

任意列，任意断面柱体列周辺波動場の境界値問題解析

角野昇八*・小田一紀**・阿部 功***

1. 緒 言

無数の柱体より成る多柱列を有限列並べたいわゆる多列多柱列は，透過性鋼管防波堤や栈橋，2重壁式スリット型直立消波工などにその形式が見られ，したがってその波浪との干渉の現象は極めて興味深い問題である。

この種の問題を扱った既往の例としては，大橋¹⁾によるものを挙げることができるが，その対象の断面形は円形に限られていて，スリット型直立消波工などに見られる矩形断面やその他の断面形状には適用できなかった。また級数計算を要するなどの計算上の煩雑さもあったように思われる。

本研究は，漸近展開法 (Matched Asymptotic Expansions Method) を適用して多列多柱列周辺波動場を線形境界値問題として解析する目的から，1列の柱体列に対する理論²⁾を任意列の柱体列に拡張するものであり，柱体断面形が任意 (ただし同一列内の断面形状は同じである必要がある)，また計算も比較的容易である点に特長がある。さらにこの手法によれば，各列の開口率も任意であってもよいので，2列の角柱列の背後の3列目の開口率を0として完全反射壁とすれば，2重壁式スリット型直立消波工の水理特性を考察することなども可能である。

なお以下の理論展開においては，上記の仮定のほか，入射波の波向は列方向に直角とし，列中の隣接柱体中心間隔 D は波長 L よりもかなり小さく ($D/L \ll 1$)，また隣り合う柱体列は，列を通過した流れが一樣流を回復できる程度に離れているものとし，水深は一定であるとの条件を課する。

2. 理 論

(1) 問題の定式化

図-1 に示すように，全体で N 列ある柱体列に対して入射波の進行方向に x 軸をとり，柱体列の方向に y 軸を，また静水面から上向きに z 軸をとって問題を定式

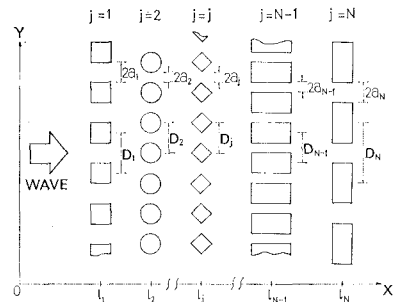


図-1 任意断面柱体列

化する。隣接柱体間隔を D ，スリット幅は $2a$ とし，柱体列の位置の x 座標を l で表わす。また添字 $1 \cdots j \cdots N$ は，その数字の列の柱体列に関する量であることを表わすものとする。したがって，例えば $2a_j/D_j$ は j 列目の柱体列の開口率を表わしている。各柱体は，同一列内では同じ断面形状をもち，また同じ間隔で配列されている必要があるが，後に示すようにその配列の仕方は各列間で異なってもよい。

さてここで解くべき問題は，これまでの論文^{2),3)}にも記したように，柱体表面における境界条件および放射条件と，分散の関係式を満足するヘルムホルツの方程式の解 $F(x, y)$ を求める2次元問題に帰着される。またこの放射条件は，この多列多柱列より十分に離れた点 ($x \rightarrow \pm\infty$) において，多柱列からの反射波 ($x \rightarrow -\infty$)，ならびに透過波 ($x \rightarrow +\infty$) の存在を保証することにほかならず，解の速度ポテンシャルの時間項を $e^{-i\sigma t}$ ($i = \sqrt{-1}$, $\sigma = 2\pi/T$, T : 周期) と表わす時には，それは次のように表わされる。

$$F(x, y) \rightarrow A_I \exp(ikx) + \rho A_I \exp(-ikx) \quad (x \rightarrow -\infty) \cdots \cdots (1)$$

$$F(x, y) \rightarrow \tau A_I \exp(ikx) \quad (x \rightarrow +\infty) \cdots \cdots (2)$$

ただし式(1)においては反射波 (右辺第2項) の他に入射波 (右辺第1項) も含めている。また A_I は入射波の振幅に相当する複素定数 (未知) であり， ρ は複素反射率， τ は複素透過率を表わしている。

