

単一波群の非線形伝播変形とうねりの波群構造

間瀬 肇*・古室健史**・岩垣雄一***

1. まえがき

不規則波の波群特性は、これまで主に統計的な観点から考察されてきたが、最近では非線形波動理論に基づいて考察されるようになってきた^{1),2)}。基礎となる波動理論式としては非線形 Schrödinger 方程式や Zakharov 方程式が挙げられる。

分散係数と非線形係数が同符号、すなわち、 $kh > 1.36$ の場合の非線形 Schrödinger 方程式は、局在化した攪乱の場合には、逆散乱法により解析的に解ける (Zakharov-Shabat³⁾)。その結果を Yuen-Lake⁴⁾ は次のように整理している。1) 任意形状の包絡波形は、伝播に伴い、いくつかの包絡ソリトンと振動するしっぽ (tail) に分裂する。2) 形成される包絡ソリトンは初期条件によって決まる。3) 包絡ソリトンが形成されるまでの時間は、攪乱の包絡波形の長さに比例し、振幅に反比例する。4) 包絡ソリトンは安定であり、他の包絡ソリトンとの衝突や追いつきに対しても、位相が変化するだけである。5) しっぽは相対的に小さく、時間の経過とともに減衰する。これらの解析結果のいくつかは、実験的に確かめられている⁴⁾。こうした単一波群 (英語では wave packet といわれ、日本語では波束と訳されるが、ここでは単一波群と呼ぶ) の伝播に関する研究はほとんど深海の場合を対象としたものである。

本研究は、うねりの波群構造や伝播に伴う不規則波の波群特性の変化を考察するための基礎として、深海の場合のみでなく、一樣水深の浅海域を伝播する単一波群の伝播変形を実験によって、また非線形 Schrödinger 方程式の数値計算によって調べようとするものである。特に、非線形 Schrödinger 方程式の分散係数と非線形係数が異符号となる浅海域における波群の伝播変形はこれまで検討されていない。

2. 実験装置および実験方法

(1) 実験装置

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 川崎製鉄

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

実験は長さ 27 m、幅 50 cm、深さ 75 cm の両面ガラス張り水槽で行った。この水槽の一端には電気油圧式不規則波発生機が設置されている。

単一波群の伝播実験は、水深が 50 cm、30 cm および 15 cm の 3 種類の水深について行ったが、水深が 15 cm と小さい場合には小さな波しか造波できないので、次のような工夫をした。造波板から 1 m までは水深を 50 cm とし、それより後の部分に足場を作って、その上に鉄のアンクルで補強した幅 48 cm、長さ 4 m のジュラルミンの板を水平に 5 枚並べた。水深は水平板の下の足場の高さを変えることによって調整した。ジュラルミンの底板の前面には約 45° の傾斜板を設置した。水槽側壁とジュラルミン底板の隙間は布テープを貼り、隙間を通しての水の移動を防いだ。水深を 50 cm とする実験は足場およびジュラルミンの底板を取り除いて行った。実験装置の概要図は図-1 に示してある。

水位変動は、造波板から 3.35 m 離れた地点を始点として 3 m 間隔で設置した 6 台の容量式波高計 (W-1~W-6) を用いて測定した。

(2) 実験方法

実験に先立って、sin 型および soliton 型単一波群を実験水槽内で発生させるための造波信号を作成した。

sin 型波群は、次式に示すように包絡波形が 1/2 周期の正弦波とし、その中の成分波は正弦波とした。

$$\eta(t) = \sin(2\pi ft) \sin(\pi ft/n) \cdots \cdots (1)$$

$$0 \leq t \leq n/f \quad (n: \text{整数})$$

ここで、 f は成分波の周波数であり、0.8 Hz から 0.1 Hz おきに 3.0 Hz までの 23 ケースとした。また、 n の値を 10、15、20 とし、波群を構成する成分波の数を 10

