

有限振幅波による柱体の振動特性

石 田 啓*・近 田 美 則**

1. 緒 言

最近の調査によると、新潟沖に大規模な海底油田が存在する可能性が極めて高くなり、この開発計画が一段と現実味を帯びて来たと言える。このような海底油田の開発に際し、まず必要なことは、海洋構造物の安全かつ合理的な設計施工である。著者らはすでに、マトリックス法を用いる柱状構造物の波浪応答解析法を提示し^{1),2)}、さらに石油堀削装置を想定したプラットフォームの波浪振動解析を行った³⁾が、ここに用いた波の理論は、いずれも微小振幅波理論であった。この計算では、波力式として用いるモリソン公式の抗力項は、フーリエ級数に展開して取り扱うため、波の周波数の奇数倍の周波数を持つ成分波力が生じ、そのため構造物の固有周期の奇数倍の周期を持つ波による共振が生じるが、実験では、さらに固有周期の偶数倍の波による共振もまた発生する⁴⁾。この共振特性は、微小振幅波理論から説明することは不可能であり、ストークス波理論を用いて初めて説明し得る。

一方、極浅海波あるいは碎波の場合、尖鋭化した波峯に含まれる高周波数成分波により、ある種の条件下で共振が発生することが予想されるが、こういった振動現象もまた、微小振幅波理論から説明することはできず、クノイド波などの有限振幅波理論によらなければならない。

本研究では、まず、ストークス波の第3近似解⁵⁾を伝達マトリックス法¹⁾に適用した場合の柱体の振動計算法を新たに提示し、その計算値と実験値とを比較する。次いで、クノイド波の近似解であるハイパボリック波理論⁶⁾を構造特性マトリックス法⁷⁾に適用した場合の柱体の振動変位の計算例を示し、最後に、碎波による円柱の振動について、ハイパボリック波理論を用いた計算値と実験値との比較を行う。

2. ストークス波による柱体の振動

2.1 解析方法

図—1に示すように、水底を x 軸とし、静止状態の柱の中心軸を鉛直軸 z とする。 x 軸方向の水粒子速度を

u 、その加速度を $\dot{u}$ とし、 z 軸からの柱の水平方向変位を ξ とする。柱に働く x 軸方向の波力を、相対水粒子速度を用いたモリソン公式で与え、柱の変位速度の2乗項を無視すると、柱の横振動の方程式は、

$$(\rho A + K\rho_w A)\ddot{\xi} + (c_1 + 2C_D|u|\dot{\xi})\dot{\xi} + EI\xi_{zzzz} = C_D u|u| + C_M \ddot{u} \dots\dots\dots (1)$$

のように線型化される^{1),2),3)}。ここに、 ρ および ρ_w は柱および水の密度、 c_1 は減衰定数、 E はヤング係数、 D は柱の幅（円柱の場合は直径）、 A は断面積、 I は断面2次モーメント、 K は付加質量係数である。 C_D および C_M は、 $C_D = C_D \rho_w D/2$ 、 $C_M = C_M \rho_w A$ であり、 C_D および C_M は抗力係数および慣性係数である。

式(1)右辺の u および $\dot{u}$ に、微小振幅波理論を用いる場合の計算方法はすでに示した^{1),3)}が、ここでは、ストークス波理論を用いる解析法を示す。

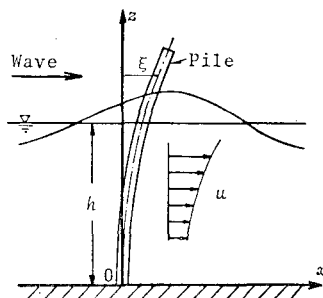
ストークス波の第3近似解⁵⁾によれば、 $x=0$ における水粒子速度 u およびその加速度 $\dot{u}$ は、

$$u = cF_1 \cosh kz \cos \sigma t + cF_2 \cosh 2kz \cos 2\sigma t + cF_3 \cosh 3kz \cos 3\sigma t \dots\dots\dots (2)$$

$$\dot{u} = -\sigma cF_1 \cosh kz \sin \sigma t - 2\sigma cF_2 \cosh 2kz \sin 2\sigma t - 3\sigma cF_3 \cosh 3kz \sin 3\sigma t \dots\dots\dots (3)$$