(2) 外的問題

外的解としてのスリットからの流れは，それを遠方か

* 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 (株)日本科学技術研究所

ら眺めた場合の挙動に相当し、既に記したように²⁾それらはスリットの位置に配置された無数のわき出しあるいはすい込みからの流れとして表わすことができる。さらにこの流れは、わき出しあるいはすい込みを配置した列より x 軸方向に十分に離れた点においては

$$F(x, y) \rightarrow \mp i/2kD \cdot \exp(ik|x|) \cdots \cdots \cdots (3)$$

のように表わされる。ただしここに $k=2\pi/L$, L : 波長であり、負、正符号はそれぞれわき出し、すい込みに対応し、またそれらの強さはこの場合 $m=1$ としている。上式は x 軸の正、負の方向に伝播するような y 軸に平行な峯をもつ平面波であり、スリットの y 座標には無関係な形をもつ。したがって無数のスリットから発生する波は、スリットよりある程度距離が離れば、柱体の配列がどのようなものであっても、 x 座標のみに依存する平面波として取り扱えばよいことになる。

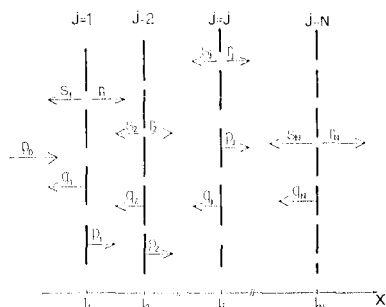


図-2 外的解

柱体列周辺には、図-2 に示すように、これらスリットからの波以外にも外的解としての平面波が存在し、それらすべての波をいま第 j 列目について

$$p_j = P_j \exp[ik(x-l_j)] \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$q_j = Q_j \exp[-ik(x-l_j)] \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$r_j = R_j \exp[ik(x-l_j)] \cdots \cdots \cdots (6)$$

$$s_j = S_j \exp[-ik(x-l_j)] \cdots \cdots \cdots (7)$$

のように表わす。これらはそれぞれ、柱体列不透過部から岸側に反射される波、同じく沖側に反射される波、スリット部から岸側に発生する波、同じく沖側に発生する波を表わしている。式中、 $P_j \sim S_j$ は未知の複素定数であり、外的解に対する柱体列における境界条件（以下、外的境界条件と称する）を考慮することにより、それら相互の関係が確定されることになる。また、これらの波とは別に第 1 列目の沖側には、入射波として

$$p_0 = P_0 \exp[ikx] \cdots \cdots \cdots (8)$$

を考へて、式(4)~式(7)を $j=0 \sim N$ に対して有効なものとする（ただし $Q_0=R_0=S_0=0$ ）。なお第 N 列（最後列）目では $P_N=0$ である。

この外的境界条件を第 j 列目の柱体列に適用するとき、柱体断面の詳細な形状は考慮する必要はなく、図-

2 に示すように単に平板列を考えさえすればよい。このような見方ができるのは、部材断面寸法が波長に比べて非常に小さいとの仮定があるからである。さて、考えるべき外的境界条件は、① 柱体列 ($x=l_j$) において、 p_j, q_{j+1}, s_{j+1} の波による合成水平水粒子速度成分が 0 であること、② p_{j-1}, q_j, r_{j-1} の波に対しても同様の条件が成り立つこと、③ $x=l_j$ において s_j と r_j の水平水粒子速度成分が等しいこと、である。以上の外的境界条件を第 j 列目と第 $j+1$ 列目の柱体列によって挟まれた領域 ($j=0 \sim N-1$) に対して適用すれば、以下の関係式を得ることができる。

$$P_j - Q_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) - S_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) = 0 \quad (j=1 \sim N-1) \cdots \cdots (9)$$

$$P_j \exp(ik\Delta l_j) - Q_{j+1} + R_j \exp(ik\Delta l_j) = 0 \quad (j=0 \sim N-1) \cdots \cdots (10)$$

$$S_{j+1} = -R_{j+1} \quad (j=0 \sim N-1) \cdots \cdots (11)$$

ただしここに

$$\Delta l_j = l_{j+1} - l_j$$

である。

式(9)~式(11)からは、 P_j および Q_{j+1} と R_j ならびに R_{j+1} を関係づける式として

$$P_0 = Q_1 \exp(-ikl_1) \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$P_j = \frac{R_{j+1} - R_j \exp(ik\Delta l_j)}{\exp(ik\Delta l_j) - \exp(-ik\Delta l_j)} \quad (j=1 \sim N-1) \cdots \cdots (13)$$

$$Q_{j+1} = \frac{R_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) - R_j}{\exp(ik\Delta l_j) - \exp(-ik\Delta l_j)} \quad (j=1 \sim N-1) \cdots \cdots (14)$$

