

波の変調不安定理論に基づく現地波浪の Wave Group 特性の解析

間 瀬 肇*・岩 垣 雄 一**

1. ま え が き

現地波浪の Wave Group 特性の解析に当っては、波高の連や高波の繰り返し長さといった統計量を取り上げ、それらの値や時間変化を調べたり、観測結果を連の理論と比較して、理論の妥当性を検証したりするのが通例である。その場合、統計的な観点に基づいた議論が中心となる。連の理論も一般の不規則変動の解析に用いる統計理論に基づいたものであり、その理論に必要なパラメータは波のスペクトル形や波高の確率分布より与えられることから、波の特性とある程度は結びついているが、波の場の力学すなわち波動理論に基づいた考察はほとんどなされていない。Wave Group 特性を表わす統計量が変化する場合にも、それらには波の力学的機構に支配された特徴が現われていると考えられる¹⁾。

間瀬・古室・岩垣¹⁾による波の伝播距離の増加に伴うスペクトルの変化の実験結果および Hatori²⁾による fetch 方向の風波のスペクトルの発達の実験結果に見られるように、エネルギー Spektral のピークの両側にはスパイクが存在する。これらのスパイクは低周波モードの方が卓越しているが、不規則波浪にはこの変調モード (side band) の存在による振幅変調が内在していることが考えられる。Lake-Yuen³⁾は室内実験による風波の変調周波数と Benjamin-Feir⁴⁾の理論による波の変調周波数を比較し、両者のばらつきは大きい、定性的には合っていることを示した。

本研究は、波の変調不安定という力学的な観点から現地波浪の Wave Group 特性を考察することを目的とするもので、Wave Group 特性を表わす統計量として波の振幅変調周期 (これを代表的な波の周期で割れば高波の繰り返し長さに対応する) を取り上げ、その実測値と非線形波動理論の一つである Zakharov 方程式を用いて算定した波の振幅変調周期を比較・検討する。

2. Zakharov 方程式を用いた波の振幅変調周期の算定

波の変調不安定を解析する場合、有限振幅の影響を考慮できる Zakharov 方程式を用いなければならないことが、Crawford-Lake-Saffman-Yuen⁵⁾によって示されている。ここでは Crawford らおよび Stiassnie-Sheemer⁶⁾に従って、Zakharov 方程式を用いた波の変調不安定理論を示す。この結果を用いて波の振幅変調周期を算定し、後に実測値との比較を行う。なお、Crawford らは深海における 3 次のオーダーの Zakharov 方程式を用いており、Stiassnie らは任意水深 (ただし一様水深) における 4 次のオーダーの Zakharov 方程式を誘導し、その結果を用いている。ここでは、任意水深における 3 次のオーダーの Zakharov 方程式を採用する。

いま $B(\mathbf{k}, t)$ を振幅スペクトルとすれば、Zakharov 方程式は次のように表わされる。

$$i \frac{\partial B(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \iiint_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \\ \times B^*(\mathbf{k}_1, t) B(\mathbf{k}_2, t) B(\mathbf{k}_3, t) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \\ \times \exp[i\{\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3)\}t] \\ \times d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\mathbf{k}$ は (k_x, k_y) なる波数ベクトル、 $\omega(\mathbf{k})$ は $\omega(\mathbf{k}) = (g|\mathbf{k}| \tanh|\mathbf{k}|h)^{1/2}$ の分散関係を満たす角周波数、 δ はデルタ関数であって、この式は振幅スペクトル $B(\mathbf{k}, t)$ の相互干渉を表わしている。積分核 $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ (以後 $T_{0,1,2,3}$ のように波数を省略して記す) は文献 6) に示されている。ただし、この文献にはミスプリントが数箇所あるので、Stiassnie 博士より直接教えて頂いて、正しく訂正したものをを用いた。

波数ベクトル $\mathbf{k}_0 = (k_0, 0)$ を持つ一定振幅の波列の場合には次のようになる。

$$B_0(\mathbf{k}_0, t) = b_0 \exp(-iT_{0,0,0,0}b_0^2t) \dots\dots\dots (2)$$

搬送波の振幅 a_0 と式 (2) の b_0 には

$$b_0 = \pi(2g/\omega_0)^{1/2}a_0 \dots\dots\dots (3)$$

の関係がある。この一定波列に $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 - \mathbf{K}$ および $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{K}$ の波数を持ち、振幅がそれぞれ $B_1(\mathbf{k}_1, t)$, $B_2(\mathbf{k}_2, t)$ (ただし $|B_1|, |B_2| \ll |B_0|$) の攪乱波が加わった場合を考える。式 (1) から、微小量の 2 次のオーダーを無視して、次式が得られる。