であり、式中の F_1 、 F_2 、 F_3 および波速 c は、

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= ka / \sinh kh, & F_2 &= (3/4)(ka)^2 / \sinh^4 kh, \\ F_3 &= (3/64)(ka)^3 (11 - 2 \cosh 2kh) / \sinh^7 kh, \\ c &= \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \left[1 + (ka)^2 \frac{\cosh 4kh + 8}{8 \sinh^4 kh} \right]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$



図—1 座 標 系

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 工修 愛知県 土木部道路維持課

である。ここに、 t は時間、 σ は波の角周波数、 h は水深、 k は波数、 a は振幅であり、 a と波高 H との関係は

$$a = \frac{1}{2}H - \frac{3}{512}k^2 H^3 (8 \cosh^6 kh + 1) / \sinh^6 kh \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。

伝達マトリックス法を用いるためには、柱体を梁・質点系に分割し、各質点に関するポイントマトリックスと、各梁に対するフィールドマトリックスを求める必要があるが、ストークス波理論を用いる場合、微小振幅波理論による解析法と異なる点は、ポイントマトリックスの中の波力項と減衰定数のみである。したがって、以下図-2 に示す質点 i に働く波力 $f_i(t)$ を求めるが、式 (1) 右边を $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ の間で積分すると、

$$f_i(t) = \int_{z_{i-1}}^{z_i} (C_b u |u| + C_M \dot{u}) dz \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。慣性力項 $C_M \dot{u}$ は、式 (3) を用い、 z に関して容易に積分することができるが、抗力項 $C_b u |u|$ は、これを単振動の重ね合わせの形に変える必要があるため、

$$u |u| = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (7)$$

とフーリエ級数に展開する。ここに、 $\theta = \sigma t$ である。各フーリエ係数 a_n は、図-3 に示す $u=0$ となる θ の値の $\pm b$ を用いると、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u |u| \cos n\theta d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b u^2 \cos n\theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b u^2 \cos n\theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_b^{\pi} u^2 \cos n\theta d\theta \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる。ここでは、式 (7) のフーリエ級数の第3項までを用いることとするが、これを式 (6) に代入し、 z で積分すると、結局、式 (6) は、

$$\begin{aligned} f_i(t) &= X_{0i} + X_{1i} \cos \sigma t + X_{2i} \cos 2\sigma t + X_{3i} \cos 3\sigma t \\ &\quad + Y_{1i} \sin \sigma t + Y_{2i} \sin 2\sigma t + Y_{3i} \sin 3\sigma t \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。ここに、式 (9) の各項の振幅は、

