

不規則波の非線形浅水変形について (2)

浜 中 建 一 郎*・ 加 藤 雅 也**

1. ま え が き

著者等はこれまで、WKB 摂動法を用いて、不規則波の非線形浅水変形について解析を進めてきた¹⁾。それによると、非線形性に関する2次のオーダーで波の上下の非対称性と共に前後の非対称性が表現され、各々がパイスベクトルの実部と虚部に対応していること等が分った。本研究は、同様の展開方法を用いて、非線形性に関する3次のオーダーまで解析を進めることにより、以下の点を調べることを目的とする。

1) 2次のオーダーでは、パワースペクトルの低周波数部分と、ピーク周波数の2倍近傍に非線形性の効果が現れるのに対し、3次のオーダーでは、ピーク周波数近傍と、Goda²⁾により報告されている3倍周波数近傍に非線形性の効果が現れることが期待されるため、その点を確かめることと、その特性を調べる。

2) パワースペクトルでは1次の解が、パイスベクトルでは2次の解が、各々 leading order の項となったことから、トリスペクトルでは3次の解が leading order の項となることが期待されるため、その点を確かめること。

3) 3次のオーダーでは非線形性による波数の補正項が現れる。その時、2次のオーダーで現れた定常項 (wave setdown や定常流) の効果とその補正項の中に評価されることを確かめる。

一方、水平底における一様波動場では良く知られている様に、3次のオーダーで共鳴干渉が現れるが、ここで用いられている方法ではそれを評価することは出来ない。しかし、水深が変化する変形波動場の場合、ある場所である成分波達が共鳴条件を満たしたとしても、進行に伴って水深が変化し、分散関係が変り、もはや共鳴条件を満たさなくなる。従って共鳴は発達せず、本研究で用いた解析手法はまだ有効性を失わないと考えられる。

2. 摂 動 展 開

基礎方程式は、重力加速度とピーク周波数で無次元化

し、さらにパラメータ δ で水平方向に圧縮した、前報¹⁾の式 (1) を用いる。以下本文でも (1) 式と呼ぶ。

速度ポテンシャル ϕ 、水面変動 η を、スペクトル表現を用いて次の様に仮定する。

$$\begin{aligned}\phi = & \varepsilon^2 \Omega^{(2)} + \dots + \varepsilon \int A^{(1)} e^{i\chi} d\tilde{K} \\ & + \varepsilon^2 \iint A^{(2)} e^{i(\chi_1 + \chi_2)} d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 \\ & + \varepsilon^3 \iiint A^{(3)} e^{i(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3)} d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 d\tilde{K}_3 \dots (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta = & \varepsilon^2 \zeta^{(2)} + \dots + \varepsilon \int B^{(1)} e^{i\chi} d\tilde{K} \\ & + \varepsilon^2 \iint B^{(2)} e^{i(\chi_1 + \chi_2)} d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 \\ & + \varepsilon^3 \iiint B^{(3)} e^{i(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3)} d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 d\tilde{K}_3 \dots (3)\end{aligned}$$

ここで、 Ω は定常流の速度ポテンシャル、 ζ は wave setdown を表わす。すなわち、 U, V, W を定常流の x, y, z 成分とすると、

$$\nabla \Omega = \delta^{-1} (U, V) \equiv \delta^{-1} \mathbf{V}, \quad \Omega_z = W$$

χ は位相関数で、波数を $\mathbf{k}$ 、周波数を ω とすると

$$\nabla \chi = \delta^{-1} \mathbf{k}, \quad \chi_t = -\omega, \quad K = (\mathbf{k}, \omega)$$

又、式 (2), (3) の中の諸号 $\sim$ は、適当な基準点での値を示す。

前報と同様、式 (1) の2つの自由表面の境界条件式を $z=0$ の周りで Taylor 展開したあとで、式 (2), (3) を代入する。このとき、波数 $\mathbf{k}$ が方程式の中に陽に現れてくるから ε で展開し ($\varepsilon = n + \varepsilon \mathbf{k}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{k}^{(2)} + \dots$) ε のオーダーごとにまとめ、振幅と波数に関する方程式を導く。次に δ で展開し、 ε と δ のオーダーごとに順次方程式が解かれる。