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

$$i \frac{dB_1}{dt} = 2T_{1,0,1,0} b_0^2 B_1 + T_{1,2,0,0} B_2^* b_0^2 \exp(-i\bar{\omega}t) \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$i \frac{dB_2}{dt} = 2T_{2,0,2,0} b_0^2 B_2 + T_{2,1,0,0} B_1^* b_0^2 \exp(-i\bar{\omega}t) \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 $\bar{\omega} = (2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2) + 2T_{0,0,0,0} b_0^2$ である。

B_1, B_2 に次の解を仮定する。

$$B_1 = b_1 \exp\{-i(0.5\bar{\omega} - \Omega)t\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$B_2 = b_2 \exp\{-i(0.5\bar{\omega} + \Omega)t\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

これらを式(4)および(5)に代入し、 b_1, b_2 が有意な解を持つ条件として次式が得られる。

$$\Omega = (T_{2,0,2,0} - T_{1,0,1,0}) b_0^2 \pm \sqrt{\{0.5\bar{\omega} - (T_{1,0,1,0} + T_{2,0,2,0}) b_0^2\}^2 - T_{1,2,0,0} T_{2,1,0,0} b_0^4} \quad \dots\dots\dots(8)$$

根号の中が負の場合に擾乱波は時間とともに増大し、振幅変調が現われることになる。

波はすべて一方向に伝播する場合を考え、 $\mathbf{K} = (K_x, 0)$ とし、無次元波数差 $\kappa = K_x/k_0$ を定義する。図-1 は変調モードの無次元増加割合 $2\text{Im}(\Omega)/(\omega_0 k_0^2 a_0^2)$ (Im は複素数の虚数部を意味する) を、搬送波の $k_0 a_0$ (波形勾配の π 倍に等しいので、以下これを波形勾配と称する) をパラメーターとして、無次元波数差 κ を $2k_0 a_0$ で割ったものに対して計算した結果を示したものである。

(a) は $k_0 h$ (水深波長比の 2π 倍なので、以下これを水深波長比という) が 10.0 の場合 (これは深海の条件となっており、Crawford らの結果と同じである)、(b) は 2.0、(c) は 1.5 の場合である。 κ が小さくなると計算結果が発散する場合があるが、そのような場合の計算結果は示していない。例えば、(a) 図で波形勾配 $k_0 a_0$ が 0.1 の場合、 $0 < \kappa/2k_0 a_0 < 1.23$ なる条件で変調不安定が起こることを示している。深海における非線形波列の実験では、一定振幅の波を造波しても、伝播距離が増加すると変調モードが発達してきて、波はビートを打つようになる。この変調モードの周波数は図-1 の無次元増加割合が最大となる点に対応する無次元波数差から求められる周波数と良く一致する (Crawford ら)。例えば、図の (a) の深海の場合、波形勾配 $k_0 a_0$ が 0.1 である波を造波すると、 $\kappa/2k_0 a_0$ が約 0.87 となる変調モードが発達してくる。しかし、この変調モードは永久に増加し続けるのではなく、後に減少し、FPU 再帰現象が見られるものである。図-1 から、水深波長比 $k_0 h$ が減少するにつれ、同じ波形勾配の波に対して、変調不安定となる波数差の領域が狭くなるとともに、時間的増加割合も減少していくことがわかる。水深波長比が 1.36 より小さくなると変調不安定はもはや起こらなくなる。