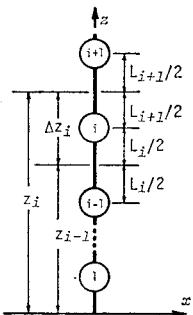


図-2 波力の積分区間

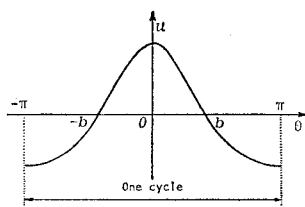


図-3 u の位相変化

$$\begin{aligned} X_{0i} &= C_b \left[\frac{2}{\pi} \left\{ A_{1i} \left(\frac{1}{4} \sin 2b + \frac{1}{2} b \right) \right. \right. \\ &\quad + A_{2i} \left(\frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{2} b \right) + A_{3i} \left(\frac{1}{12} \sin 6b + \frac{1}{2} b \right) \\ &\quad + A_{4i} \left(\frac{1}{6} \sin 3b + \frac{1}{2} \sin b \right) \\ &\quad + A_{5i} \left(\frac{1}{10} \sin 5b + \frac{1}{2} \sin b \right) \\ &\quad + A_{6i} \left(\frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{4} \sin 2b \right) \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (A_{1i} + A_{2i} + A_{3i}) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{1i} &= C_b \left[\frac{2}{\pi} \left\{ A_{1i} \left(\frac{1}{6} \sin 3b + \frac{3}{2} \sin b \right) \right. \right. \\ &\quad + A_{2i} \left(\frac{1}{10} \sin 5b + \frac{1}{6} \sin 3b + \sin b \right) \\ &\quad + A_{3i} \left(\frac{1}{14} \sin 7b + \frac{1}{10} \sin 5b + \sin b \right) \\ &\quad + A_{4i} \left(\frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{2} \sin 2b + \frac{1}{2} b \right) \\ &\quad + A_{5i} \left(\frac{1}{12} \sin 6b + \frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{4} \sin 2b + \frac{1}{2} b \right) \\ &\quad + A_{6i} \left(\frac{1}{10} \sin 5b + \frac{1}{3} \sin 3b + \frac{1}{2} \sin b \right) \left. \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} (A_{4i} + A_{5i}) \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{2i} &= C_b \left[\frac{2}{\pi} \left\{ A_{1i} \left(\frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{2} \sin 2b + \frac{1}{2} b \right) \right. \right. \\ &\quad + A_{2i} \left(\frac{1}{12} \sin 6b + \frac{3}{4} \sin 2b \right) \\ &\quad + A_{3i} \left(\frac{1}{16} \sin 8b + \frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{2} \sin 2b \right) \\ &\quad + A_{4i} \left(\frac{1}{10} \sin 5b + \frac{1}{6} \sin 3b + \sin b \right) \\ &\quad + A_{5i} \left(\frac{1}{14} \sin 7b + \frac{1}{3} \sin 3b + \frac{1}{2} \sin b \right) \\ &\quad + A_{6i} \left(\frac{1}{12} \sin 6b + \frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{4} \sin 2b + \frac{1}{2} b \right) \left. \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} (A_{1i} + A_{6i}) \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{3i} &= C_b \left[\frac{2}{\pi} \left\{ A_{1i} \left(\frac{1}{10} \sin 5b + \frac{1}{3} \sin 3b + \frac{1}{2} \sin b \right) \right. \right. \\ &\quad + A_{2i} \left(\frac{1}{14} \sin 7b + \frac{1}{3} \sin 3b + \frac{1}{2} \sin b \right) \\ &\quad + A_{3i} \left(\frac{1}{18} \sin 9b + \frac{1}{2} \sin 3b \right) \\ &\quad + A_{4i} \left(\frac{1}{12} \sin 6b + \frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{4} \sin 2b + \frac{1}{2} b \right) \\ &\quad + A_{5i} \left(\frac{1}{16} \sin 8b + \frac{1}{8} \sin 4b + \frac{1}{2} \sin 2b \right) \\ &\quad + A_{6i} \left(\frac{1}{14} \sin 7b + \frac{1}{10} \sin 5b + \sin b \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2}A_{4i} \Big] \\ Y_{1i} &= -C'_M c^2 F_1 (\sinh kz_i - \sinh kz_{i-1}) \\ Y_{2i} &= -C'_M c^2 F_2 (\sinh 2kz_i - \sinh 2kz_{i-1}) \\ Y_{3i} &= -C'_M c^2 F_3 (\sinh 3kz_i - \sinh 3kz_{i-1}) \\ & \dots\dots\dots(10) \end{aligned} \right\}$$

