

成層二層流における界面抵抗と連行係数

中野 晋*・鶴谷 広一**・一戸 秀久***

1. ま え が き

二層流体の密度界面での抵抗や混合現象を調べることは、内湾での水質予測等の問題とも関係が深く重要である。

界面が不安定となり内部波が発生し、それが碎波しはじめると界面での混合は活発になる。混合の活発化と同時に界面変動や混合にともなう付加的な応力のため界面抵抗は増大する。このように界面の抵抗や混合は内部波の特性と密接に関係している。また日野他^{1),2)}は流速分布より連行係数を求める方法を提案しているが、これは界面抵抗と混合が強く結びついていることを意味している。従って界面の抵抗、混合及び内部波は相互に関係が深く、切り離して考えられないが、3つの特性を結びつけて検討した研究は意外と少ない。

われわれはまず内部波等の界面の特性量と流速分布について詳細な実験を行い、その普遍的性質について検討した。さらにその結果に基づいて、界面抵抗係数及び連行係数の定式化を行ったのでそれを報告する。

2. 実験とデータ解析の概要

(1) 実験の概要

実験は文献 3), 4) とほぼ同様なので概要を述べる。実験水路は幅 15 cm, 深さ 30 cm, 全長約 3.1 m のアクリル製で、静止した真水層の下を塩水が流れる下層二層流について実験を行った。実験ケースは表一に示す 4 ケースであるが、このほかに吹送流型二層流の実験結果³⁾(ケース D) も一部用いている。なおケース B は文献 4) で発表したデータを再整理したものである。ケース B 及び B-I の底面は滑面であるが、ケース B-II, B-III は界面の特性に及ぼす底面粗度の効果を調べるために、アクリル製角柱の 2 次元粗度を底面に取り付けた。B-II, B-III で用いた粗度の形状はそれぞれ幅 4 mm, 高さ 2 mm, 幅 4 mm, 高さ 5 mm でその中心間隔は 16 mm, 36 mm である。

表一 実験ケース

ケース	底 面	10 ² ε	h ₂ (cm)	$\bar{U}$ (cm/s)
B	滑 面	1.82~5.06	10.1~10.5	1.35~7.68
B-I	滑 面	0.90~1.04	10.5~10.7	1.08~5.06
B-II	粗 面	0.89~1.04	10.2~10.8	1.37~4.64
B-III	粗 面	0.81~1.03	10.2~10.8	1.40~4.42

測定項目は①流速分布②塩分濃度分布③内部波高④連行速度⑤界面勾配である。流速は 1 成分熱膜流速計、塩分濃度は導電率計、内部波高は抵抗線式内部波高計を用いて測定した。また連行速度は給排水を止めた時の界面の上昇速度を導電率計の出力変化から換算して求めた。界面勾配は 50 cm 離れた 2 点の濃度分布から求めた界面の位置より算出した。

(2) データ解析の概要

座標は x 軸を水平な底面に沿う下層流の方向にとり、界面から鉛直下向きに z 軸をとる。界面の位置は上・下層の密度の中間の位置とする。

界面摩擦速度 u_* は Ura et al.⁶⁾ と同様に成層二層流に対する定常不等流の基礎方程式を用いて界面勾配より評価した。混合を無視した場合の界面抵抗係数 f'_i は

$$f'_i = 2 \frac{-\varepsilon(1-F_i^2) \frac{dh_2}{dx} + \frac{\tau_b}{\rho_2 g h_2} + 2 \frac{\tau_w}{\rho_2 g B}}{\varepsilon F_i^2 H (H - h_2)} \dots\dots\dots (1)$$