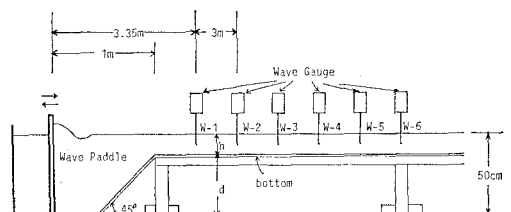


図-1 実験装置の概要図

波, 15 波および 20 波とした。

実際には, 造波板の変位を式 (1) で与えた。すなわち, t を 0 から 0.001 秒ごとに变化させ, 変位量を計算機用磁気テープに書き込んだ後 D-A 変換し, 入力信号とした。実験に際しては, それぞれのケースの造波信号に対して, 不規則波発生装置の外部入力端子の gain を調整することによって, 包絡波形の最大振幅が異なる数種類の sin 型波群を発生させた。

soliton 型波群は, 次式のように, 包絡波形が非線形 Schrödinger 方程式の安定解である包絡ソリトンとし, その中の波は正弦とした。

$$\eta(t) = a \operatorname{sech} \{ -(a^2 \beta / 2\alpha)^{1/2} C_0 t \} \\ \times \cos(a^2 \beta / 2 + 2\pi f) t \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで, a は最大振幅, α と β はそれぞれ非線形 Schrödinger 方程式の分散係数と非線形係数⁵⁾, C_0 は群速度である。水深 h と周波数 f を与え, 係数 α , β および C_0 が決まり, 最大振幅 a を与えると水位変動が決まる。周波数 f は 0.8 Hz から 0.1 Hz おきに 3.0 Hz までの 23 ケースとし, 水深は 50 cm, 30 cm および 15 cm の 3 ケースとした。それぞれのケースに対して振幅 a は 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 cm の 4 通りとした。

実際には, 造波板の変位を式 (2) で与えた。式 (2) の t の範囲は $|t| \leq 5 / \{ (a^2 \beta / 2\alpha)^{1/2} C_0 \}$ とし ($\operatorname{sech} 5 \approx 0.01$, すなわち, 最大振幅の約 1% で打ち切った), 0.001 秒ごとに計算して, その結果を磁気テープに書き込んだ後 D-A 変換し, 入力信号とした。実験に際しては, 波高計 W-1 の位置での包絡波形の振幅が目標とした振幅になるように不規則波発生装置の外部入力端子の gain を調整した。造波板を式 (2) のように変位させても水位変動は正確には式 (2) にはならないので, 得られる包絡波形は包絡ソリトンとは若干異なる。

3. 波群の伝播変形の実験結果および力学的考察

(1) 実験装置および考察

波高計 W-1 での記録を用いて, 波群を構成する波の数が 15 波である sin 型波群の全ケースについて, 波群中の最大波のアーセル数 $U_r (=HL^2/h^3)$ と無次元峰高 η/H を調べた。大部分は η/H が 0.6 以下であり, 上下対称の包絡波形が定義できる条件であることがわかった。アーセル数が 15 以上では η/H は 0.6 以上となり, 上下の非対称性が大きくなっていった。

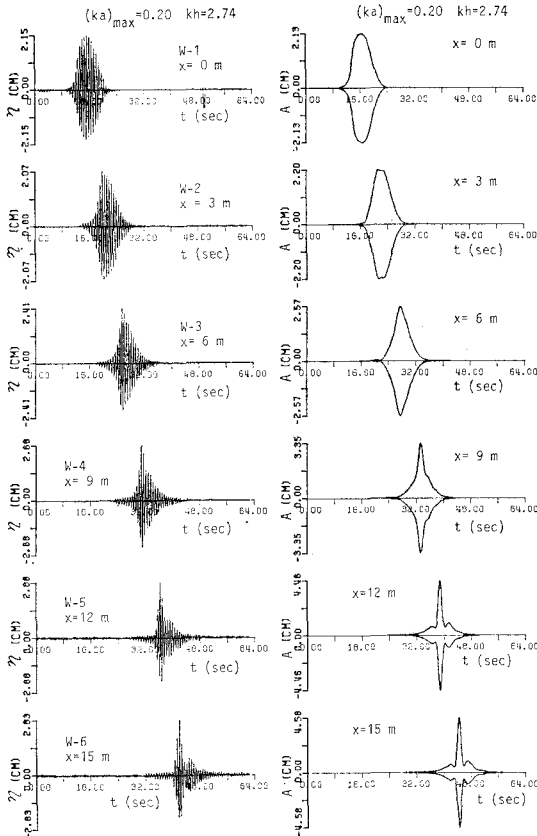
図-2 および 図-3 の (a) は成分波の周波数が 1.5 Hz で, 波の数が 15 波の sin 型波群の伝播変形の実験結果を示したものである。それぞれの図の (b) は, 後に述べる非線形 Schrödinger 方程式の数値計算結果である。図-2 は水深が 30 cm ($(ka)_{\max}=0.20$, $kh=2.74$), 図-