である。ここに、 A_{1i} , A_{2i} , A_{3i} , A_{4i} , A_{5i} , A_{6i} は、

$$\left. \begin{aligned} A_{1i} &= \frac{1}{2}c^2 F_1^2 \left\{ \frac{1}{2k} (\sinh 2kz_i - \sinh 2kz_{i-1}) + \Delta z_i \right\} \\ A_{2i} &= \frac{1}{2}c^2 F_2^2 \left\{ \frac{1}{4k} (\sinh 4kz_i - \sinh 4kz_{i-1}) + \Delta z_i \right\} \\ A_{3i} &= \frac{1}{2}c^2 F_3^2 \left\{ \frac{1}{6k} (\sinh 6kz_i - \sinh 6kz_{i-1}) + \Delta z_i \right\} \\ A_{4i} &= \frac{1}{k}c^2 F_1 F_2 \left\{ \frac{1}{3} (\sinh 3kz_i - \sinh 3kz_{i-1}) \right. \\ & \quad \left. + (\sinh kz_i - \sinh kz_{i-1}) \right\} \\ A_{5i} &= \frac{1}{k}c^2 F_2 F_3 \left\{ \frac{1}{5} (\sinh 5kz_i - \sinh 5kz_{i-1}) \right. \\ & \quad \left. + (\sinh kz_i - \sinh kz_{i-1}) \right\} \\ A_{6i} &= \frac{1}{k}c^2 F_1 F_3 \left\{ \frac{1}{4} (\sinh 4kz_i - \sinh 4kz_{i-1}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (\sinh 2kz_i - \sinh 2kz_{i-1}) \right\} \\ & \dots\dots\dots(11) \end{aligned} \right\}$$

である。

減衰係数 c_i は、式 (1) 左辺の ξ_i の係数を Δz の間で積分することにより、

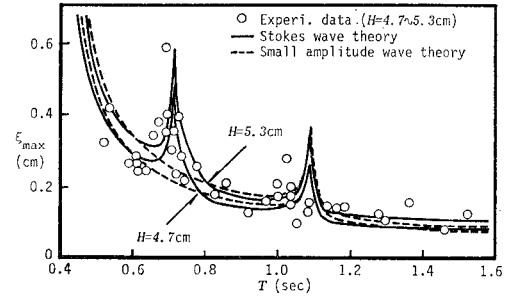
$$\begin{aligned} c_i &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} (c_1 + 2C_D |u|) dz \\ &= c_1 \Delta z_i + (2C_D/k) \{ c F_1 (\sinh kz_i \\ & \quad - \sinh kz_{i-1}) \cdot \cos \sigma t + (c F_2/2) (\sinh 2kz_i \\ & \quad - \sinh 2kz_{i-1}) \cdot \cos 2\sigma t + (c F_3/3) (\sinh 3kz_i \\ & \quad - \sinh 3kz_{i-1}) \cdot \cos 3\sigma t \} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

となる。他の部分については、すでに示した微小振幅波理論による計算方法をそのまま使用することができる^{1),2),3)}。

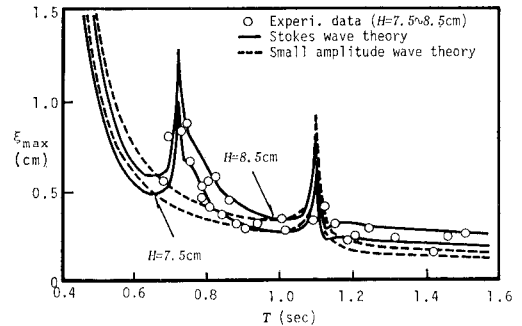
2.2 計算値と実験結果の比較

実験は、金沢大学工学部土木工学科に設置された長さ 14 m、幅 50 cm、深さ 64 cm の造波水槽を用いたが、水槽の一端にはプランジャー型の造波機が設置されており、その前方約 4.3 m の位置に、下端部に板パネの付いた長さ 60 cm、直径 3 cm の円柱を設置した。円柱は比重 1.60 の塩化ビニール製で、剛性係数は $EI=1.91 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ と大きく、ほぼ剛体と見なし得る。板パネは、長さが 1.5 cm で剛性係数は $EI=1.93 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ である。

