である。特に $\bar{v}_t(z) = \bar{v}_{t0} = \text{const.}$ の場合には、式(18)は、次のような放物線分布となる。

$$\bar{u}(z) = - \frac{\bar{f}}{2\bar{v}_{t0}} z^2 + \frac{d\bar{u}}{dz} \Big|_0 z + \bar{u}_0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(18)あるいは式(19)により、 $\bar{u}(z)$ はけっきょく4つのパラメータ、 $\bar{f}$, $\bar{v}_t$ (or $\bar{v}_{t0}$), $d\bar{u}/dz|_0$, $\bar{u}_0$ によ

て表現されることになるが、このうちの1つのパラメータは、次の条件式、

$$\int_{-h}^0 \bar{u}(z) dz \equiv 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

によって独立でなくなる (h : 水深)。

ここでは、砕波による渦度の生成に起因する shear 効果の出現という現象の本質をそこなわない範囲でできるだけ簡略化して取り扱うことを目的としているので、以下では式 (19) を対象として議論を進めることにする。

そうすると、式 (20) によって $\bar{u}_0$ を消去するものとすれば、

$$\bar{u}_0 = \frac{du}{dz} \Big|_0 \frac{h}{2} + \frac{\bar{f}}{6\bar{\nu}_t} h^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。また、式 (19) の $d\bar{u}/dz|_0 (= -\omega_0)$ であるが、これを境界条件として確定するには、水表面での渦度の一周期間の減衰過程をモデル化する必要があるため、ここでは、簡単に次のような付加的な条件に置きかえた。

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = -\bar{\omega} = 0 \quad (z = -h) \quad \dots\dots\dots (22)$$

これは、底面近傍では、底面において生成される逆符号の渦度によって表層からの渦度が相殺され、 $\bar{\omega} = 0$ となる点が現われることを念頭に置いた仮定である。これにより $\bar{u}(z)$ は次式の形に書ける。

$$\bar{u}(z) = -\frac{\bar{f}h^2}{2\bar{\nu}_{t0}} \left\{ \left(\frac{z}{h} + 1 \right)^2 - \frac{1}{3} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

次に $\bar{\nu}_{t0}$ について考える。 $\bar{\nu}_{t0}$ は大規模渦の長さスケール ($\sim H$) と速度スケール ($\sim q_0/2$) に支配されると考えられるが、大規模渦は上層の crest 位相に集中していることを考慮して、 $\bar{\nu}_{t0}$ としては一波長内の全領域の平均をとって次式で評価した。

$$\bar{\nu}_{t0} \cong \frac{Hq_0}{2} \cdot \frac{HL}{3hL} = \frac{\gamma}{6\pi} |I_0| \quad \dots\dots\dots (24)$$

(4) 拡散係数の導出

以上により、平均流速分布 $\bar{u}$ を具体的に水深 h と波の諸元 H ($\cong \gamma h$), T , ならびにエネルギー散逸関数 Φ_a によって表わすことができた。そこでこれから shear 効果に基づく水平拡散係数 (移流分散係数) K_x を求める。関水路や管路での移流分散に関する理論 (Taylor¹⁰⁾, Elder¹¹⁾) によれば K_x は次式により求まる。

$$K_x = -\frac{h^2}{\bar{\nu}_{t0}} \int_0^1 \left\{ \bar{u} \left(\int_0^{\eta'} \bar{u} d\eta'' \right) d\eta' \right\} d\eta \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$\eta = \frac{h+z}{h}$$

これに式 (23) を代入して K_x を求めると以下のようになる。

$$K_x = 0.00212 \frac{\bar{f}^2 h^6}{\bar{\nu}_{t0}^3} \quad \dots\dots\dots (26)$$

上式中の $\bar{f}$ と $\bar{\nu}_{t0}$ に式 (9) と式 (24) を代入すると、

$$K_x = 0.00212 \times (4\pi)^3 \frac{n^2 h^6}{\gamma^3 |I_0| L^2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

さらに上式の n と I_0 に式 (10) と式 (17) を代入すると最終的に次式を得る。

$$K_x = 2.9 \gamma^{-19/3} \left(\frac{h}{L} \right)^{5/3} h \left(\frac{\Phi_a}{\rho} \right)^{1/3} \quad \dots\dots\dots (28)$$

(5) 結果の検討

上の結果の妥当性について、現地の拡散データに基づいて定量的に検討する必要があるが、残念ながらこれまでのところ著者らの知る限りでは検討の対象としうる精度の良い現地データはほとんど存在しない。そこで、ここでは以下のような概略的な検討を行うことにする。