で表される。ここに、 $\varepsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_1$, $F_i (= \bar{U} / \sqrt{\varepsilon g h_2})$ は下層の内部フルード数、 h は水深、 ρ は密度、 $\bar{U}$ は平均流速、 B は水路幅、 τ_b は底面摩擦力、 τ_w は側面摩擦力、 H は全水深、添字 1, 2 はそれぞれ上層、下層を表す。これに混合による付加応力 $f_{im} (= 2E)^7$ を考慮して、次のように u_* を評価した。

$$f_i = f'_i + 2E \dots\dots\dots (2)$$

$$u_* = (f_i/2)^{1/2} \bar{U} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $E (= W_e \bar{U})$ は連行係数、 W_e は連行速度である。各ケースの E と F_i の関係は次のとおりである。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{B} & E = 1.004 \times 10^{-3} F_i^{2.003} \\ \text{B-I} & E = 9.747 \times 10^{-4} F_i^{2.155} \\ \text{B-II} & E = 1.645 \times 10^{-3} F_i^{2.374} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所海洋水理部水理研究室
** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所海洋水理部水理研究室長
*** 運輸省第二港湾建設局八戸港工事事務所

B-III $E=2.250 \times 10^{-3} F_i^{2.457}$ }

また、底面及び側面摩擦力は Einstein の方法⁷⁾による断面分割を考え、Manning 式を用いて評価した。

$\tau_b = -\rho_2 g (n_b \bar{U})^{3/2} i_2^{1/4}$ (5)

$\tau_w = -\rho_2 g (n_w \bar{U})^{3/2} i_2^{1/4}$ (6)

$i_2 = -\varepsilon (1 - F_i^2) (dh_2/dx)$ (7)

ここに、 n_b 、 n_w は底面及び側面の Manning の粗度係数、 i_2 は下層のエネルギー勾配である。 n_w とケース B、B-I の n_b は 0.01 とし、B-II、B-III の n_b は底面付近の流速分布に対数則を適用して底面摩擦力を評価した結果からそれぞれ 0.020、0.021 とした。

実験水路では側壁や底面の流れに及ぼす影響は無視できないため、代表水深として下層水深 h_2 を用いてレイノルズ数等を表すとそれらのパラメータに水路の特性が直接含まれてしまう可能性が高い。そこで界面での特性を正しく評価する目的で今回の解析では次式で与えられた径深 R を代表水深とした。

$R = \tau_i / \rho_2 g i_2 = u_*^2 / g i_2$ (8)

ここに τ_i は界面せん断応力である。また R と界面も 1 つの壁面と考えた場合の幾何学的径深 $R' (= Bh_2/2(B+h_2))$ との比 R/R' はケース B、B-I、B-II、B-III それぞれ 0.86、0.89、0.79、0.65 程度であり、底面の効果が大きいほど R/R' は小さくなっている。

3. 界面近傍の特性

密度界面では浮力効果のため乱れの生成は界面変動によるもの以外は小さくなっており、界面近傍の流れは境界層流の内部層と類似した性質を持っていると考えられる。そこで特性長さ及び速度として ν/u_* (ν は流体の動粘性係数)、 u_* が考えられるが、これらを用いて overall のリチャードソン数 $\bar{R}_i$ を表わすと

$\bar{R}_i = \frac{\varepsilon g \nu}{u_*^3} = K^{-1}$ (9)

となる。これは Csanady⁸⁾、Ura et al.⁹⁾ が用いているクーリガンパラメータ K の逆数である。 $\bar{R}_i$ あるいは K は界面近傍の特性スケールのみで記述される無次元量であり、界面での現象と深く係っていると考えられる。そこで以下では K を用いて界面近傍の特性を調べる。

(1) 内部波高

図-1 は内部波高を界面の時間変化 $\eta(t)$ の rms 値 $\sqrt{\eta^2}$ で代表させ、これを ν/u_* で無次元化したものを K に対してプロットしたものである。ケースによる大きな違いは見られず、内部波高がこの無次元化で統一的に表される。また B-I、B-II、B-III で違いがないことから底面粗度が内部波に及ぼす影響はそれほど大きくないことがわかる。内部波高は K が 0.1 を越えると急激に大きくなっており、 $K=0.1$ 付近で界面が不安定な