円柱の振動変位は、非接触型変位計を用いて、円柱頂



(a) $H=4.7 \text{ cm} \sim 5.3 \text{ cm}$



(b) $H=7.5 \text{ cm} \sim 8.5 \text{ cm}$

図—4 ストークス波による共振特性

部の変位を測定した。実験時の水深は $h=40 \text{ cm}$ であり、使用した波は、周期が $T=0.5 \text{ sec} \sim 1.6 \text{ sec}$ で、波高が $H=2.0 \text{ cm} \sim 12.0 \text{ cm}$ の範囲内のものである。なお、 $h=40 \text{ cm}$ の水中における円柱の固有周期は、 $T_n=0.35 \text{ sec}$ であった。

図—4 (a) および (b) は、波高をほぼ一定にし、周期を順次変えることにより、円柱の共振特性を検討したものであり、(a) は波高が $H=4.7 \text{ cm} \sim 5.3 \text{ cm}$ 、(b) は $H=7.5 \text{ cm} \sim 8.5 \text{ cm}$ の範囲内のものである。いずれも、図の横軸は波の周期 T であり、縦軸は波の進行方向側の変位の最大値 $\xi_{\max}$ である。図中の丸印は実験値であり、実線および破線は、それぞれストークス波理論および微小振幅波理論による計算値であるが、円柱の固有周期 $T_n=0.35 \text{ sec}$ の 2 倍の周期である $T=0.70 \text{ sec}$ 付近の共振は、ストークス波理論を用いることにより説明されることがわかる。なお、 T_n の 3 倍の周期である $T=1.05 \text{ sec}$ 付近の共振は、微小振幅波理論と有限振幅波理論との相違はほとんど生じないが、(a) では実験値の共振周期が若干小さい。この原因は必ずしも明白ではないが、計算時に、付加質量係数を $K=1.0$ と固定したこと、減衰係数に含まれる c_i を 0 としたこと、あるいは実際の波形が理論波形と一致しないことなどが考えられる。

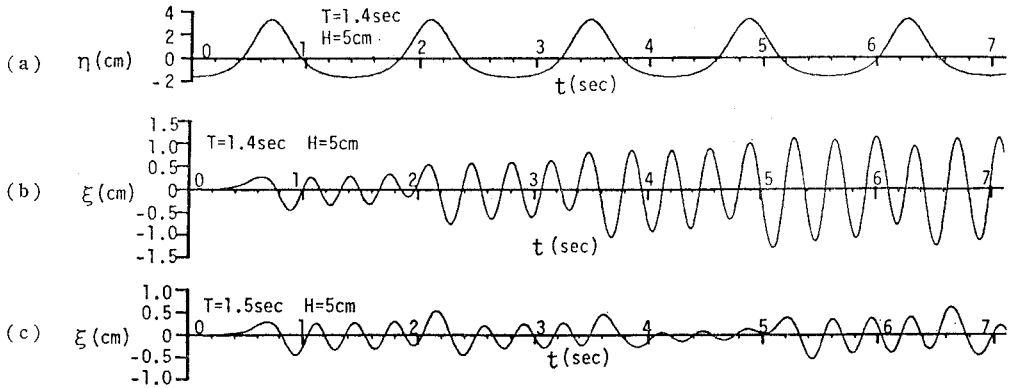


図-5 ハイパボリック波の水面変動 (a), および円柱の振動変位 (b), (c)

3. ハイパボリック波による柱体の振動

3.1 数値シミュレーション

浅海域では、式 (6) のモリソン公式に含まれる u および $\dot{u}$ にはハイパボリック波理論⁶⁾を適用し、この外力による振動変位を、構造特性マトリックス法⁷⁾を用いて算出した。

計算条件は、水深 $h=15$ cm, 波高 $H=5$ cm とし、波の周期を $T=1.4$ sec ~ 2.2 sec の間で変化させた 10 ケースとした。柱体は、直径 4 cm で長さ 30 cm の円柱とし、下端部に、長さ 3.7 cm で $EI=1.93 \times 10^5$ kg $\cdot$ cm² の板バネが取り付けられているものとした。付加質量係数は $K=1.0$, 減衰係数の中に含まれる c_1 は 0.003 gsec/cm² としたが、計算から得られる固有周期は、 $T_n=0.35$ sec であった。