ε の1次のオーダーでは前報と一致し、 $\varepsilon^1 \delta^0$ のオーダーから

$$\left. \begin{aligned} A^{(1,0)} &= -\frac{i}{\omega} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} b(K) \\ B^{(1,0)} &= b(K) \\ \omega^2 &= n \tanh \beta \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ただし、 $n = |\mathbf{n}|$, $\alpha = n(z+h)$, $\beta = nh$ で h は水深を表す。

* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

** 東急建設

$\varepsilon^1 \delta^1$ のオーダーから、各場所での1次のパワースペクトル $\Phi^{(1)}$ を与える式

$$F \cdot \left\{ n \Phi^{(1)} \frac{(\sinh^2 \beta + \omega^2 h)}{\omega^2 \cosh^2 \beta} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

が得られる。ただし、 $\Phi^{(1)} = \langle b(K)b(-K) \rangle$, $\langle \rangle$ はアンサンブル平均。

ε の2次のオーダーでも、 δ の1次のオーダーまでには波数の補正項は現れないから前報と一致し、 $\varepsilon^2 \delta^0$ では

$$\left. \begin{aligned} A^{(2,0)} &= iG'(K_1, K_2)b(K_1)b(K_2) \\ B^{(2,0)} &= G(K_1, K_2)b(K_1)b(K_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$\varepsilon^2 \delta^1$ では

$$\left. \begin{aligned} A^{(2,1)} &= H'(K_1, K_2)b(K_1)b(K_2) \\ B^{(2,1)} &= iH(K_1, K_2)b(K_1)b(K_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 G, G', H, H' は前報と同じ。

ε の3次のオーダーでは、 $\varepsilon^3 \delta^0$ だけを考える。このオーダーの解は、波数と周波数が分散関係式(4.3)を満たす解と満たない解とに分離して解けて、前者を添字 I, 後者を添字 III を付して表すと、

$$A^I = -i \frac{k^{(2,0)}}{\omega n} \frac{\alpha \sinh \alpha \mp \beta \cosh \beta}{\cosh \beta} b(K) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\mp$ は $n > 0$ のとき負。

$$\begin{aligned} B^I &= i\omega A^I(K) + \left\{ \omega^2 \zeta^{(2,0)} - \frac{1}{\omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}^{(2,0)} \right\} b(K) \\ &+ \iint F_2(K_1, K_2, K_3)b(K_1)b(K_2)b(K_3)d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 \\ &\equiv G_{30}(K)b(K) \\ &+ \iint G_{31}(K_1, K_2, K_3)b(K_1)b(K_2)b(K_3)d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 \\ &\dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n\beta + \omega^2 - \omega^4 h)k^{(2,0)}b(K) \\ = \{n\zeta^{(2,0)}(\omega^4 - n^2) - 2\omega n \mathbf{V}^{(2,0)} \cdot \mathbf{n}\} b(K) \\ + \omega n \iint \{ \omega F_2(K_1, K_2, K_3) - F_1(K_1, K_2, K_3) \} \\ \times b(K_1)b(K_2)b(K_3)dK_1 dK_2 \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし、 $K = K_1 + K_2 + K_3$

$$A^{III} = \frac{F_1 - \omega F_2}{\omega^2 - n \tanh \beta} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} b(K_1)b(K_2)b(K_3) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} B^{III} &= \frac{\omega F_1 - n \tanh \beta F_2}{\omega^2 - n \tanh \beta} b(K_1)b(K_2)b(K_3) \\ &\equiv G_{33}(K_1, K_2, K_3)b(K_1)b(K_2)b(K_3) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} F_1(K_1, K_2, K_3) \\ = \{ \hat{F}_1(K_1, K_2, K_3) + \hat{F}_1(K_2, K_3, K_1) \\ + \hat{F}_1(K_3, K_1, K_2) \} / 3 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(K_1, K_2, K_3) \\ = \{ \hat{F}_2(K_1, K_2, K_3) + \hat{F}_2(K_2, K_3, K_1) \\ + \hat{F}_2(K_3, K_1, K_2) \} / 3 \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(K_1, K_2, K_3) \\ = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) G'(K_1, K_2) \\ + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_3 / \omega_3) G(K_1, K_2) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 \omega_1 / 2 \quad \dots\dots\dots (15) \\ \hat{F}_2(K_1, K_2, K_3) \\ = \omega_3^2 G(K_1, K_2) + \{ \omega | \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 | \tanh(\beta_1 + \beta_2) \\ - (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3 / \omega_3 \} G'(K_1, K_2) \\ + \omega n_1^2 / 2 \omega_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 (\omega_2 / \omega_1 + \omega_1 / \omega_2) / 2 \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となる。