実測値と比較するための波の振幅変調周期は次のよう

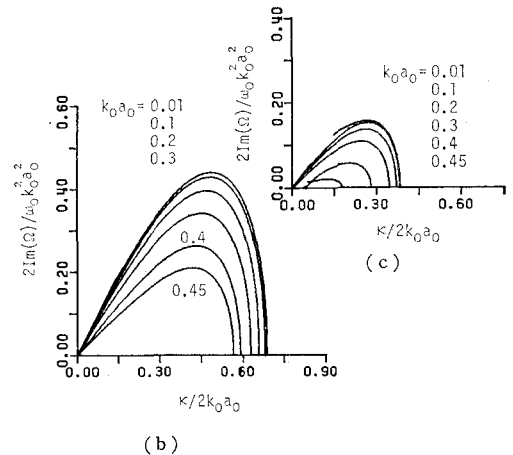
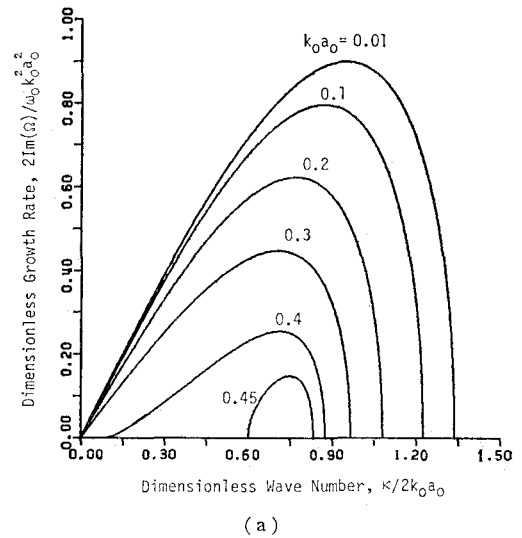


図-1 波の不安定ダイアグラム ((a) $k_0 h = 10.0$, (b) $k_0 h = 2.0$, (c) $k_0 h = 1.5$ の場合)

にして求める。波が最も不安定となる場合の κ が求められ、その関数である変調モードの周波数は

$$\omega'_1 = \omega_1 + 0.5\bar{\omega} - \text{Re}\Omega \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\omega'_2 = \omega_2 + 0.5\bar{\omega} + \text{Re}\Omega \quad \dots\dots\dots(10)$$

となる。ここで、 Re は複素数の実数部を意味する。一方、主要波の周波数は次のようである。

$$\omega = \omega_0 + T_{0,0,0,0} b_0^2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

これらを用いて無次元周波数差は

$$\Delta = (\omega - \omega'_1)/\omega = (\omega'_2 - \omega)/\omega = \{0.5(\omega_2 - \omega_1) + \text{Re}\Omega\}/\omega \quad \dots\dots\dots(12)$$

で与えられる。波の振幅変調周期は次のようになる。

$$T_g = 2\pi/\Delta\omega \quad \dots\dots\dots(13)$$

以上の式の展開においては、搬送波の波数 k_0 と振幅 a_0 を用いていることに注意しなければならない。実際に実験および現地観測で測定できるものは波高 H と周

期 T である。従ってこの H と T を用いて搬送波を推定しなければならない。近似的には、 T と水深から微小振幅波理論により波数 k_0 が得られ、 H の $1/2$ 倍として a_0 が得られる。これらの波数と振幅を用いて式 (3) および式 (11) から ω が計算でき、これより T' が $2\pi/\omega$ と求められる。この T' と測定された T は等しくない。 $T'=T$ となるような k_0 と a_0 を用いなければならない。これはストークス波理論の第3次近似解を満たす k_0 と a_0 を用いばよい。

しかし、ここで解析する現地波浪はもともと一定振幅、一定周期の波ではないので、搬送波としてどのような代表量を用いばよいかは明らかではない。そこで、とりあえず有義波および平均波を搬送波として用い、式 (13) から振幅変調周期を算定し、実測値と比較した。

以上述べた3成分の波の干渉から振幅変調周期を算定するかわりに、多成分の振幅スペクトル(初期値は実測のスペクトルから与える)に対し式 (1) の連立方程式を解いて、変調周期を算定する方法も考えられるが、これは次の課題とした。この方法では搬送波として何を使うかという問題はなくなる。

3. 解析に用いた波浪観測資料

本章で解析に用いた波浪観測資料は、京大観測グループが観測して得た、琵琶湖彦根愛西地区における記録であり、11 台の波高計群のうちの設置水深が 4.0 m の波高計 N-9 の、1975 年 10 月 5 日 11:27 から 5 時間、10 月 5 日 10:00 から 5 時間、10 月 5 日 23:00 から 5 時間および 12 月 16 日 18:30 から 5 時間の 4 つの連続記録である。解析に当っては、それぞれ 5 時間の連続記録を 20 分ごとに分割し、その間の波浪は定常であるとして取り扱った。

4. 波の変調不安定理論に基づく現地波浪の Wave Group 特性の考察

2. で示した解析法は本来は一定の振幅と波数を持つ波に対するものであり、初期には一定振幅の波であっても、振幅変調が現われるというものである。現地波浪の高波の繰返しに、このような変調不安定現象が内在しているのではないかの立場から、実測結果と計算結果の比較・検討を行う。

