

不規則波の連の最大長の確率特性

木 村 晃*・瀬 山 明**

1. はじめに

ここ 10 年ほどの間に、従来の代表波による海中構造物の設計法に関する問題点が指摘されるようになり、現地波浪の確率特性を考慮した構造物の設計の必要性が一般に認識されるようになってきた。これにともない、多くの研究機関で不規則波発生機が設置され、種々の問題でこれを用いた構造物の耐波特性の評価法が確立されつつあり、現在では実験的な検討が必要な場合の標準的な手順になりつつある。ところがやはり最近の研究により、現地波浪が波群特性を持つことが徐々に明らかになって来た。つまり、現地波浪は高波であれ、低波であれ連続する波高には平均 0.2 から 0.3 程度の相関があり、したがって構造物の安全性に大きな影響力を持つ高波は 1 波だけ間欠的に来襲することは少なく、むしろ連続して来襲する傾向のあることが明らかになって来た。つまり高波は波高の確率分布から推定される小さな生起確率でときおり来襲するのではなく、短期的にはそれから予想されるよりずっと大きな確率で来襲する。逆にいえばかなり長時間高波が来襲しないこともある訳である。このため短時間の実験では高波の波群が来襲しないまま終わる場合もあり、この場合にはいかに不規則波を用いた実験であってもその結果は信頼しがたい。高波の連についてはランダムプロセスの仮定にもとづく合田の理論¹⁾、マルコフプロセスの仮定にもとづく著者ら²⁾の理論があるが、これらの理論では主として連の長さならびに再現間隔の確率特性に関して論議がなされており、構造物にとって危険な状況と考えられる高波の連の最大長の確率特性はまだ明らかになっていない。こうした状況のもとで、この研究は波高の連の最大長の確率分布を与えるとともに、具体的な応用例として碎波を選らび、1 ストーム内で予測される碎波の連とその最大長の確率特性を明らかにすること、高波の連の最大長ばかりでなく 2 番目以降の連の確率分布を導き、模型実験における結果の有効性の評価法を与えることを目的に行ったものである。

2. 連の最大長の確率分布

波高の時系列をマルコフプロセスと仮定すると波高 h_t を超過する連の長さ l の確率分布は次式で与えられる²⁾。

$$P_1(l) = p^{l-1}(1-p) \dots\dots\dots (1)$$

ここに波高の確率分布が Rayleigh 分布に従うとすると、

$$p = \frac{\int_{h_t}^{\infty} \int_{h_t}^{\infty} P_0(h_1, h_2) dh_1 dh_2}{\int_{h_t}^{\infty} Q_0(h_1) dh_1} \dots\dots\dots (2)$$

波高はすべて平均波高で正規化したものを用いると、

$$P_0(h_1, h_2) = h_1 h_2 / A \times I_0(h_1 h_2 \rho / A) \exp \{-(h_1^2 + h_2^2) / \pi A\} \dots\dots (3)$$

$$Q_0(h_1) = \pi h_1 / 2 \cdot \exp(-\pi h_1^2 / 4) \dots\dots\dots (4)$$

$$A = 4 / \pi^2 - \rho^2 \dots\dots\dots (5)$$

である。ここに I_0 は変形ベッセル関数、 ρ は相関パラメーターで隣り合う波高の相関係数 r_h との間に次式の関係がある。

$$r_h = \{E(\pi \rho / 2) - (1/2)(1 - \pi^2 \rho^2 / 4)K(\pi \rho / 2) - \pi / 4\} / (1 - \pi / 4) \dots\dots\dots (6)$$