3. パワースペクトルと波数の補正項

前節で求めた波動解を用いて、水面変動のパワースペクトルと、波数の補正項のパワースペクトルによる表示を求める。ここで、 $\varepsilon^1 \delta^1$, $\varepsilon^1 \delta^2$ のオーダーの水面変動は非常に小さいことが分っているから消略する³⁾。又、 $\varepsilon^1 \delta^0$ のオーダーの振幅 b はガウス分布を持つと仮定する(波動場を準ガウス過程とみなす)。ガウス変数の性質から、任意の奇数個の積の平均は零、偶数個の積の平均は2個の積の平均の組合せに帰着出来、前報と同様に計算を進めると、パワースペクトルを $\Phi(K) = \langle B(K)B(-K) \rangle$, $B(K) = B^{(1)}(K) + B^{(2)}(K) + \dots$ として

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= \Phi^{(1)}(K) \\ &+ 2 \int \{ G(K_1, K - K_1) \}^2 \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(K_1) \Phi^{(1)}(K - K_1) d\tilde{K}_1 \\ &+ 2 G_{30}(K) \Phi^{(1)}(K) \\ &+ 6 \Phi^{(1)}(K) \int G_{31}(K, K_1, -K_1) \Phi^{(1)}(K_1) d\tilde{K}_1 \\ &+ 2 \int \{ H(K_1, K - K_1) \}^2 \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(K_1) \Phi^{(1)}(K - K_1) d\tilde{K}_1 \\ &+ 9 \Phi^{(1)}(K) \left\{ \int G_{31}(K, K_1, -K_1) \Phi^{(1)}(K_1) d\tilde{K}_1 \right\}^2 \\ &+ 6 \iint \{ G_{33}(K_1, K_2, K - K_1 - K_2) \}^2 \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(K_1) \Phi^{(1)}(K_2) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(K - K_1 - K_2) d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。式(17)の右辺第1項は1次波のパワースペクトル、第2項と第5項は2次波のそれを表す。残りの項は3次のオーダーの解に関するものであるが、そのうち第3項は、定常項と波数の補正項の寄与分、第4項と第6項は分散関係を満たす解の寄与分、第7項は分散関係を満たない解の寄与分を表す。今、 $\varepsilon \sim \delta$ とすると、第1項から第4項までで、 ε と δ に関してパワースペクトルの4次のオーダーまでの全てを表し、第5項から残りは6次のオーダーまでの一部である。パワースペクトルの正値性を満たすためには第7項まで必要であるが、オーダーリングの統一性のためには第4項で打ち切らなければならない

い。又、第7項において、 K をピーク周波数の3倍、 K_1 , K_2 を各々ピーク周波数にとると、この項に含まれる3個の1次スペクトルは全てピーク値をとる。このことから、この第7項が、ピーク周波数の3倍近傍に現れるパワースペクトルの3番目のピークを表していることが分る。

次に、波数の補正量のパワースペクトルによる表現を求める。式(10)の両辺に $b(-K)$ をかけてアンサンブル平均をとると、

$$\begin{aligned} & (n\beta + \omega^2 - \omega^4 h)k^{(2,0)} \\ &= n\zeta^{(2,0)}(\omega^4 - n^2) - 2\omega n n \cdot \mathbf{V}^{(2,0)} \\ &+ \omega n \left\{ \omega F_2(K, K_1, -K_1) - F_1(K, K_1, -K_1) \right\} \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(K_1) dK_1 \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

が得られる。これにより、波速に及ぼす非線形性の影響の一つとしての、平均水位の変化と定常流による効果が評価される。

4. トリスペクトル

この節では水面変動のトリスペクトル $T(K_1, K_2, K_3)$ を求める。トリスペクトルは4つのフーリエ成分の振幅の積の平均として定義され、前節と同様の仮定の基に求めると、

$$\begin{aligned} T(K_1, K_2, K_3) &= \langle B(K_1)B(K_2)B(K_3)B(K_4) \rangle, \\ K_1 + K_2 + K_3 + K_4 &= 0 \end{aligned}$$