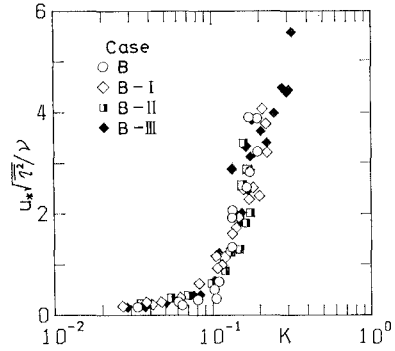


図-1 内部波高と K の関係

状態に移移するものと思われる。このことから界面の安定限界は $K_c=0.1$ で表される。

(2) 界面での乱れ強度

図-2 は水平方向の乱れ強度の界面での値 $(\overline{u'^2})^{1/2}$ を u_* で無次元化したものを K に対してプロットしたものである。界面での無次元乱れ強度が K にともなって増大することがわかる。またこれは界面が安定である $K < 0.1$ では大むね K の $2/3$ 乗に比例し、 $K > 0.1$ では界面変動にともなう流速変動の増加により、 K の $3/2$ 乗に比例するようになる。

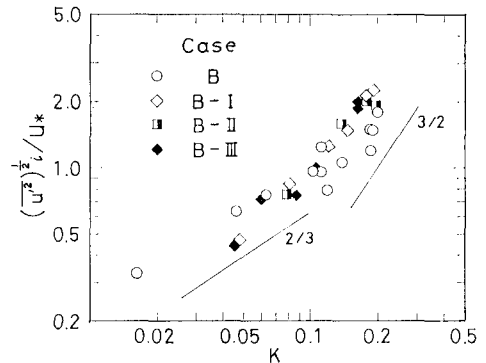


図-2 界面での乱れ強度と K の関係

(3) 連行係数

図-3 は、 u_* を代表速度として用いた連行係数 E_* ($= W_e/u_*$) と K の関係である。 E_* も K に対してプ

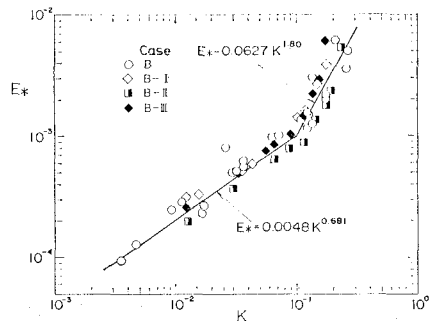


図-3 連行係数 E_* と K の関係

プロットするとよくまとまり、次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E_* &= 0.00480 K^{0.681} & (K < 0.1) \\ &= 0.0627 K^{1.80} & (K \geq 0.1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

4. 平均流速分布と界面抵抗係数

(1) 平均流速分布

図-4 は $(u-u_i)/u_*$ を $u_* z_i/\nu_e$ に対してプロットしたものである。ここに u_i は界面での平均流速（界面流速）、 ν_e は次式の有効動粘性係数である。

$$\nu_e = u_*^2 / (du/dz)_i \dots\dots\dots (11)$$

このように有効動粘性係数を用いて流速分布を整理すると、ケースが異なっても最大流速付近までよくまとまり、1本の曲線で表される。加藤他^{8),4)}や Ura et al.⁶⁾が明らかにしているように界面付近では直線的な分布をし、それに続く領域は対数分布に従っており、日野他^{1),2)}が提案している対数+直線分布とは異なっている。最大流速点までの流速分布は次の2式で表される。

$$\frac{u-u_i}{u_*} = \frac{u_* z_i}{\nu_e} \quad (0 \leq z_i \leq \delta) \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{u-u_i}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_i}{\delta} + \delta_s \quad (\delta < z_i \leq z_{\max}) \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 δ は直線分布から対数分布に移る高さで、 κ はカルマン定数で 0.4、 δ_s は $u_* \delta / \nu_e$ であり、今回の実験