を得る。このようにして、総数 $4N-1$ 個の未知定数の数を Q_1 および $R_1 \sim R_N$ の計 $N+1$ 個にすることができる。

a) 外的解の outer limit

以上のようにして、 $N+1$ 個の未知定数を残した形で外的解である平面波が確定されたことになる。その outer limit はそれと同じ形をとり、第 j 列目と第 $j+1$ 列目の間の領域の柱体列より十分に離れた点においては

$$F(x, y) = P_j \exp[ik(x-l_j)] + R_j \exp[ik(x-l_j)] + Q_{j+1} \exp[-ik(x-l_{j+1})] + S_{j+1} \exp[-ik(x-l_{j+1})] \cdots \cdots (15)$$

のように表わすことができる。ここに $j=0 \sim N$ に対応して、柱体列周辺の全領域が式(15)の対象領域となる。ただし $l_0=0$, $Q_{N+1}=S_{N+1}=0$ である。

外的解の outer limit である上式の、 $j=0$ の場合の式と式(1)、また $j=N$ の場合の式と式(2)とをそれぞれ等置することにより、 ρ および τ , P_0 の形を以下のように確定させることができる。

$$\rho = (Q_1 - R_1) \exp(ikl_1) / A_I \cdots \cdots (16)$$

$$\tau = R_N \exp(-ikl_N) / A_I \cdots \cdots (17)$$

$$P_0 = A_I \dots\dots\dots (18)$$

b) 外的解の inner limit

外的解を後述の内的解と接合するためには, その inner limit を知る必要がある. いまここで, $D/L \ll 1$ の条件 (通常は十分にこの範囲内にある) の下では, $|x|$ の比較的小さい値に対しても, わき出しやすい込みからの流れは式 (3) の平面波として表わされる²⁾ことを考慮すれば, 外的解の inner limit として, 式 (15) より以下の式を得る. まず第 j 列目 ($j=1 \sim N$) の沖側に対して

$$F(x, y) \rightarrow P_{j-1} \exp(ik\Delta l_{j-1}) + R_{j-1} \exp(ik\Delta l_{j-1}) + Q_j - R_j \{1 - ik(x - l_j)\} \quad (x \rightarrow l_j) \dots\dots\dots (19)$$

また第 j 列目 ($j=1 \sim N$) の岸側では

$$F(x, y) \rightarrow P_j + R_j \{1 + ik(x - l_j)\} + Q_{j+1} \times \exp(ik\Delta l_j) - R_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) \quad (x \rightarrow l_{j+1}) \dots\dots\dots (20)$$

(3) 内的問題

内的解としてのスリットからの流れは, 視点をスリットに限りなく近づけてゆくときに観察される流れとして解釈される. その内的解の outer limit としては, 従来の論文と同様に速度振幅 U をもつ一樣流を採用し, 第 j 列目の柱体列に対して以下のようにおく.

$$F(x, y) = (x - C_j - l_j)U_j + C_{0j} \quad (l_{j-1} < x < l_j) \dots\dots\dots (21)$$

$$F(x, y) = (x + C_j - l_j)U_j + C_{0j} \quad (l_j < x < l_{j+1}) \dots\dots\dots (22)$$

式中の C_{0j} は複素定数, C_j はこれまでの論文においてもたびたびふれてきた “blockage coefficient” と呼ばれる理論定数であり, 柱体列の断面形のみによって一意的に決定される量である. また, 簡単な断面形状のいくつかに対しては C に対する既往の解が存在し, 任意断面形状に対しても算定手法が示されている⁷⁾. この C を含んだ内的解を考慮することにより, 柱体表面における詳細な境界条件が満足されることになる.

(4) Matching

外的解の inner limit を表わす式 (19) および (20) と内的解の outer limit を表わす式 (21) および (22) とをそれぞれ等置することにより matching の操作が行なわれる. その結果, 以下の関係式を得る.

$$U_j = -ikS_j = ikR_j \dots\dots\dots (23)$$

$$-ikC_j R_j + C_{0j} = P_{j-1} \exp(ik\Delta l_{j-1}) + R_{j-1} \times \exp(ik\Delta l_{j-1}) + Q_j - R_j \quad (j=1 \sim N) \dots\dots\dots (24)$$

$$ikC_j R_j + C_{0j} = P_j + Q_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) + R_j - R_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) \quad (j=1 \sim N) \dots\dots\dots (25)$$

式 (24) と式 (25) の差をとることにより次式を得る.