より、(以下簡単のため、 $K_1, K_2, \dots$ を数字 1, 2, ... で表す)

$$\begin{aligned} T(1, 2, 3) &= 6G_{31}(-1, -2, -3)\Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(3) \\ &+ 6G_{31}(-1, -2, -4)\Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 6G_{31}(-1, -3, -4)\Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 6G_{31}(-2, -3, -4)\Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 4G(1+2, -1)G(-1-2, -4) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(1+2)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ G(1+2, -2)G(-1-2, -4) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(1+2)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 4G(2+3, -2)G(-2-3, -4) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(2+3)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 4G(2+3, -3)G(-2-3, -4) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(2+3)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 4G(3+1, -3)G(-3-1, -4) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(3+1)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 4G(3+1, -1)G(-3-1, -4) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(3+1)\Phi^{(1)}(4) \\ &+ 4G(1+2, -1)G(-1-2, -3) \\ &\quad \times \Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(1+2) \\ &+ 4G(1+2, -2)G(-1-2, -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(1+2) \\ &+ 4G(2+3, -2)G(-2-3, -1) \\ & \times \Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(2+3) \\ &+ 4G(2+3, -3)G(-2-3, -1) \\ & \times \Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(2+3) \\ &+ 4G(3+1, -3)G(-3-1, -2) \\ & \times \Phi^{(1)}(3)\Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(3+1) \\ &+ 4G(3+1, -1)G(-3-1, -2) \\ & \times \Phi^{(1)}(1)\Phi^{(1)}(2)\Phi^{(1)}(3+1) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

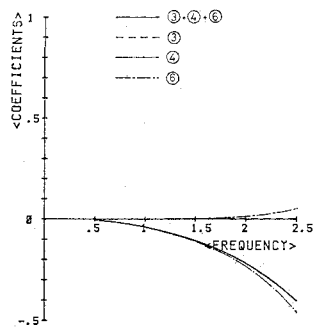
となる。これによると、第1項から第4項までは、 ε の3次の解の効果を表し、第5項から第16項までは2次の解の効果を表している。これらは全てトリスペクトルの leading order の項となっており、最初の予想に反し2次の解も leading order の項を構成している。このことは、トリスペクトル解析によって、特に3次の非線形性だけを直接知ることは出来ないことを意味する。しかし、バイスペクトルによって2次の解の妥当性を確かめれば、トリスペクトルによって3次の解の妥当性を確かめることが出来るであろう。

5. モデル計算および考察

簡単のため以下全て、方向分散を持たない波の一次元変形を考え、沖での1次波のパワースペクトルとして、Pierson-Moskowitz 形を用いる。図1~図4は、式(17)の中で特にピーク周波数近傍にその非線形効果を現すものと考えられる第3項、第4項、第6項の1次スペクトルに対する係数を示す。図中、 E は沖の1次波の全エネルギーを示し、

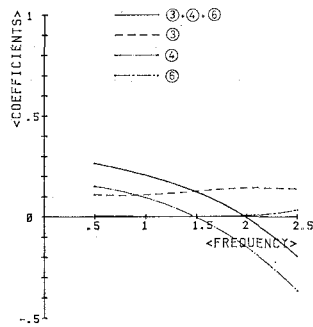
$$\begin{aligned} \textcircled{3} &= 2G_{30}(K) \\ \textcircled{4} &= 6 \int G_{31}(K, K_1, -K_1)\Phi^{(1)}(K_1)d\tilde{K}_1 \\ \textcircled{6} &= 9 \left\{ \int G_{31}(K, K_1, -K_1)\Phi^{(1)}(K_1)d\tilde{K}_1 \right\}^2 \end{aligned}$$