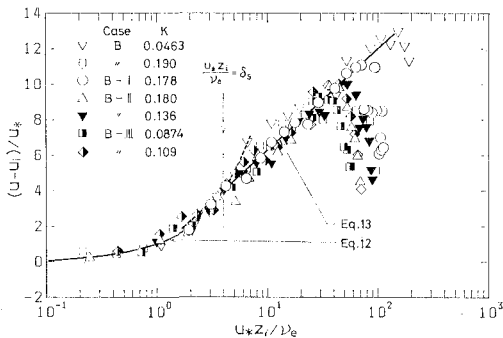


図-4 平均流速分布

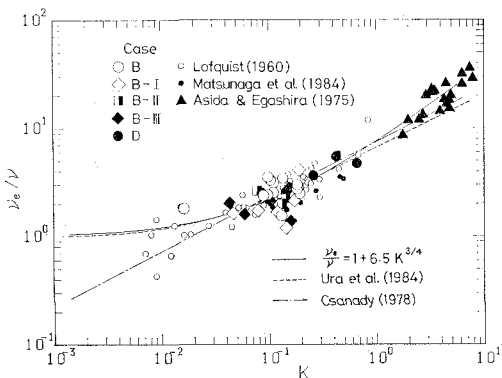


図-5 有効動粘性係数と K の関係

では4程度と一定であった。上層流の Ura et al. の実験ではこれが4～6であり、ほぼ一致している。また、 $z_{\max}$ は最大流速の発生する高さである。

図-5 は有効動粘性係数と K の関係を調べたものである。今回の実験値は Lofquist⁹⁾、松永他¹⁰⁾の実験とほぼ一致している。芦田・江頭¹¹⁾は界面での混合距離 l_0 ($=u_* (du/dz_i)^{-1}$) を調べているが、 l_0 と ν_e の間には

$$\nu_e = u_* l_0 \dots\dots\dots (14)$$

の関係があるので、これを用いて変換して同時に示した。

界面せん断応力 τ_i は主として粘性応力 τ_{iv} と界面変動にともなう τ_{iw} で占められていると考えられる¹²⁾。つまり、

$$\tau_i = \tau_{iv} + \tau_{iw} = \rho(\nu + \nu') \left(\frac{du}{dz_i} \right)_i \dots\dots\dots (15)$$

である。ここに ν' は界面変動にともなって生じる渦動粘性係数である。さらに ν_e が $\nu + \nu'$ であることを考えると ν_e/ν は次の関数で表されるであろう。

$$\frac{\nu_e}{\nu} = 1 + \frac{\nu'}{\nu} = 1 + aK^b \dots\dots\dots (16)$$

図-5 に $a=6.5$ 、 $b=3/4$ とした場合の曲線を実線で示したが、実験値をよく説明している。なお Csanady⁸⁾により提案されているものは式 (17) であり、Ura et al.⁶⁾によるものは式 (18) である。

$$\nu_e/\nu = 7.3 K^{1/2} \dots\dots\dots (17)$$

$$\nu_e/\nu = (1 + 40K)^{1/2} \dots\dots\dots (18)$$

図-6 は界面での平均流速 u_i と u_* の比 u_i/u_* と K の関係を調べたものである。今回の実験の範囲では u_i/u_* は K にともなって少しずつ増加しており、最小自乗法により次の関係が得られる。

$$u_i/u_* = 15.16 K^{0.1752} \dots\dots\dots (19)$$

しかし界面流速は上層・下層水深や底面粗度等の外部要因に影響を受けやすく、適切な外部パラメータを含んだ関数で表されるべきであろう。なお上層流で測定された界面流速の値は日野他¹⁾の報告によると最大流速との比 $u_i/U_{\max}$ は 0.35～0.65 程度である。