$$P_j - P_{j-1} \exp(ik\Delta l_{j-1}) + Q_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) - Q_j - R_{j+1} \exp(ik\Delta l_j) + 2(1 - ikC_j)R_j - R_{j-1} \exp(ik\Delta l_{j-1}) = 0 \quad (j=1 \sim N) \dots\dots\dots (26)$$

式 (12)~式 (14) を上式に代入し, また $R_0 = 0$ を考慮すれば, 上式は $j=1$ に対して

$$\{1 - \exp(2ik\Delta l_1)\} Q_1 + \exp(ik\Delta l_1) R_2 + \{[1 - \exp(2ik\Delta l_1)] ikC_1 - 1\} R_1 = 0 \dots\dots\dots (27)$$

のようになる. また, 式 (13) および式 (14) を式 (26) に代入し, $P_N = Q_{N+1} = R_{N+1} = 0$ を考慮すれば, $j=N$ に対する式として

$$A_{NN} \cdot R_N + A_{N,N-1} \cdot R_{N-1} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

の関係を得る. ただしここに

$$A_{NN} = \{1 - \exp(2ik\Delta l_{N-1})\} ikC_N - 1 \quad \left. \begin{aligned} A_{N,N-1} &= \exp(ik\Delta l_{N-1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

さらに, 式 (13) および式 (14) を式 (26) に代入すれば, $j=2 \sim N-1$ に対する一般式として次式を得る.

$$A_{j,j+1} \cdot R_{j+1} + A_{jj} \cdot R_j + A_{j,j-1} \cdot R_{j-1} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

ただしここに

$$\left. \begin{aligned} A_{j,j+1} &= 1 / \{ \exp(ik\Delta l_j) - \exp(-ik\Delta l_j) \} \\ A_{jj} &= ikC_j - 1 - \frac{\exp(ik\Delta l_j)}{\exp(ik\Delta l_j) - \exp(-ik\Delta l_j)} \\ &\quad - \frac{\exp(ik\Delta l_{j-1})}{\exp(ik\Delta l_{j-1}) - \exp(-ik\Delta l_{j-1})} \\ A_{j,j-1} &= 1 / \{ \exp(ik\Delta l_{j-1}) - \exp(-ik\Delta l_{j-1}) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

結局, $N+1$ 個の未知定数に対して式 (27), (28), (30) の計 N 個の式が得られることになるが, これらの未知定数のうちの R_1 については, 基本既知量として

$$R_1 = -i/2kD_1 \dots\dots\dots (32)$$

と与え, すなわち図-2 の r_1 の波を, 式 (3) に示したように強さ $m=1$ のわき出しからの波に対する形において, 未知数の数を最終的に N 個にし, すべての未知量を確定させることができるようにする. 具体的には

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{N,N-1} & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i/2kD_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

の形の行列式を解いて $R_2 \sim R_N$ を求め, さらに, 求められた R_2 と R_1 を式 (27) に代入して残りの Q_1 を決定することになる.

なお, 式 (27) および式 (28) において, $N=2$, $C_2=0$ として 2 列目に完全透過の柱体列を考えれば, 既発表²⁾の 1 列多柱列の場合の値

$$Q_1 = P_0 = -C_1/2D_1 - i/2kD_1 \dots\dots\dots (34)$$

が得られ、また $N=2$, $R_2=0$ として2列目に完全反射壁を考えれば、縦スリット直立消波工形式に対する値³⁾

$$Q_1=P_0=-C_1/2D_1-i\{2kD_1(1-e^{2ikl})\} \dots (35)$$

が得られるので、本論文において求められる式は、これら様々の形式に対する一般解を与えているといえる。

3. 計算結果およびその実験値との比較

本理論による反射率 r_R および透過率 r_T は、式 (16) および式 (17) の ρ および τ の絶対値を算定することにより求められ、例えば2列の場合

$$r_R=\sqrt{k^2\Gamma/(1+k^2\Gamma)}, r_T=\sqrt{1/(1+k^2\Gamma)} \dots (36)$$

のように求められる。ただしここに

$$\Gamma=2k^2C_1C_2+C_1^2+C_2^2+2C_1C_2(1-k^2C_1C_2) \\ \times \cos 2kl-2kC_1C_2(C_1+C_2)\sin 2kl \dots (37)$$

また $l=l_2-l_1$ である。式 (36) は $r_R^2+r_T^2=1$ の関係を満足し、したがって柱体列の沖側と岸側の間ではエネルギー保存則が満たされていることを知る。また $C_1(C_2)\rightarrow\infty$ の場合には、予想されるように $r_R\rightarrow 1$ および $r_T\rightarrow 0$ の結果が、さらに $C_1(C_2)\rightarrow 0$ の場合には、 $r_R\rightarrow 0$ および $r_T\rightarrow 1$ の結果が得られる。