K, E はそれぞれ第 1 種および第 2 種完全楕円積分である。この理論から N 個の独立な連の集合の中の最大の連の確率分布は次のように導かれる。すなわち、(1) 式から連の長さが $l-1$ に等しいかそれより小さくなる確率は次式で与えられる。

$$P_2(l) = \sum_{i=1}^{l-1} p^{i-1}(1-p) = (1-p^{l-1}) \dots\dots\dots (7)$$

したがって N 個のすべての連が $l-1$ かそれより小さくなる確率は $(1-p^{l-1})^N$ で与えられる。一方、少なくとも 1 つ以上の連が l かそれ以上になる確率はこの事象が上の余事象であることから $1 - (1-p^{l-1})^N$ で与えられる。まったく同様に少なくとも 1 つ以上の連が $l+1$ かそれ以上になる確率は $1 - (1-p^l)^N$ で与えられる。したがって N 個の連の集合の中で最大の連が l となる確率は次式で与えられる。

$$P_3(l) = (1-p^l)^N - (1-p^{l-1})^N$$

* 正員 工博 鳥取大学助教授 工学部海洋土木工学科

** 正員 工博 鳥取大学教授 工学部海洋土木工学科

$$= \exp \{N \ln (1-p^l)\} - \exp \{N \ln (1-p^{l-1})\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし $\ln$ は自然対数を取ることを意味する。

図-1 は $N=1000$ の場合について (8) 式の結果を示したもので、基準波高として 1/10 最大波高 (実線)、有義波高 (一点鎖線) および平均波高 (破線) を用いた場合のものである。上の各基準波高を用いた場合、それを越える波の連の繰返し間隔 (トータルラン) の平均値 $\bar{l}$ は普通の風波でおよそ 30.9 (1/10 最大波), 10.1 (有義波), 4.7 (平均波) である²⁾。したがって $N=1000$ の場合、一点鎖線は 10 100 波 ($=N \times \bar{l}$) の波高の時系列の中に現れる有義波高を越える連の最大値の確率分布を与えるものである。

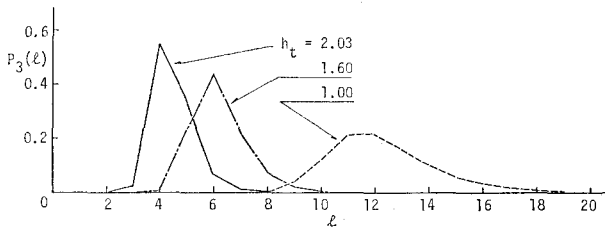


図-1 波高の連の最大長の確率分布 ($N=1000$ の場合)

3. 波高の連の最大長の期待値

N 個の連の期待値は (8) 式をもとに次式で与えられる。

$$\sum_{i=1}^{\infty} N C_i \frac{(-1)^{i+1}}{1-p^i} \quad \dots\dots\dots (9)$$

しかし、 $N C_i$ は N, i が大きくなると計算することが実質的に不可能であるため、ここでは次のような近似を行なう。すなわち、(8) 式の $(1-p^l)^N$ は $N \cdot p^{l_0}=1$ となるように l_0 を選ばば

$$(1-p^l)^N = (1-p^{l-l_0}/N)^N$$

となり、 $p < 1$ であるから N が十分に大きければ

$$(1-p^{l-l_0}/N)^N \simeq \exp(-p^{l'}) \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここに

$$l' = l - l_0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。(10) 式は 図-2 の実線で示すような関数であるが、この式は N が大きくなるほど、また p が小さくなるほど急な立ち上がりを持つようになる。そこでここではこの関数を次式で近似する。

$$\exp(-p^{l'}) \simeq \begin{cases} 0 & l' < l'_* \\ 1 & l' \geq l'_* \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 l'_* は図中の上、下部の斜線部分の面積が等しくなる点で、次式で与えられる。

$$l'_* = \int_0^{\infty} 1 - \exp(-p^{l'}) dl' - \int_{-\infty}^0 \exp(-p^{l'}) dl'$$

$$\simeq -\gamma / \ln p \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに γ はオイラーの定数 ($=0.5772$) である。まったく同様に (8) 式の $(1-p^{l-1})^N$ を次のように近似する。

$$(1-p^{l-1}/N)^N \simeq \exp(-p^{l'-1}) \simeq \begin{cases} 0 & l' < l'_* + 1 \\ 1 & l' \geq l'_* + 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(12), (14) 式の近似を行なうと、(8) 式は l'_* と l'_*+1 の間で 1 となり他の部分はすべて 0 となる関数で近似される。したがって連の最大長の期待値 l_{1*} は (11), (13) 式より

$$l_{1*} = l'_* + l_0 = -(\ln N + \gamma) / \ln p + (2p+1)/(3+3p) \quad \dots\dots\dots (15)$$