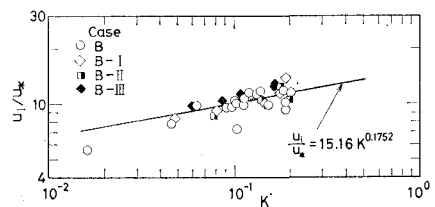


図-6 u_i/u_* と K の関係

(2) 界面抵抗係数

今回対象とした流れは下層流であるが、界面から最大流速点までを考えれば、上層流と同じ取扱いができる。

これは管路流で壁面から管中心までの流れを開水路流れに拡張して適用するのと同様である。そこで問題を簡単にするため、ここでは壁面の影響が無視できる場合の上層二層流を想定して議論を進める。

さて、式(12)、(13)のように界面から最大流速点までの流速分布則が得られた。Ura et al.⁶⁾や日野他^{11,12)}は上層二層流の水面近くで流速がほぼ一定になることを示している。しかし開水路流れで側壁の影響が無視できる場合には水面で流速が最大になるのに対し、側壁の影響が強くなると水面下に最大流速が発生することが報告されており¹³⁾、このことから考えて、上層二層流の場合に水面近くで流速が一定あるいは少し小さくなるのは壁面の影響によるものと考えられる。しかし、壁面の影響が無視できる場合には水面で流速が最大となり、流速分布は水面まで式(13)で表されるところと考えるのが妥当であろう。

界面抵抗係数は流速分布則を鉛直に積分し、上層の断面平均流速を求めれば算出できる。まず、式(12)、(13)を $\eta_i (=z_i/h_1)$ を用いて書き換える。なおここでは z_i 軸は界面より鉛直上向きと考える。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{\delta_s}{\delta_*} \eta_i + V_* \quad (0 \leq \eta_i \leq \delta_*) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\eta_i}{\delta_*} + \delta_s + V_* \quad (\delta_* < \eta_i \leq 1) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 $V_* = u_i/u_*$ 、 $\delta_* = \delta/h_1 = \delta_s R_*^{-1}(\nu_e/\nu)$ 、 $R_* = u_* h_1/\nu$ である。両式を鉛直に積分し、断面平均流速 $\bar{U}$ は次式で与えられる。

$$\bar{U}/u_* = \kappa^{-1}(\delta_* - \ln \delta_* - 1) - 0.5\delta_s \delta_* + \delta_s + V_* \quad \dots\dots\dots (22)$$

これより、界面抵抗係数は

$$f_i = 2(u_*/\bar{U})^2 \\ = 2\{\kappa^{-1}(\delta_* - \ln \delta_* - 1) - 0.5\delta_s \delta_* + \delta_s + V_*\}^{-2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

で表れる。また、 δ_* 、 V_* はそれぞれ次のように表される。

$$\delta_* = \delta_s(\nu_e/\nu) R_*^{-1}(f_i/2)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$V_* = (u_i/\bar{U})(f_i/2)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに $R_e (= \bar{U} h_1/\nu)$ はレイノルズ数である。また ν_e/ν は式(16)のように K の関数であり、さらに K は

$$K = \phi(f_i/2)^{3/2} = (R_e F_i^2)(f_i/2)^{3/2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