本理論の妥当性を検証するために、上式によって算定される円柱列の場合の r_R, r_T の値が大楠の理論による値と一致することをまず確認し⁵⁾、次に実験値と比較した。実験は、長さ 50m, 幅 1m, 高さ 1.75m の造波水槽を用い、水槽のほぼ中央部に直径 15.3cm の円柱より成る2列円柱列を設置して、柱体列前面波高、透過波高、柱体列間波高を測定して行なった。その開口率(2列とも)は、1列円柱列の場合に、エネルギー損失の程度が極めて小さいことが明らかとなっている⁶⁾ $2a/D=0.23$ とした。また柱体列中心間隔 ($l=l_2-l_1$) は 30cm, 60cm, 91cm の3ケースとした。水深は $h=50$ cm (一定) であり、入射波の波形勾配は $H/L\div 0.01$ (一定) である。

図-3 は、式 (36) より算定された2列円柱列の場合の r_R および r_T の理論値を、 l/L の関数として実験値とともに示したものである。なお、理論式中の円柱列に対する blockage coef. C は、既発表⁶⁾の値よりも精度の高い値⁴⁾を用いている。

これらの図によれば、理論値と実験値との対応は、 r_R, r_T の双方の場合について傾向的には一致しているものの、理論値は実験値に比べて若干長波長側にずれている様子が読みとれる。そこで理論式中の l の値として、 l よりも円柱半径分だけ短い値を用いて新たに理論値を算定しなおしたものが図-4である。明らかに、理論値と実験値との対応は l のいずれのケースについても極めて良好となっている。したがってこのことより、本理論の妥当性は基本的には証明されたといえるとともに、円柱

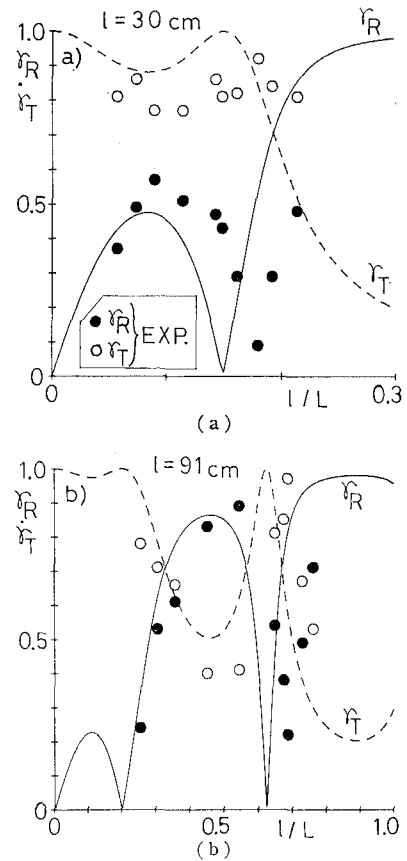


図-3 2列円柱列の反射率と透過率(修正前)

列の場合には、理論中の列間間隔の実効値は列間中心距離よりも半径分だけ短い値となっていることが結論づけられよう。なお図-4(a)には、2列の場合と同じ柱体諸元および配列を有する1列円柱列に対する r_R および r_T の理論値も示した。この場合、横座標は2列、1列とも同じ波長変化に対応するように表わしてある。2列と1列の場合を比較するとき、 r_R および r_T の波長の変化に対する特性は大きく異なっており、したがって列間の干渉の線形効果は極めて大きいことが示されている。

次に図-5には、列間波高の入射波高に対する比(列間波高比)の理論値と実験値との比較を示した。理論値は、式 (15) の値を A_I で除してその絶対値をとることにより算定されるが、式中の x の値は、第1列目中心線からの距離として、実験における波高測定点までの値(図中に示す)を用いた。またこの場合にも、 l の値としては既述の半径分だけ短い l の値を用いている。これらの図によれば、 r_R および r_T の場合と同様に列間波高比についても全般に理論値と実験値との対応は良く、本理論の妥当性が示されている。ただ、 $l=91$ cm の場合には若干のズレが認められる。この理由としては、 $l=91$ cm の場合の列間波高比の理論値は、わずかの距離を隔てて