計算結果の一例を 図-5 (a)~(c) に示すが、(a) は、固有周期の 4 倍の周期を持つ $T=1.4$ sec のハイパボリック波の水面変動であり、(b) は、(a) の波による振動変位 ξ であるが、 $T_n=0.35$ sec の固有振動が強く混入し、 $\xi_{\max}$ は 1.3 cm 程度の大きな値となる。(c) は、固有周期の非整数倍のハイパボリック波による振動変位であり、 $\xi_{\max}$ は 0.5 cm と小さい。

これらの計算による共振特性を 図-6 に示すが、固有周期の 4 倍、5 倍および 6 倍である $T=1.40$ sec, 1.75

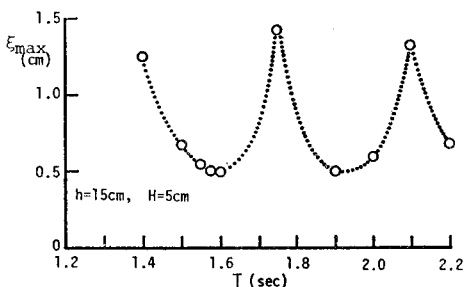


図-6 ハイパボリック波による共振特性

sec および 2.10 sec の波により、共振が発生することがわかる。このような共振現象が実際に生じるか否かについては、実験により検討しなければならない。

3.2 碎波による円柱の振動実験

碎波による振動計算には、浅海波の場合と同様、ハイパボリック波理論を用いた。碎波時の波力式には、モリソン公式を用いる場合と、一例として 図-7 に示すように、さらに衝撃力を加えた碎波波力式⁸⁾を用いる場合の両者について計算を行ったが、本計算の範囲内では、衝撃力を加えた場合の方が振動変位は若干大きくなるものの、両者に本質的な差違は生じなかった。

実験は、図-8 に示すように、勾配 1/20 の斜面上の碎波点に円柱を設置したが、円柱の上端には板バネが取り付けられており、この板バネに貼り付けた歪ゲージの出力により、円柱下端部の変位を測定した。

円柱は、長さ 60 cm, 直径 4 cm, 比重 1.22 のアクリル製であり、板バネは、長さ 2.7 cm, $EI=1.93 \times 10^5$ kg $\cdot$ cm² である。実験時の水深は 40 cm とし、使用した波は、周期が $T=0.69$ sec ~ 1.35 sec で波高が $H=6.9$ cm ~ 7.2 cm の範囲内の 10 種類である。静水中での円柱の固有周期は $T=0.48$ sec であった。

図-9 (a)~(c) に、碎波時の振動変位の時間変化を示すが、(a) は、波の周期 T が T_n に一致する場合であり、実線で示した計算値は、

破線で示した実験値よりも若干大きい、両者は比較的良好に一致していると言える。(b) は、 $T=1.0$ sec, $H_b=8.6$ cm の場合であり、実験値よりも計算値の方が大きく、両者は一致していない。(c) は、 $T=1.15$ sec, $H_b=9.6$ cm の場合であり、若干計算値の方が大きい、両者の振動形状は良

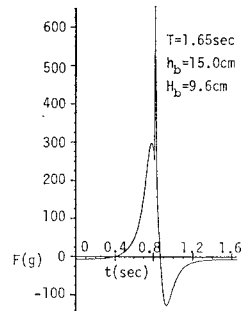


図-7 碎波波力の時間変化

く一致している。これらの例と同様、他のケースも、計算値の方が実験値よりも大きくなる傾向があり、この理由は現在必ずしも明白ではないが、ハイパボリック波理論による $\hat{u}$ は、実際の砕波時の $\hat{u}$ に比べ、過大な値を与えるの