と R_e 、 F_i 、 f_i で表される。ここに ϕ は岩崎数である。

図-7は式(23)で計算された理論値と実験値及び現地での観測値^{7),9),10),14),15),16)}を比較したものである。な

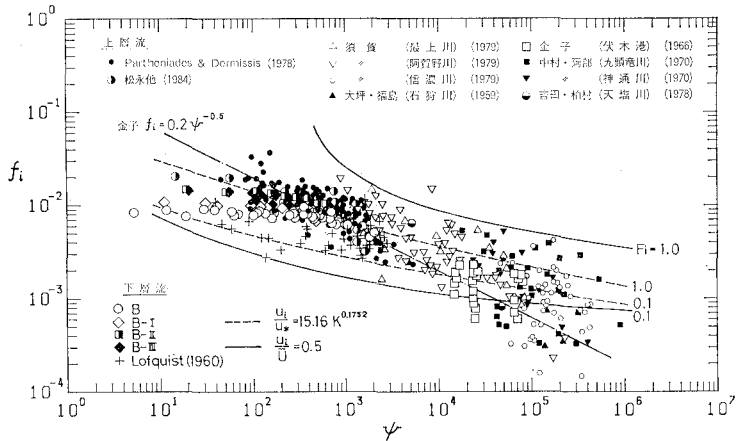


図-7 界面抵抗係数

お $\delta_s=4$ とし、界面流速は式(19)を用いた場合(破線)と $u_i/\bar{U}=0.5$ とした場合(実線)の両方について計算している。また実験データは壁面の影響を考慮して f_i を評価しているものだけに限定してプロットした。通常観測されている内部フルード数 F_i は0.1~1.0程度と考えられるので F_i が0.1と1.0の計算値を図に示している。界面流速を変えた両方の計算曲線は実測値を良好に説明しており、式(23)が妥当であることを示しているが、界面流速の与え方により曲線はかなり異っており、界面抵抗係数を評価する上で界面流速は重要な要素であることがわかる。

5. 連行係数

連行係数 $E (=W_e/\bar{U})$ は従来層平均リチャードソン数 $R_{i*} (= \varepsilon g h/\bar{U}^2)$ のみの関数で表されてきたが、最近加藤他^{3),4)}や浦他¹⁷⁾は連行係数に及ぼす乱れの寄与に注目して検討し、連行係数が R_{i*} だけで表し得ないことを明らかにしている。われわれは3.(3)で連行係数 E_* が式(10)で表されることを示したが、 K は式(26)で表され、 E_* は式(27)のように E に置き換えられるので式(10)から $E=f(R_e, R_{i*}, f_i)$ の形に変換できる。

$$E_* = E(f_i/2)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$E = 0.00480 R_e^{0.681} R_{i*}^{-0.681} (f_i/2)^{1.5215} \\ \left. \begin{aligned} & (R_{i*} > 10 R_e (f_i/2)^{3/2}) \\ & = 0.0627 R_e^{1.80} R_{i*}^{-1.80} (f_i/2)^{3.20} \\ & (R_{i*} \leq 10 R_e (f_i/2)^{3/2}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

さらに f_i は R_e と F_i 、つまり R_e と R_{i*} の関数であるので、 $E=f(R_{i*}, R_e)$ で表されることがわかる。

図-8は界面流速として式(19)を用いて式(28)を計算した結果と実験値を比較したものである。なお R_{i*} を求める際には径深 R を用いている。須賀のデータは文献15)の付表で詳しい水理量のわかるデータについて幾何学的水深 $R' (=Bh_1/(2B+h_1))$ を求め、新たに R_{i*}

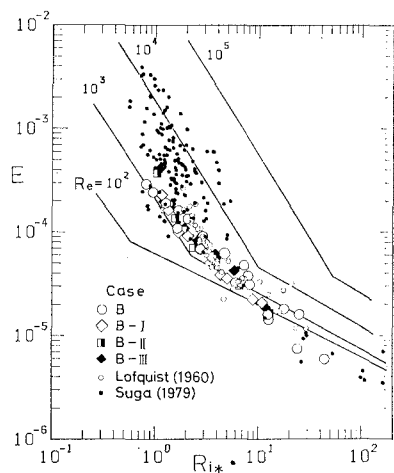


図-8 連行係数

を計算した。Lofquist⁹⁾のデータも同様に $R' (= Bh_2 / 2(B+h_2))$ を用いている。実験値のレイノルズ数の範囲はわれわれの実験が $Re=250 \sim 2000$ 、須賀の実験が $Re=1000 \sim 30000$ 程度、Lofquist の実験が $Re=1000 \sim 8000$ 程度である。同一 R_{ik} でも Re が大きいほど連行係数が大きくなっており、連行係数が Re の影響を受けていることがわかる。また曲線の屈折点が界面の安定限界に対応しているが、内部波の発生によって混合が急に増加することがわかる。