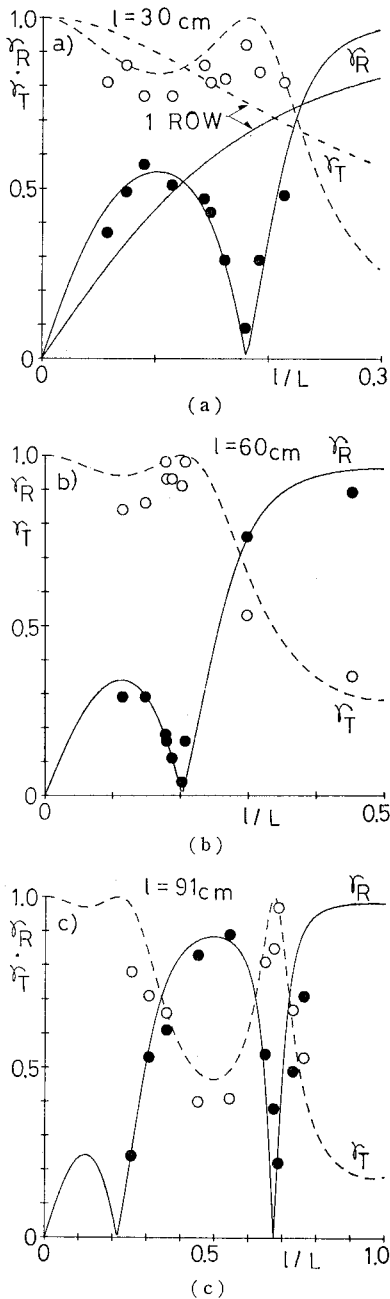


図-4 2列円柱列の反射率と透過率(修正後)

も大きく変化するような複雑な空間分布をとるのに対し, 実際にはそれが平均化されるためであろうと思われる。

参考文献

- 1) 大楠 丹: 多数の浮体で支持された海洋構造物に作用する波力について, 西部造船会会報, 第51号 (1975).
- 2) 角野昇八・小田一紀・伊庭智生: 細い多柱構造からの波の反射と透過現象の境界値問題解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 395~399, 1983.

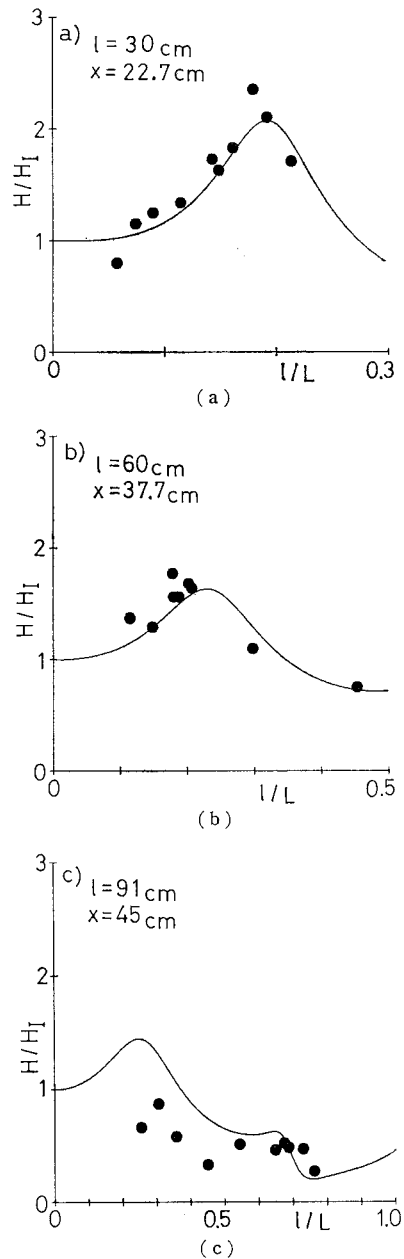


図-5 2列円柱列の列間波高比

- 3) 角野昇八・小田一紀・伊庭智生・芳田利春: 縦スリット直立消波工の水理機能の境界値問題解析, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 507~511, 1984.
- 4) 角野昇八: 円柱列の blockage coefficient の厳密解 (未発表), 1985.
- 5) 角野昇八・小田一紀・阿部 功: 2列柱体列からの波の反射と透過, 昭和60年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-87, 1985.
- 6) Kakuno, S. and T. Iba: Blockage Coefficient for an array of Circular Cylinders and the Wave Reflection and Transmission by the Array, Memoirs of the Faculty of Engng., Osaka City Univ., Vol. 24, pp. 303~312, 1983.