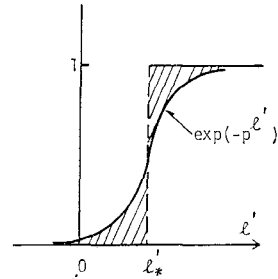


図-2 関数の近似

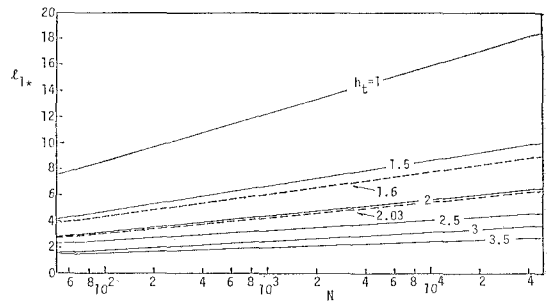


図-3 連の最大長の期待値

ただし最後の項は (8) 式から求めた近似補正項である。

図-3 は N による l_{1*} の変化の様子を示したものである。たとえば 図-1 の部分で例にあげた $N=1000$ 、基準波高として有義波高を用いた場合、最大長の期待値は約 6.2 となる。つまりこの場合、波の平均周期を 10 sec とすれば 10 100 波 $\times$ 10 sec $\approx$ 約 28 時間で観測される最大の連の期待値は約 6 程度である。

4. 砕波の連の確率特性

砕波衝撃力は構造物の安定性に大きな影響を及ぼす。しかし、その程度は構造物の特性に応じて少しずつ異なり、たとえば破壊が徐々に進行するタイプの構造物ではその安定性を一波の砕波衝撃力だけで評価することは危険であり、逆に復元性を持つ構造物の場合、砕波衝撃力

が無限に連続して作用すると考えて設計を行なうのは不合理である。したがって碎波衝撃力の連続作用回数を知ることが構造物の安定性の合理的評価に是非必要と考える。以下ここでは碎波衝撃力の連続作用回数の目安を与えるため、碎波の連ならびにその最大値の確率特性を明らかにする。ただしここで碎波した波とは、碎けた瞬間およびその直後の衝撃力を生ずる可能性のある波を指し、碎波後の bore 状のものは影響力も小さいので、碎後は周期はそのままで、波高は基準値以下の小さな波に変化するものとした。また、深海域の風波では波高の大きな波の周期はほぼ一定値を取る傾向があるので³⁾、周期 T は一定と仮定した。

碎波の影響を含まない波高の確率分布が (4) 式で与えられる場合、波高が h' から $h'+dh$ の範囲に入る連の確率分布は次式で与えられる。

$$P_4(L) = p_b^{L-1}(1-p_b) \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$p_b = \frac{\int_{h'}^{h'+dh} \int_{h'}^{h'+dh} P_0(h_1, h_2) dh_1 dh_2}{\int_{h'}^{h'+dh} Q_0(h_1) dh_1} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 P_0 , Q_0 はそれぞれ (3), (4) 式で与えられる。以下、(7), (8) 式の部分とまったく同じ論議で上の範囲に入る波の連の N 個の集合内の最大長の確率分布は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_5(L) &= (-p_b)^N - (1-p_b^{L-1})^N \\ &= \exp \{N \ln(1-p_b)\} - \exp \{N \ln(1-p_b^{L-1})\} \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