ここでエネルギー散逸関数 Φ_a を具体的に眺めて上式で得られる K_x の値について検討してみる。 Φ_a としては、いくつかの半経験式が提案されているが、ここでは最も簡単に、波の場を線形長波とし $H \cong \gamma h$ の関係から Φ_a を評価する。

$$\begin{aligned} \Phi_a &= -\frac{\partial}{\partial x} (C_g E) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{gh} \frac{\rho g}{8} \gamma^2 h^2 \right) \\ &= -\frac{5}{16} \rho (gh)^{3/2} \gamma^2 \frac{dh}{dx} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここで、一様勾配 ($s = -dh/dx = \text{const.}$) の斜面を考えることにし、上式を式 (28) に代入すると次式を得る。

$$K_x \cong 2 \gamma^{-17/3} \left(\frac{h}{L} \right)^{5/3} h \sqrt{gh} s^{1/3} \quad \dots\dots\dots (30)$$

上式を Longuet-Higgins³⁾ による半経験式

$$K_x = N h \sqrt{gh} s^{-1} \quad \dots\dots\dots (31)$$

と比較すると、いまの場合

$$N = 2 \gamma^{-17/3} (h/L)^{5/3} s^{4/3} \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる。いま、 $\gamma = 0.8$ とし、 h/L , s に対してそれぞれ $h/L = 1/10 \sim 1/30$, $s = 1/8 \sim 1/50$

として上式に代入すると

$$N = 1 \times 10^{-2} \sim 1.5 \times 10^{-4} \quad \dots\dots\dots (33)$$

となり、これまで経験的に知られている、 $N = O(10^{-2}) \sim O(10^{-3})$ という値とオーダー的にはほぼ等しくなっている。また、Battjes⁴⁾ による

$$N = M \left(\frac{5\gamma^2}{16} \right)^{1/3} s^{4/3} \quad \dots\dots\dots (34)$$

と比較すると、いまの場合、相対水深依存性 (したがって周期依存性) が新たに付け加わった形になっているが、これは bore 前面での砕波による渦度供給の頻度が波の周期に依存するためで、その点、本研究で得られた評価式は物理的に妥当性がより高いと考えられる。

4. おわりに

本研究では、砕波過程を拡散係数の導出に反映させるための一つの枠組みを提供することを目的とした理論展

開を行った。特に、ここでは、これまでの著者らの研究によりその重要性が明らかにされている shear 効果を拡散係数の導出過程に取り込むことに主眼を置き、そのための砕波による渦度の供給過程のモデル化等を行った。

これらのモデル化に当っては、砕波による渦度の生成に起因する shear 効果の出現という現象の本質をそこなわない範囲で数多くの簡略化を行っている(特に $\bar{v}_t$ の見積もり等)。その意味では今後さらに定量的な検討を加えた上で、細部の修正を行う必要もあると考えられる。

なお、ここでは shear 効果をもたらす水粒子の平均水平移動距離の鉛直分布を簡単のため砕波に基づく渦度流速成分のみによって評価しているの、砕波帯外では $K_x=0$ となる形になっている。しかし、実際には、非砕波の場合でもいわゆる質量輸送速度の鉛直分布の存在によって、物質あるいは運動量の岸沖方向混合が生じると考えられる。この点や、ここで示した拡散係数が適用できる拡散の時間スケールや空間スケールの問題等については別の機会に述べるつもりである。

最後に、本研究は文部省科学研究費(奨励研究(A))の援助を受けて行ったものであることを付記しておく。

参 考 文 献

1) Thornton, E. B.: Variation of longshore current

- across the surf zone, Proc. 12th Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 291~308, 1970.
- 2) Jonsson, I. G., Skovgaard, O. and Jacobsen, T. S.: Computation of longshore currents, Proc. 14th Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 699~714, 1974.
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 1, 2, J. Geophys. Res., Vol. 75, No. 33, pp. 6778~6801, 1970.
- 4) Battjes, J. A.: Modeling of turbulence in the surf zone, Proc. Sympo. on Modeling Techniques, ASCE, pp. 1050~1061, 1975.
- 5) 灘岡和夫・日野幹雄・広瀬文人: 砕波帯内における水粒子拡散のメカニズムについて, 第30回水理講演会論文集, pp. 757~762, 1986.
- 6) 日野幹雄・灘岡和夫・小俣 篤: 砕波帯内の乱れの組織的渦構造と水粒子運動について, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 1~5, 1984.
- 7) 灘岡和夫・小谷野喜二・日野幹雄: 二成分光ファイバー流速計を用いた砕波帯内流速場の特性の解明, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 50~54, 1985.
- 8) 日野幹雄・灘岡和夫・小谷野喜二: 崩れつつ進行する波のポテンシャル成分と渦度成分の分離方法について, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 55~59, 1985.
- 9) 日野幹雄・山崎丈夫: 波による鉛直板よりの渦の形成とエネルギー逸散, 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 61~65, 1971.
- 10) Taylor, G. I.: The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. Proc. Royal Soc. London, Ser. A, Vol. 223, pp. 446~468, 1954.
- 11) Elder, J. W.: The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., pp. 544~560, 1959.