まず、どのような諸元の波浪であるかを示すために、図-2 に有義波および平均波から算定される波形勾配 $ka (= \pi H/L)$ と水深波長比 $kh (= 2\pi h/L)$ の時間変化を示す。添字 '1/3' は有義波、'm' は平均波によるものであることを意味する。波形勾配は $(ka)_{1/3}$ で 0.13 から 0.19、 $(ka)_m$ で 0.12 から 0.16 の狭い範囲に分布している。水深波長比 $(kh)_{1/3}$ は 1975 年 10 月 5 日

14:00 から 19:30 にかけて 1.5 より小さくなっている。

現地波浪の振幅変調周期の代表値は次の二通りの方法で求めた。(1) SIWEH⁷⁾ のスペクトルを計算し、そのスペクトル密度が最大となる周期を代表値とする。(2) SIWEH にもう一度数値フィルターをかけて滑らかな波形とし、その波形よりゼロアップクロス法で個々の周期を求め、その平均を代表値とする。

(1) と (2) で得られる振幅変調周期をそれぞれ $(T_g)_{MP}$ 、 $(T_g)_{MF}$ で表わす。(2) で用いるフィルターは SIWEH のスペクトルのピーク周波数の 0.5 倍以下および 1.5 倍以上の成分波の振幅をすべて 0 とするもので、これは FFT 法を用いれば簡単に行える。スペクトルのピーク周波数は分解周波数や自由度の取り方によって少しずつ異なるが、多少ピーク周波数の算定がずれていても (2) の方法で算定される平均周期はほとんど変化しない。この二通りの方法で求めた波の振幅変調周期を比較した結果、両者はほとんど一致することがわかった。

図-3 は現地観測結果から求めた $(T_g)_{MP}$ (図中では × 印で示す)、 $(T_g)_{MF}$ (+ 印) と、Zakharov 方程式を用いて算定される振幅変調周期の計算値 $(T_g)_{OS}$ (搬送波として有義波を用いた場合、□ 印)、 $(T_g)_{OM}$ (搬送波として平均波を用いた場合、◇ 印) を示したものである。なお、理論値が 40 sec より大きいものはすべて 40.5 sec のところにプロットしてある。有義波を用いて算定される $(T_g)_{OS}$ は実測値よりも大きくなってしまふ。ただ $(kh)_{1/3} > 2.0$ の時のみ、すなわち、1975 年 10 月 5 日 11:30 から 12:10 および 1975 年 12 月 16 日 19:10 から 20:10 で実測値とはほぼ合っている。平均波を用いて算定される $(T_g)_{OM}$ は実測値とかなり合っている。この図より、搬送波としては平均波を用いた方が良いことがわかる。しかし、1975 年 10 月 5 日 14:30 から 19:30 ごろは実測値よりも大きくなっている。この時間帯は図-2 において $(kh)_{1/3}$ が 1.5 以下になる時間帯と対応している。

解析に用いた Zakharov 方程式は浅海域でも適用できるものであるが、一定水深が無限に続いている状況を想定したものである。規則波の場合には $kh > 3.14$ ならば深海の条件となり、波の特性はそれより沖では水深の影響を受けない。水深波長比がある程度大きい場合(今回の観測結果によれば $(kh)_m > 2.1$) には、その地点の水深だけを考慮してそれより沖の水深変化を考えなくても Zakharov 方程式で波の振幅変調周期が十分算定できるのではないと思われる。水深波長比が小さい場合には、図-1 に見られたように、理論では変調モードの時間的発達割合が小さくなり、また搬送波の周波数と変調モードの周波数の差が小さくなって、変調周期が大きくなる。このような理由から、水深波長比が小さい $(kh)_m < 2.1$ の場合には、その地点で本来形成されるべき振幅