3 は 15 cm ($(ka)_{\max}=0.20$, $kh=1.50$) であり, 初期包絡波形の最大振幅は約 2 cm である。水位変動を出力するにあたっては, 最大変位が図では一定長さになるようにしているの, 縦軸の目盛はそれぞれ異なっている。同様に, 包絡波形の数値計算結果も最大振幅が図では同じ長さになるようにプロットしてある。実験では水槽底面および側壁による摩擦のために最大振幅が減少するが, 計算ではそれを考慮していない。しかし最大変位が同じになるようにすると, 両者の包絡波形は良く一致する。

図-2 と 図-3 の波高計 W-1 における初期包絡波形はほとんど同じである。図-2 の実験結果を見ると, 包絡波形はまず前かがみの波形となり, 2つの波群に分裂していく傾向が見られる。非線形 Schrödinger 方程式の数値計算結果では, 3つの波群が現われる。数値計算によってこの後の波群の変形を調べたところ, このまま包絡ソリトンに分裂していくのではなく, 再帰現象が見られた。図-3 のように水深が 15 cm と浅い場合には, 図-2 に見られるような包絡波形の変形とは異なり, 前後に対称な三角形の包絡波形となっていく。このケースは相対水深が 1.50 であり, 限界値 1.36 より大きい変調不安定領域に入っているの, 理論では包絡ソリトンが形成される条件である。このケースの包絡波形の長時間発展を数値計算で調べたところ, 伝播距離が増加してもほとんど変形しない波群 (包絡ソリトン) が形成されるのがわかった。

水深 50 cm, 成分波の周波数が 1.4 Hz の sin 型波群の伝播変形の実験結果を基に, 波群の分裂 (包絡ソリトンの形成) に関する初期包絡波形の長さや振幅の影響を考察した。その結果, 初期包絡波形が短いほど波群が分裂し始める伝播距離は短いこと, また包絡波形の振幅が大きいほど短いことを実験で確かめることができた。

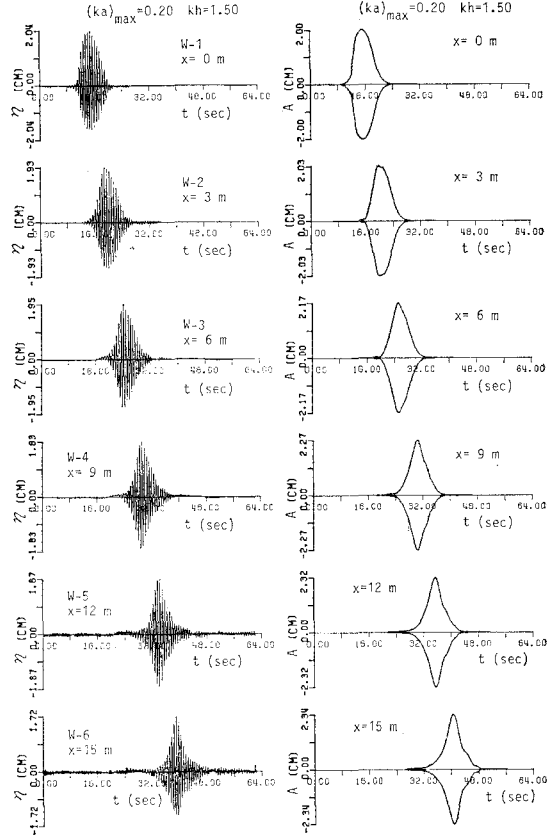
次に soliton 型波群の伝播変形について調べる。深海における包絡ソリトンの伝播の実験はすでに Yuen ら⁴⁾ によって行われている。ここでは, 深海で形成された安定な包絡ソリトンが急に浅海域に入り, その後伝播していく過程における包絡波形の変形について調べる。図-4 および 図-5 の (a) は成分波の周波数が 1.2 Hz, 最大振幅が約 3.0 cm の水深 50 cm において安定な包絡ソリトンが, 水深 50 cm (図-4, $(ka)_{\max}=0.18$, $kh=2.92$) の一定水深領域を伝播する時と, 水深 15 cm (図-5, $(ka)_{\max}=0.23$, $kh=1.09$) の一定水深領域を伝播する時の実験結果を示したものである。それぞれの図の (b) は非線形 Schrödinger 方程式の数値計算結果である。図-4 より, 50 cm の一定水深領域を伝播しても, その包絡波形はほとんど変化しない (最大振幅の値は波の減衰のため若干小さくなっていく) ことがわかる。ま