図-4 は平均波高で正規化した波高が 1.3 から 1.5 (実線)、1.7 から 1.9 (一点鎖線) ならびに 2.1 から 2.3 (破線) の範囲に入る連の確率分布を示したもので、図-5 の各線は N を 1000 とした場合の上記範囲内に入る連の最大値の確率分布を示したもので、各線は図-4 と対応している。

また、連の最大値の期待値も同様に (15) 式の p のかわりに (17) 式の p_b を代入して

$$l_{b*} = -(\ln N + \gamma) / \ln p_b + (2p_b + 1) / 3(1 + p_b) \dots\dots (19)$$

となる。

碎波指標としては多くのものが提案されているが、ここでは合田⁴⁾による breaker index を用いる。これの沖波波高勾配と碎波水深/沖波波高の関係図から、深海部において波高、波長を与えるとその波の碎波水深 h_b を読み取ることが出来る。周期を一定と仮定しているため、波高の大きな波から順に碎波することになり、沖波波高を与えると碎波水深がただちに決定される。したがって任意の微小区間に入る波高の連の確率分布である (16) 式はこのままで breaker index から計算される水深での碎波の連の確率分布となる。また同様に、(18) 式は

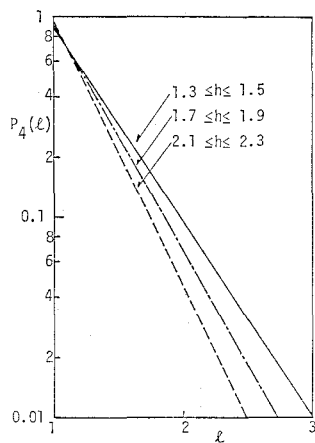


図-4 碎波の連の確率分布

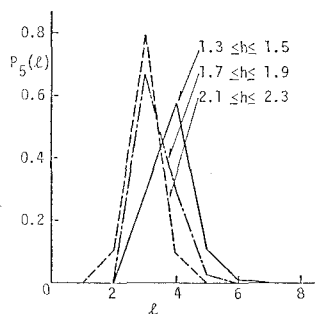


図-5 碎波の連の最大長の確率分布 ($N=1000$)

この水深における碎波の連の N 個の集合での最大長の確率分布、(19) 式は同じ集合での最大長の期待値となる。深海部における平均波高が 5 m、平均周期が 10 sec の不規則波を例に用いて上の部分を具体的に説明すると次のようである。すなわち、図-4 の実線は深海部における波高が 6.5 m~7.5 m、一点鎖線は 8.5 m~9.5 m、破線は 10.5 m~11.5 m の範囲に入る波の連の確率分布となる。前述の範囲を順に (a), (b), (c) とし、各範囲の波高の中央値を用いると、それぞれの波形勾配は (a) 0.045, (b) 0.058, (c) 0.071 となる。海底勾配を 1/20 とすると各範囲の波高の中央値の碎波水深は breaker index より (a) $h_b=9.9$ m, (b) 12.6 m, (c) 15.5 m となり、図-4 の各線は上に示した水深での碎波の連の確率分布となる。したがって、図-5 は上記各水深 (h_b) での碎波の連 1000 個の集合の中の最大長の確率分布となる。図-6 は同じ不規則波の各水深での碎波の連の最大長の期待値を示したものである。ただし $N=1000$ とした。周期一定の仮定は波高が小さくなると成立しなくなるので、波高の小さい波の連にまで適用すると誤差が生ずる。またここでは波高の範囲幅 dh は平均波高の $\pm 10\%$ としたが、同一条件で得られる碎波高の実験結果のばらつきの幅程度の値が適当と考える。