である。これらの係数のうち特に特徴的なのは、第4項の係数で、低周波数側から高周波数側に強い傾きを有している。このことは、高周波側に緩やかな分布を持つ Pierson-Moskowitz 形の1次スペクトルに対し、そのピークを低周波数側に移行させ、同時にピークをより急峻にさせる効果を持つ。図5~図8は、これらの項に1次スペクトルを加えたパワースペクトルを示す。図中、P は各場所での非線形スペクトル、PW は各場所での1次スペクトル、PD は沖での1次スペクトルを表し、(a) は各スペクトルを沖の1次スペクトルのピーク値で正規化、(b) は周波数1の自分自身の値で正規化したものを示す。第4項の係数の性質から期待されたように、非線形が強い程、あるいわ水深が浅い程、ピークの位置は低周波側に移行し、同時に狭帯域なスペクトル分布となる。特に、スペクトル分布の狭帯域化は、最近話題とな



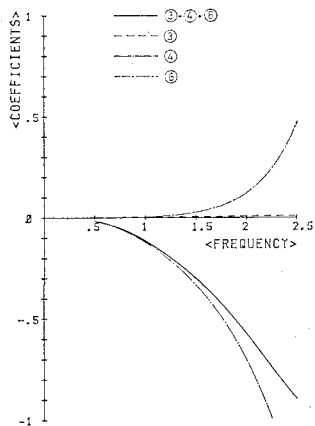
$h=20, E=0.01$

図-1 不規則波変形



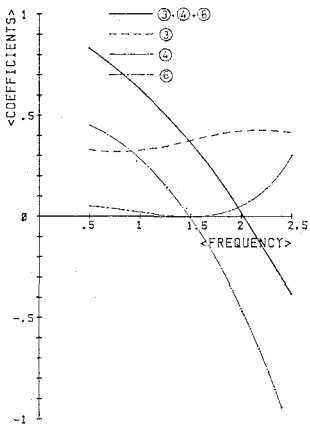
$h=0.4, E=0.01$

図-2 不規則波変形



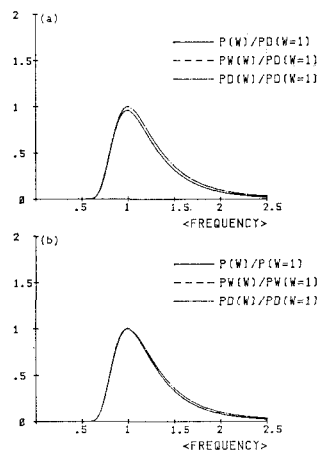
$h=20, E=0.03$

図-3 不規則波変形



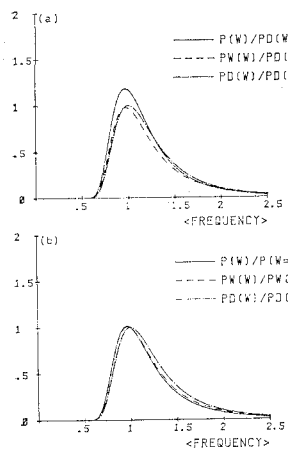
$h=0.4, E=0.03$

図-4 不規則波変形



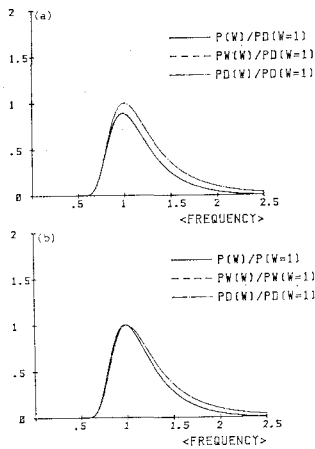
$h=20, E=0.01$

図-5 パワースペクトル



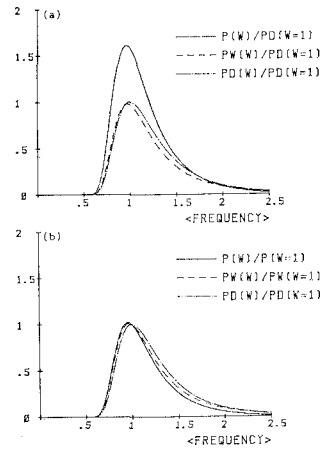
$h=0.4, E=0.01$

図-6 パワースペクトル



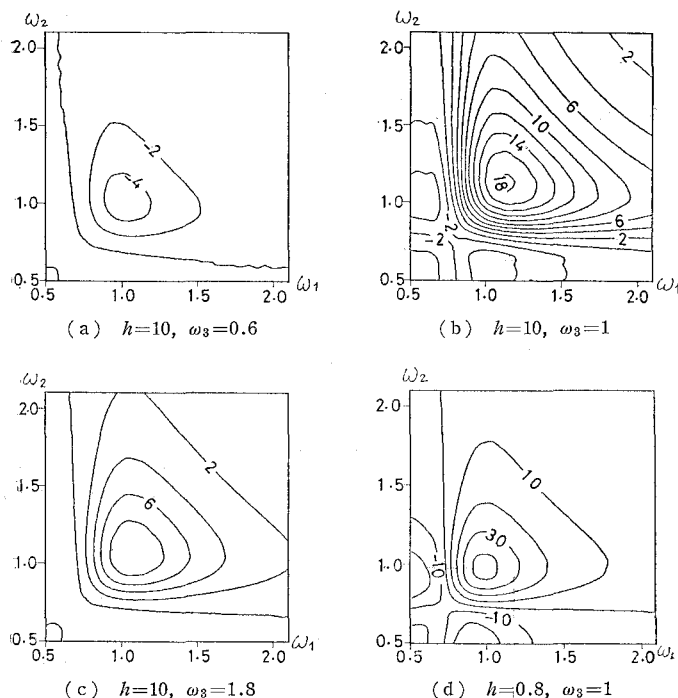
$h=20, E=0.03$

図-7 パワースペクトル



$h=0.4, E=0.03$

図-8 パワースペクトル



図—9 トリスペクトル

っている浅海域での波群構造の強化現象⁴⁾をスペクトル表現の立場から裏付けることとなろう。何故なら、波群はある意味では波の包絡線と考えられ、その包絡線の波長は、良く知られている様に搬送波のスペクトルが狭帯域である程長くなるからである⁵⁾。

図—9 は式 (19) で得られるトリスペクトルの計算例である。沖の 1 次スペクトルの全エネルギーは単位の値とする。トリスペクトルは、3 つの周波数軸で作られる 3 次元空間上で定義されているため、ここでは、そのうちの 1 軸 (ω_3 軸) に直角な平面で切った断面で表わす。これらの図から、Pierson-Moskowitz 形の波のトリスペクトルは、その大きな値がピーク点を頂点に軸方向に伸た分布をし、浅海域で値が増大していること分るが、今後、実測データとの定量的比較が必要となろう。