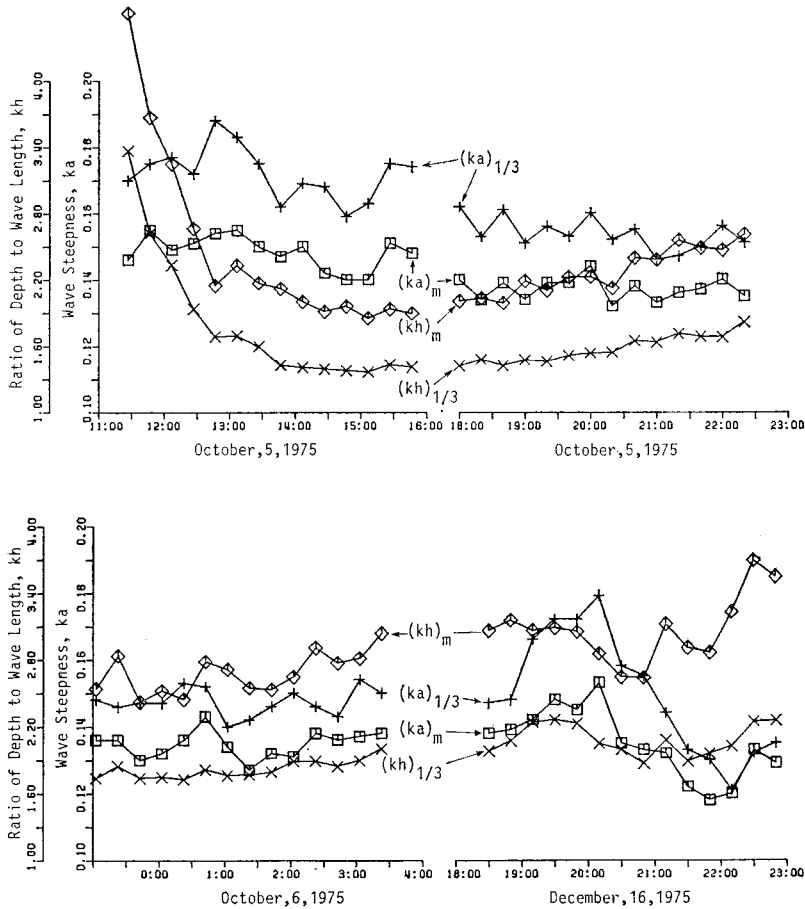


図-2 波形勾配 ka および水深波長比 kh の時間変化 (添字 ' $1/3$ ' は有義波, ' m ' は平均波を用いたことを示す)

変調が十分起こっておらず、それより沖の地点で卓越していた変調周期が残っているために、実測値は計算値より小さくなるのではないかと考えられる。

図-4 は観測値 $(T_0)_{MF}$ と搬送波として平均波を用いて Zakharov 方程式より算定される理論値 $(T_0)_{CM}$ の両者を比較したもので、図-3 を整理し直したものである。この図より、 $(T_0)_{CM}$ の方が $(T_0)_{MF}$ より若干大きくなっている（大きくなるのは水深波長比が小さい場合である、図-3 参照）が、両者の一致は良いことがわかる。

以上の結果から、搬送波として平均波を用いれば、Zakharov 方程式から算定される波の振幅変調周期の計算値は実測値と良く一致し、現地波浪の高波の繰り返しには波の変調不安定現象が内在していることが推論される。

水理実験では、現地波浪の再現は、波のスペクトルを再現させることを第1の目標とする。しかし、より現実に近い不規則波をシミュレートするためには、波の連なりを考慮しなければならない。Funke-Mansard²⁾、岩垣・

間瀬・北³⁾は波のスペクトル形のみならず SIWEH 波形を再現する不規則波のシミュレーションを行っているが、用いる SIWEH 波形は少なくとも、その繰り返し周期の平均値（期待値あるいは SIWEH のピーク周期）は波高・周期から理論的に決まる振幅変調周期と一致するようにしなければならない。

5. あとがき

本研究は、波の変調不安定という力学的な観点から現地波浪の Wave Group 特性を考察した。具体的には、波の振幅変調周期について観測値と Zakharov 方程式から得られる振幅変調周期の計算値を比較した。その結果、搬送波の諸元を平均波を用いて与えると、Zakharov 方程式から算定される波の振幅変調周期は観測値とかなり一致し、特に水深波長比が大きい $(kh)_m > 2.1$ の場合には、その対応が非常に良いことがわかった。このことより、現地波浪の高波の繰り返しには波の変調不安定現象が内在していることが推論された。