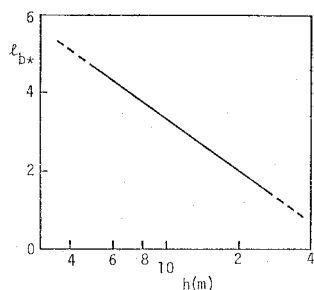


図-6 碎波の連の最大長の期待値

5. 不規則波を用いた実験結果の評価法

1. で述べたように、高波は群をなして来襲する傾向があり、短時間の実験ではこの波群が来襲しないまま終わる場合もある。しかし、構造物の安全性に直接関係するのはこうした高波あるいはその波群であり、実験結果の信頼性は高波の波群の出現頻度に左右される。実験波浪に含まれる高波の波群の統計学的特性の評価は著者らの理論²⁾によれば良いが、詳細な検討には非常に多くの波のデータが必要であり、100 波程度の波ではこの種の検討は困難である。そこでここでは、高波の連を大きさの順に並べ変えた順序統計量の確率特性をもとに実験結果の有為性を検討する方法を提案する。高波の連の最大長の確率特性は 2., 3. で説明したので、ここでは 2 番目以降の連の確率特性について論議する。

N 個の相互に独立な、任意に設定した基準波高 h_i を越える高波の連の集合の中で i 個の連の大きさが l に等しいかそれより大きくなり、残りの $N-i$ 個の連がすべて $l-1$ に等しいかそれより小さくなる確率は

$$P_G(l)^i \cdot P_L(l-1)^{N-i} \dots\dots\dots(20)$$

で与えられる。ここに (1) 式より、

$$\left. \begin{aligned} P_G(l) &= \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}(1-p) = p^{l-1} \\ P_L(l) &= \sum_{i=1}^{l-1} p^{i-1}(1-p) = (1-p^{l-1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

である。

N 個の独立な連から任意に i 個の連を選び出す組み合わせは $N C_i$ 通りある。したがって N 個の連の集合から任意に選ばり出した i 個の連がすべて l に等しいかそれより大きくなり、残りの $N-i$ 個の連がすべて $l-1$ に等しいかそれより小さくなる確率は

$$N C_i P_G(l)^i P_L(l-1)^{N-i} \dots\dots\dots(22)$$

で与えられる。したがって、少なくとも $n+1$ 個以上の連が l に等しいかこれを越える確率は次式で与えられる。

$$1 - \sum_{i=0}^n N C_i P_G(l)^i P_L(l-1)^{N-i} \dots\dots\dots(23)$$

まったく同様に、 N 個の独立な高波の連のうち $n+1$ 個以上の連が $l+1$ に等しいかこれを越える確率は

$$1 - \sum_{i=0}^n N C_i P_G(l+1)^i P_L(l)^{N-i} \dots\dots\dots(24)$$

で与えられる。最後に、大きい順に数えて $n+1$ 番目の連が l となる確率は

$$P_{n+1}(l) = \sum_{i=0}^n N C_i \{ p^{i l} (1-p^l)^{N-i} - p^{i(l-1)} (1-p^{l-1})^{N-i} \} \dots\dots\dots(25)$$

となる。そして $n+1$ 番目の連の大きさの期待値は (12), (15) 式と同じ近似を用いると、

$$l_{(n+1)*} = l_{1*} - \sum_{i=1}^n N C_i \left\{ \sum_{l=l_1}^{\infty} \left(\frac{p^l}{1-p^l} \right)^i \right\} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots(26)$$

となる。ここに l_{1*} は (15) 式で与えられる。

高波の連の順序統計量が (25) 式で与えられるそれぞれの確率分布の有為な範囲内に入れば実験結果は統計学的に有為であると結論できる。例えば 95% 信頼区間を用いるとすれば各々の順序統計量 l_{n+1} ($n=0, 1, \dots$) が (25) 式の確率分布関数である次の式を満たす l_1, l_2 の間に入ればよい。