6. あとがき

内部波等の界面での特性量と流速分布について、その普遍的性質のいくつかが明らかになった。またこれらの結果を用いて界面抵抗係数及び連行係数を算定し、界面抵抗係数と連行係数が密接に関係していることや連行係数が層平均にリチャードソン数とレイノルズ数の関係であること等がわかった。

最後に本研究における実験は、当初いろいろな乱れの条件下での内部波の発生と発達の特性を調べる目的で各種粗度上での下層二層流の実験を加藤 始・茨城大教授の立案と御指導のもとに行ったものがきっかけとなっている。その後乱れの特性及び連行係数に関するデータを加えたが、本論文とりまとめに際しても有益な意見を頂いた。また実験及びデータ整理には元水理研究室の池田高

則技官（現運輸省第四港湾建設局勤務）に、図面の作成には鷹濱 潤技官の協力を頂いた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 日野幹雄・グエン ソンフン・中村健一・東江隆夫：塩水楔の流速分布における Monin-Obukhov 理論の適用性について——抵抗および連行係数——，第 27 回海岸工学講演会論文集，pp. 414～418，1980。
- 2) Hino, M. and Nguen son Hung: Velocity distribution, interfacial friction and entrainment in two-layered stratified flows, Jour. Hydrosoci. Hydraul. Eng., Vol. 1, No. 1, pp. 9～36, 1983.
- 3) 加藤 始・池田高則：下層二層流の実験（1）——流速分布と連行係数——，第 28 回海岸工学講演会論文集，pp. 520～524，1981。
- 4) 加藤 始・中野 晋・池田高則：下層二層流の実験（2）——連行係数，内部波及び乱れの特性——，第 29 回海岸工学講演会論文集，pp. 540～544，1982。
- 5) 鶴谷広一・中野 晋・戸秀久：吹送流による密度界面の混合と乱れ特性，第 31 回海岸工学講演会論文集，pp. 665～659，1984。
- 6) Ura, M., T. Tsubaki and N. Matsunaga: Characteristics of flow and turbulence near the interfacial waves in upper-layer flow, Jour. Hydrosoci. Hydraul. Eng., Vol. 2, No. 1, pp. 27～45, 1984.
- 7) 土木学会編：水理公式集，p. 616，1971。
- 8) Csanady, G. T.: Turbulent interface layers, Jour. Geophys. Res., Vol. 83, No. C5, pp. 2329～2342, 1978.
- 9) Lofquist, K.: Flow and stress near an interface between stratified liquids, The Physics of Fluids, Vol. 3, No. 2, pp. 158～178, 1960.
- 10) 松永信博・浦 勝・並川 正・椿東一郎：上層流における界面近傍の流れ特性，第 28 回水講演集，pp. 345～351，1984。
- 11) 芦田和男・江頭進治：泥水密度流に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 237 号，pp. 37～50，1975。
- 12) 中野 晋・鶴谷広一・戸秀久：淡塩二層界面の抵抗と混合特性，港湾技術研究所報告，第 24 巻第 2 号，pp. 239～273，1985。
- 13) 福津家久・中川博次：直線開水路乱流の三次元流れに関する実験的研究，第 29 回水講演集，pp. 769～774，1985。
- 14) 吉田静男・柏村正和：河口二成層の流れ構造の解析，第 25 回海岸工学講演会論文集，pp. 460～464，1978。
- 15) 須賀寛三：感潮河川における塩水くさびの水理に関する基礎的研究，土木研究所資料，1537 号，pp. 1～229，1979。
- 16) Partheniades, E. and V. Dermisis: Interfacial friction coefficients in a two-layer stratified flow, Proc. 16th Conf. Coastal Eng., Vol. III, pp. 2778～2797，1978。
- 17) 浦 勝・椿東一郎・松永信博・並川 正：密度界面における連行に及ぼす乱れの寄与，第 29 回水講演集，pp. 401～406，1985。