(a) 実験結果

(b) 数値計算結果

図-2 sin 型波群の伝播変形 (水深 30 cm)



(a) 実験結果

(b) 数値計算結果

図-3 sin 型波群の伝播変形 (水深 15 cm)

た、これは数値計算によっても確かめられる。ただし、初期包絡波形が包絡ソリトンの理論解とは若干異なるので、実験で得られた包絡波形を初期値として、長時間の包絡波形の変化を調べると、若干変化していく。図-5の相対水深 kh が 1.36 より小さいケースでは、図-4 とはかなり異なった変形の様子が見られる。波高計 W-5 および W-6 の位置では、包絡波形のピーク付近の波の波高がそろっており、縦軸の値も参考にすると、扁平になっていることがわかる。このケースの長時間発展の数値計算結果では、その傾向が一層顕著に見られる。

(2) 計算結果および考察

次式で示す非線形 Schrödinger 方程式の数値計算に当たっては、Mei³⁾ が示している Crank-Nicolson 型の差分化を用いた。

$$-i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + C_0 \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0 \quad \cdots (3)$$

(α, β は文献 5) を参照)

図-2 および 図-3 の (b) は、非線形 Schrodinger 方程式の数値計算結果である。計算で与える初期包絡波形 (初期条件) としては、波高計 W-1 における水位変動の

峰を滑らかに結んだ波形を初期時間波形とし、それを空間波形に変換したものをを用いた。すなわち、初期時間波形の時間長さを T 、搬送波の群速度 C_0 とし、 $A[C_0 T(1 - t/T), 0] = A(0, t)$ で与えた。図の波高計 W-2 以後の数値計算結果は、波高計 W-1 からの距離を群速度で割った時間後の計算結果である空間波形を、再び時間波形に変換し、実験結果と比較できるようにしてある。包絡波形の最大振幅は同じ長さになるようにしているので、縦軸の値は少しずつ異なる。

図-2 では、実験結果は波高計 W-5 の位置でまだ波群の分裂は見られないが、計算結果ではすでにその傾向が見られる。波の減衰 (計算では考慮していない) が実験結果と計算結果の差異となって現われてくるが、この点については今後波の減衰を考慮した計算を行うことによって検討する。3 次のオーダーの非線形 Schrödinger 方程式の数値計算では、初期波形として前後対称の波形を用いると、その後の計算結果は常に対称な波形となる。しかし、今回の計算では、波高計 W-1 の実験結果を初期値として用いており、前後に対称となっていないので、その後の計算結果も前後対称とはなっていない。

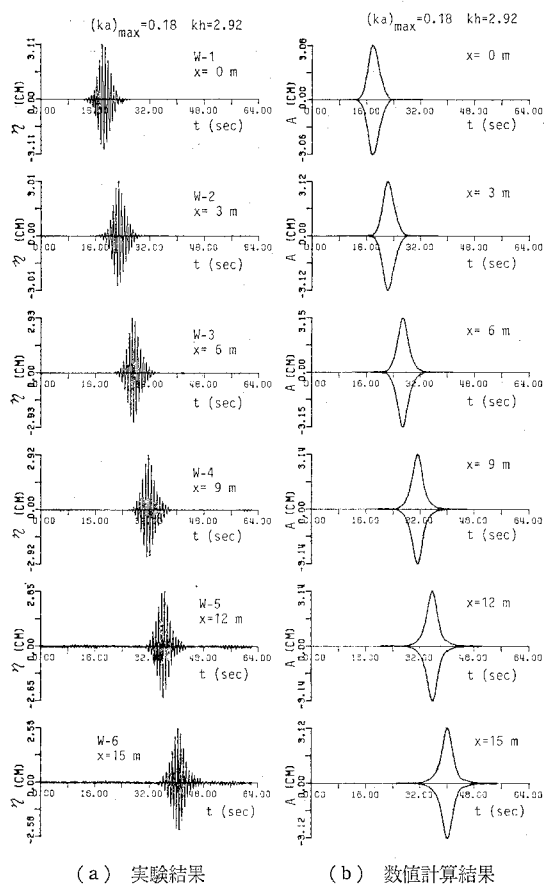


図-4 soliton 型波群の伝播変形 (水深 50 cm)