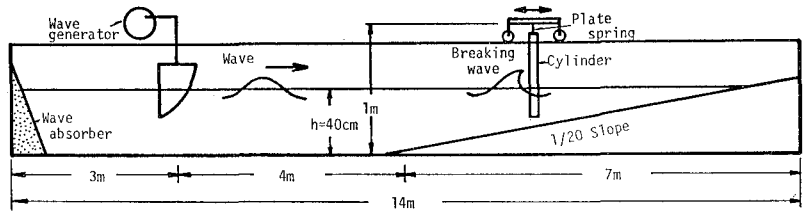


図-8 砕波による円柱振動の実験装置概要

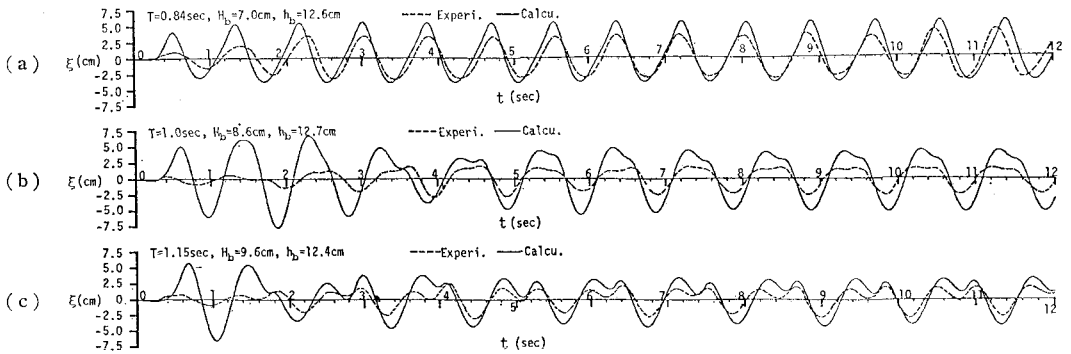


図-9 砕波による円柱の振動変位の時間変化

ではないかと思われる。

君と黒崎和保君に謝意を表す。

4. 結 語

本研究では、伝達マトリックス法にストークス波理論を適用する場合の計算法を示したが、この方法により、固有周期の整数倍の周期を持つ波による共振の発生を説明することができた。次いで、構造特性マトリックス法にハイパボリック波理論を用いた浅海域での柱体振動のシミュレーションを行ったが、ストークス波の場合と同様、固有周期の整数倍の周期を持つ波により共振が生じる。最後に、砕波による円柱の振動変位は、浅海波の場合と同様、ハイパボリック波理論を用いた構造特性マトリックス法により、ある程度妥当な値を算出することができるが、より正確な振動特性を知るためには、さらに詳細な検討が必要である。

なお、本研究を行うに際し、助力を惜しまなかった細貝隆司君（現在、五洋建設）および大学院生の上野 彰

参 考 文 献

- 1) 石田 啓: 波による柱状構造物の動的応答について, 土木学会夏期研修会講義集, pp. B-4-1~B-4-15, 1984.
- 2) Hajime Ishida: Dynamic response of vertical pile to periodic waves by transfer matrix method, SEME, pp. 2-105~2-114, 1982.
- 3) 石田 啓・沢木 一: 波によるプラットフォームの振動解析に関する研究, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 599~603, 1981.
- 4) 榎木 亨・中村孝幸・三木秀樹: 単円柱構造物の波による動的挙動について, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 367~371, 1977.
- 5) 土木学会編: 水理公式集, pp. 79~80, 1971.
- 6) 岩垣雄一・塩田啓介: ハイパボリック波の表現式の再検討, 第26回海岸工学講演会論文集, pp. 31~35, 1979.
- 7) 石田 啓・細貝隆司: 構造特性マトリックスによる柱体の波浪応答解析——不規則波への応用——, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 371~375, 1983.
- 8) 岩垣雄一・榎木 亨: 海岸工学, 共立出版, pp. 262~263, 1979.