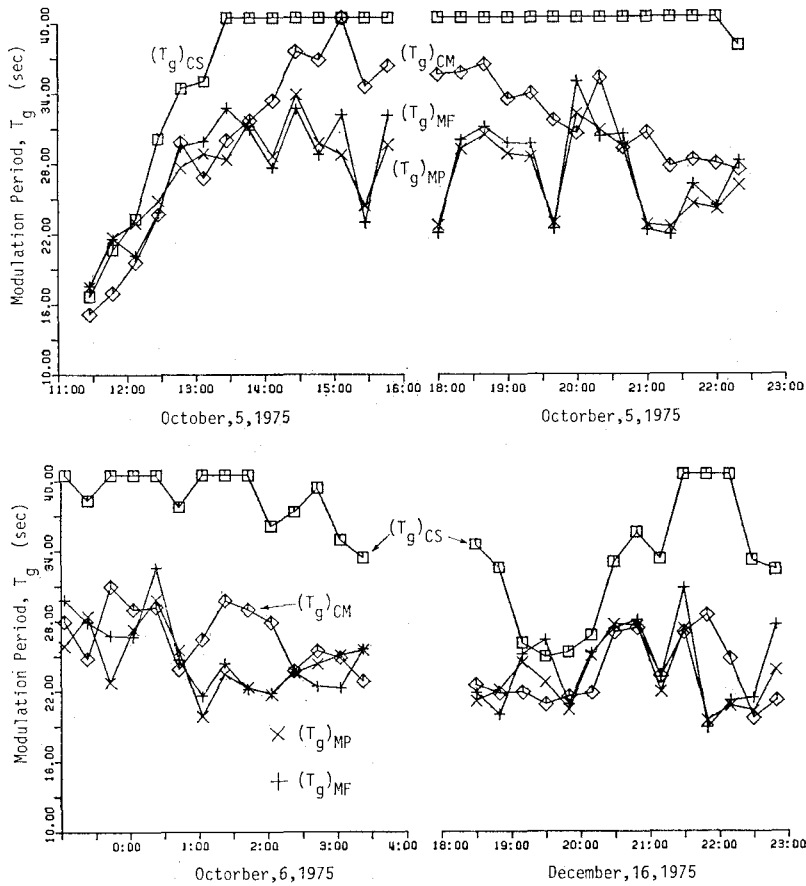


図-3 振幅変調周期の現地観測結果と計算結果 $((T_g)_{MP}$ と $(T_g)_{MF}$ は2通りの方法で求めた観測結果, $(T_g)_{CS}$ と $(T_g)_{CM}$ は搬送波として有義波と平均波を用いて式(13)から求めた計算結果)

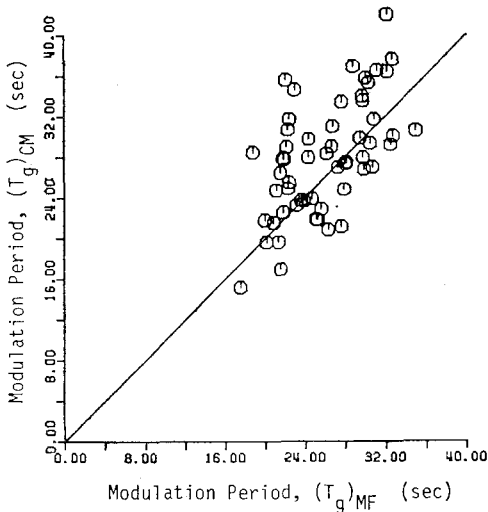


図-4 振幅変調周期に関する観測結果と計算結果の比較 (搬送波として平均波を用いた)

参考文献

- 1) 間瀬 肇・古室健史・岩垣雄一: 伝播に伴う Wave Group 特性の変化, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 151~162, 1984.
- 2) Hatori, M.: Nonlinear properties of laboratory wind waves at energy containing frequencies, Jour. Oceanographical Soc. Japan, pp. 12~18, 1984.
- 3) Lake, B. M. and H. C. Yuen: A new model for nonlinear wind waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 88, pp. 33~62, 1978.
- 4) Benjamin, T. B. and J. E. Feir: The disintegration of wave trains on deep water, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 417~430, 1967.
- 5) Crawford, D. R., B. M. Lake, P. G. Saffman and H. C. Yuen: Stability of weakly nonlinear deep water waves in two and three dimensions, Jour. Fluid Mech., Vol. 105, pp. 177~191, 1981.
- 6) Stiassnie, M. and L. Shemer: On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 143, pp. 47~67, 1984.
- 7) Funke, E. R. and E. P. D. Mansard: On the synthesis of realistic sea states in a laboratory flume, National Res. Council of Canada, Hydraulics Lab. Rept. LTR-HY-66, 54 p., 1979.
- 8) 岩垣雄一・間瀬 肇・北 直紀: Wave Group を考慮した不規則波のシミュレーションとその特性, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 55~59, 1982.