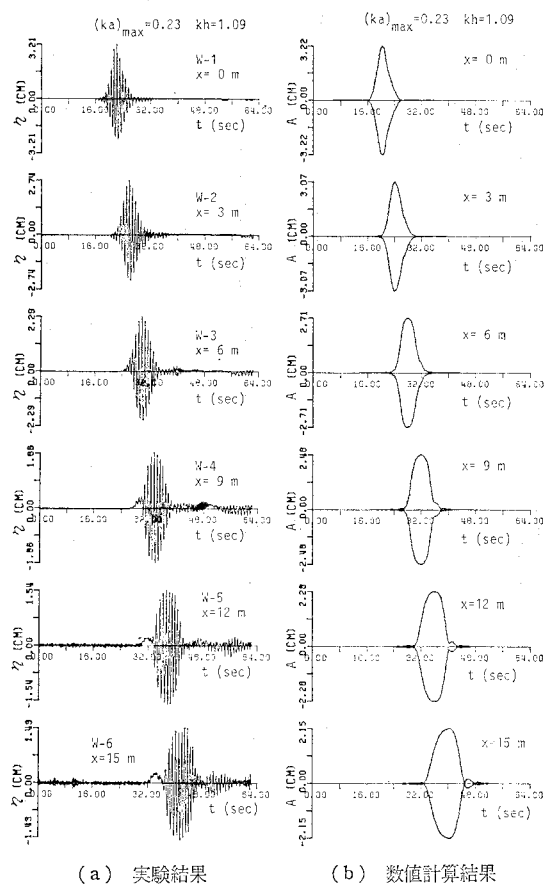


図-5 soliton 型波群の伝播変形 (水深 15 cm)

いずれにせよ、実験結果と数値計算結果の対応は良く、特に図-3で、伝播につれて包絡波形が三角形に変化していく両者の結果は良く一致している。

図-4および図-5の(b)は水深 50 cm において安定な包絡ソリトンの伝播変形を数値計算によって求めた結果である。水深が 50 cm のケース 図-4(b)では、初期値は実験波形を用いており、正確に sech 型の包絡ソリトン波形を入力したわけではないので、若干の変形は見られるものの、包絡波形はほとんど変化せずに伝播しているのがわかる。水深が 15 cm の図-5(b)では、伝播に伴い包絡波形は扁平化していく。これらの数値計算結果は実験結果と非常に良く一致している。

図-6は、図-5(b)のその後の波群の伝播変形を計算したものである。相対水深 kh が 1.09 の場合には、もはや包絡ソリトンは存在し得ない条件となり、この領域では phase jump と呼ばれる暗いソリトンが安定な解となる⁹⁾。このような場合の包絡波形の変化は、図のように扁平化していく。これは初期包絡波形が包絡ソリトンの場合に限ったことではなく、sin 型波群の場合にも $kh=1.09 < 1.36$ となる条件では、波群の長時間発展を