最後に、式 (17) の第 7 項に含まれている核関数 G_{33} について述べる。この項は第 3 節で述べた様に、パワースペクトルの 3 番目のピークを表わしているが、式 (12) から分る様に、 K が分散関係を満す値に近づくに従って、 G_{33} は発散する。 K が正確に分散関係を満す場合は (Phillips の共鳴条件を満す)、解は G_{31} で表わされ、これは有限値を取り共鳴発散は避けられたが、その周辺での準共鳴は解の中に残されている。従って、実際にはこれらの準共鳴波からなんらかのメカニズムによりエネルギーの流れが生じているものと考えられるが、正確には分らない。又、Goda²⁾ の観測に見られる様に、ある波浪条件のもとでは、パワースペクトルにおいて明瞭な第 3 のピークが存在する。この場合、第 7 項の 1 次スペクトルを one-side で与えれば第 3 のピークが求まるが、実測値との比較が必要となろう。

一方、こういった解の特異性は、一般的には解の不安定性に関係しているとも考え

られ、変形波動場での波の不安定現象として今後研究が進められなければならない。

参 考 文 献

- 1) 浜中健一郎・佐藤典之: 不規則波の非線形変形について, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 138~142, 1984.
- 2) Goda, Y.: Analysis of wave grouping and spectra of long-travelled swell, Rep. The Port & Harbor Res. Inst., Vol. 22, No. 1, 1983.
- 3) Hamanaka, K. and Kato, K.: Asymptotic analysis of finite amplitude waves in water of gradually varying depth, Coast. Eng. in Japan, Vol. 26, pp. 1~10, 1983.
- 4) 土谷義人・安田孝志・山下隆男・平本高志: 海岸波浪の非線形性と波群構造, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 168~172, 1984.
- 5) 合田良實: 港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会, 1978.