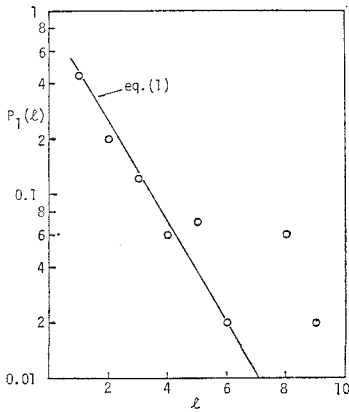
$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n N C_i p^{i l_1} (1-p^{l_1})^{N-i} &= 0.025 \\ \sum_{i=0}^n N C_i p^{i l_2} (1-p^{l_2})^{N-i} &= 0.975 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

表-1 は Pierson-Hoskowitz タイプのスペクトルシミュレーションで得た波高のデータを処理して得た、平均波高を越える 50 個の連の頻度を示したものである。図-7 は表-1 のデータを (1) 式 (実線) と比較したものである。図からわかるように、 $l=4$ 程度まではデータと理論の対応は良好であるが、それ以上の部分ではばらつきが大きく、両者の対応性の評価は困難である。これは主にデータが少ないことに起因するもので、この部分における対応性を詳細に検討するためには数多くのデータが必要である。そこでここではこの部分のデータと理論の対応性をここで求めた順序統計量の確率特性を用いて評価する。表-1 のデータを大きい順に並べ変え順位ごとに連の長さをプロットしたものが図-8 である。図には (27) 式の信頼区間 (95%) をあわせて示した。図から、ここで用いたデータは信頼区間内かそれを上にはずれる

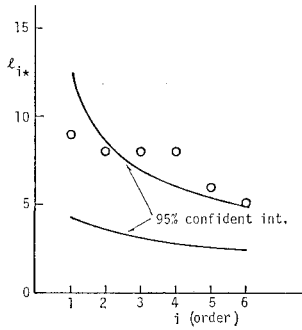
表-1 平均波高を超過する連の分布

連の長さ	連の数 ①	頻度 (①/N)	理論値 [(1) 式]
1	22	0.44	0.467
2	10	0.20	0.249
3	6	0.12	0.133
4	3	0.06	0.071
5	4	0.08	0.038
6	1	0.02	0.020
7	0	0	0.011
8	3	0.06	0.006
9	1	0.02	0.003

ものが多く、統計学的には若干かたよりを持つと考えられる。



図—7 平均波高を越える連の確率分布



図—8 順序統計量の信頼区間

6. おわりに

この研究で示した碎波の連の確率特性は波高の範囲幅((17)式の dh) で左右される。合田はその不規則波の碎波変形の理論⁵⁾で、水深での碎波限界波形勾配を

$$\frac{H_b}{L_0} = A \left\{ 1 - \exp \left[-1.5 \frac{\pi h}{L_0} (1 + 15 \tan^{4/3} \theta) \right] \right\}$$

のように与え、定数 A が 0.12 から 0.18 の範囲の波が選択的に碎波するとして良好な結果を得ている。この理論では周期が固定してあるため、 A の値の中央値 $A = 0.15$ に対応する H_b を中心としたその $\pm 20\%$ の範囲の波が(選択的にではあるが)碎波すると見なしたことになる。ここで用いた dh ももう少し大きく取る方が望ましいかとも思われたが、この点に関する詳細な情報がないこと、この幅は状況に応じて変化する可能性があることなどから今後の検討課題とし、ここでは便宜的に平均波高の $\pm 10\%$ とした。

参考文献

- 1) Goda, Y.: Numerical experiment on wave statistic with spectral simulation, Rept. Port and Harbour Research Res. Inst., Vol. 9, No. 3, pp. 3~75, 1970.
- 2) Kimura, A.: Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th Conf. Coastal Engg., pp. 2955~2973, 1980.
- 3) Goda, Y.: The observed joint distribution of periods and heights of sea waves, Proc. 16th Conf. Coastal Engg., pp. 227~246, 1978.
- 4) 合田良実: 碎波指標の整理について, 土木学会論文報告集, No. 180, pp. 39~49, 1970.
- 5) 合田良実: 浅海域における波浪の碎波変形, 港湾技術研究所報告第 14 巻第 3 号, pp. 59~106, 1975.