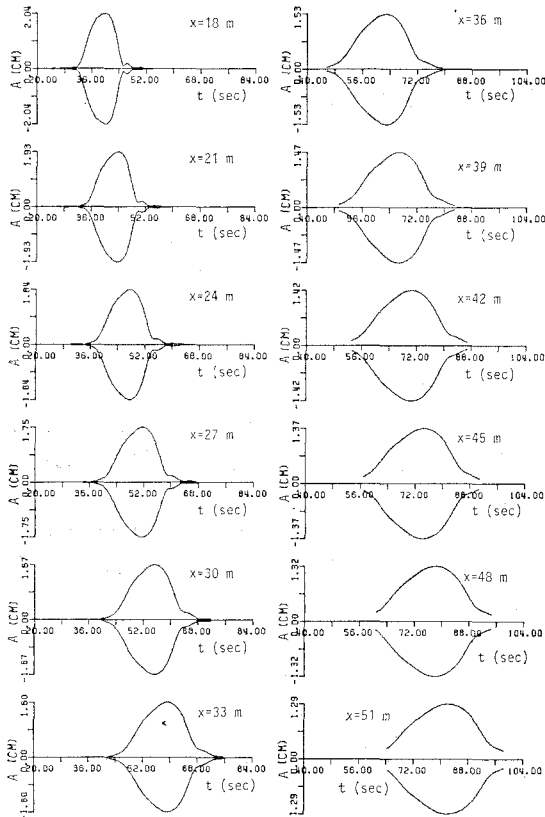
計算すると、包絡波形は扁平化していくことがわかった。

単一波群の伝播変形の実験および数値計算により、 $kh=1.36$ を境にして包絡ソリトンが形成される場合と波群が扁平化する場合に分けられることがわかった。

4. うねりの波群構造および不規則波の波群特性の考察

以上の結果に基づいて、コスタリカで観測されたうねりの波高の連が大きい⁶⁾理由を考察する。

このうねりのスペクトルはピークが非常に鋭く、スペクトルの先鋭度パラメーター Q_p は 5 程度である⁹⁾。一般にスペクトルが鋭いほど波高の連は大きくなるが、このうねりの波高の中央値を基準とした平均連長は、 Q_p が 5 程度の数値シミュレーションによる不規則波のそれより大きくなっている(文献 6)の Fig. 23 を参照)。ここではスペクトル形の他に、波の伝播過程に注目して考察する。深海を狭帯域スペクトルのうねりが長距離伝播する過程で包絡ソリトンが形成され、この包絡ソリトンを基本モードとする波群構造が形成される。この波列が



図—6 soliton 型波群の伝播変形の計算結果 (図—5 (b) のその後の計算結果)

浅海に入ってきて伝播する過程で、それぞれの包絡ソリトンは扁平化し、波列は扁平な波群が連なり合ったものとなる。その結果、波高の連は大きくなる。この解釈は個々波がソリトン化していくために包絡ソリトンが崩壊していくという土屋ら⁷⁾のものと似ているが、この場合は波群を構成する個々の波がソリトン化していくためであると考えなくても（このうねりの個々波の峰高波高比を平均したものは 0.6 以下であり、上下の非対称性はあまり顕著ではない）、 $kh < 1.36$ なる浅海域を包絡ソリトン（包絡ソリトンでなくても、任意の波群で良い）が伝播していく過程で扁平化するという点が異なる。

次に、伝播に伴う不規則波の wave group 特性の変化について考察する。著者らの研究¹⁾によれば、 $(kh)_{1/3} <$

1.36 の場合には、伝播に伴い Groupiness Factor はあまり変化しないか、あるいは減少し、一方波高の平均連長は大きくなるが見出された（特に Case 1 の No. 3）。これらのケースは伝播に伴ってスペクトルはほとんど変化していないので、波高の平均連長の増加はスペクトル形との関連では説明できないことは以前に述べた。この GF の減少および波高の平均連長の増加は、波群が扁平化する傾向にあると考えれば、説明できる。 $(kh)_{1/3} > 1.36$ の場合に、初期に波群が顕著でなくても、伝播に伴って波群化が進んでいく、すなわち、 GF も波高の平均連長もともに大きくなるのは、スペクトルの先鋭化よりも波列の変調不安定性の方が主要因であると考えられる。これは以前の研究の結論と同じである。

5. あとがき

本研究は、単一波群の非線形伝播変形を実験および数値計算により調べた。その結果、 kh が 1.36 より小さいと伝播に伴い波群が扁平化することが明らかになった。また、単一波群の非線形伝播特性に基づいて、うねりの波群構造と不規則波の伝播に伴う波群特性の変化について考察した。

参考文献

- 1) 間瀬 肇・古室健史・岩垣雄一：伝播に伴う Wave Group 特性の変化，第 31 回海岸工学講演会論文集，pp. 158~162, 1984.
- 2) 間瀬 肇・岩垣雄一：波の変調不安定理論に基づく現地波浪の Wave Group 特性の解析，第 32 回海岸工学講演会論文集，pp. 184~188, 1985.
- 3) Zakharov, V. E. and A. B. Shabat: Exact theory of two-dimensional self-focusing and non-dimensional self-modulating waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP 34, pp. 62~69, 1972.
- 4) Yuen, H. C. and B. M. Lake: Nonlinear deep water waves: Theory and experiment, Phys. Fluids, Vol. 18, No. 8, pp. 956~960, 1975.
- 5) Mei, C. C.: The applied dynamics of ocean surface waves, Wiley, 740 p., 1983.
- 6) Goda, Y.: Analysis of wave grouping and spectra of long-travelled swell, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 22, No. 1, pp. 3~41, 1983.
- 7) 土屋義人・安田孝志・篠田成郎：うねりのソリトンモードと波群構造，第 31 回海岸工学講演会論文集，pp. 188~192, 1984.