

非線形波の変調と波群

土屋 義人*・安田 孝志**・山下 隆男***・芝野 真次****

1. 緒 言

屈折・回折領域における平面波の解析は、海岸工学上極めて重要でかつ興味ある問題のひとつである。今日、この解析の根底をなしている線形楕円型方程式 (Mild-slope equation) またその放物型近似方程式は、causticsを生じるような海底地形に対しても、かなりの精度で適用できることが示されている¹⁾。

一方、波浪の非線形変調に関する研究は、Lighthill²⁾, Whitham³⁾, Benjamin-Feir^{4),5)} らによって始められ、Chu & Mei^{6),7)} によって、非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) で記述されることがわかった。その後、Zakharov⁸⁾ により2次元 NLS の誘導がなされ、包絡波と搬送波とのなす角度で解の特性が変わること (暗いソリトンの存在) が示された⁹⁾。

さらに、有限水深場への拡張により、位相、振幅の両非線形効果が議論されるようになり、平面波の線形放物近似式との対応関係が明らかにされた¹⁰⁾。現在では、水深変化の急な場合、分散に比べて弱非線形の仮定が適用されない場合への拡張・接続、すなわち turning point (暗いソリトン) の通過に関心が向けられている。

本研究では、位相、振幅の非線形変調による包絡波 (波群) の変形を対象として、multiple-scale perturbation method により導かれた一様傾斜海浜上における NLS に基づき、屈折効果を考慮した場合の平面波の変調不安定性を検討する。

2. 波浪の屈折特性

緩やかな一様傾斜海浜における線形の単一進行波を対象として、座標系を水平方向に (x, y) 、鉛直方向に z を取り、波の進行方向 ξ およびその直角方向 ζ によって表される (ξ, ζ) 座標系に変換する。波高 a_0 および波数ベクトル $\vec{k}=(k_x, k_y)$ 、 $k=|\vec{k}|$ および周波数 ω を用いて、複素水位変動 η および位相関数 ϕ は、次式のように表

示される。

$$\eta=(a_0/2) \exp (i \phi) \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\phi=\int k d \xi-\omega t \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここに、 (ξ, ζ) は (x, y) を用いて、次式で与えられる。

$$\xi=\int k_x / k d x+\int k_y / k d y \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$\zeta=-\int k_y / k d x+\int k_x / k d y \cdots \cdots \cdots (4)$$

一方、屈折を表わす eikonal equation,

$$\Delta \phi=k^2 \cdots \cdots \cdots (5)$$

は、式 (3) および (4) を用いて、曲座標系において、

$$\partial k_x / \partial \zeta=\partial k / \partial x, \quad \partial k_y / \partial \xi=\partial k / \partial y \cdots \cdots \cdots (6)$$

となり、線形の分散関係、

$$\omega^2=g k \tanh k h \cdots \cdots \cdots (7)$$

を式 (6) に適用すると、結局、屈折に対する方程式として、次式を得る。

$$\partial k_x / \partial \xi=-2 k^2 \partial h / \partial x /(\sinh 2 k h+2 k h) \cdots \cdots (8)$$

$$\partial k_y / \partial \xi=-2 k^2 \partial h / \partial y /(\sinh 2 k h+2 k h) \cdots \cdots (9)$$

なお、これは Berkhoff¹¹⁾ によって導かれた方程式と同一である、さらに変形すると、波浪の幾何光学的関係より導かれた波向線方程式とも同一であることがわかる。屈折方程式 (8) および (9) は、通常その微分項の係数が小さく、いわゆる弱スティフな方程式となっている。そのため、高精度の解は一般の差分法である Euler 法や

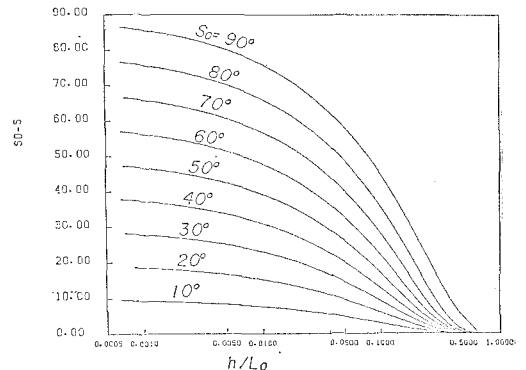


図-1 一様海浜における屈折特性

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所
 ** 正会員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科
 *** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所
 **** 正会員 工修 日立造船(株)

Runge-Kutta Gill 法では求めることができず、差分間隔を十分小さくしても、いわゆる打ち切り誤差のため、繰り返しとともに真の解からのへだたりが大きくなる¹²⁾。そこで、ここでは Adams 法によって数値計算を行なった。その例として一様海浜における屈折を 図-1 に示す。この結果は、従来の屈折計算および Auther らの理論解と一致しており、等深線に平行(入射角 90°)に波が入射した場合についても計算できる。

3. 非線形 Schrödinger 方程式の誘導

式(3), (4)で示される座標変換を用いれば、速度ポテンシャルをとって、波動に対する基礎方程式は、次のようになる。

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\zeta\zeta} + \phi_{zz} = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\eta_t = \phi_z - \phi_{\xi} \cdot \eta_{\xi} - \phi_{\zeta} \cdot \eta_{\zeta} \Big|_{z=\eta} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\phi_t + 1/2[(\phi_{\xi}^2 + (\phi_{\zeta}^2 + (\phi_z)^2)] + g\eta = 0 \Big|_{z=\eta} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\phi_z + h_{\xi}\phi_{\xi} + h_{\zeta}\phi_{\zeta} = 0 \Big|_{z=-h} \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで、式(11)および(12)を用いて η を消去し、 $z=0$ まわりで Taylor 展開すると、次式がえられる。

$$\begin{aligned} \phi_{tt} + g\phi_z + \eta(\phi_{tt} + g\phi_z)_z + \eta/2!(\phi_{tt} + g\phi_z)_{zz} + \dots \\ + 2(\phi_{\xi}\phi_{\xi t} + \phi_{\zeta}\phi_{\zeta t} + \phi_z\phi_{zt}) + 2\eta(\phi_{\xi}\phi_{\xi t} + \phi_{\zeta}\phi_{\zeta t} \\ + \phi_z\phi_{zt})_z + \dots + \phi_{\xi}(\phi_{\xi}\phi_{\xi\xi} + \phi_{\zeta}\phi_{\zeta\xi} + \phi_z\phi_{z\xi}) + \dots \\ + \phi_{\zeta}(\phi_{\xi}\phi_{\xi\zeta} + \phi_{\zeta}\phi_{\zeta\zeta} + \phi_z\phi_{z\zeta}) + \dots + \phi_z(\phi_{\xi}\phi_{\xi z} \\ + \phi_{\zeta}\phi_{\zeta z} + \phi_z\phi_{zz}) + \dots = 0 \Big|_{z=0} \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

以後、ここでは式(10), (13)および(14)を基礎方程式系として使い、水位変動 η を求める場合の補助として式(12)を用いる。微小パラメータ ε を用いて、multiple-scale perturbation method を適用するため、次のようにスケールの異なる時空間の独立変数を定義する。

$$\xi_i = \varepsilon^i \xi, \quad \zeta_i = \varepsilon^i \zeta, \quad z = z, \quad t_i = \varepsilon^i t \quad \dots\dots\dots(15)$$

これらを用いて、次のように摂動展開する。

$$\phi = \sum \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum \varepsilon^n \eta_n \quad \dots\dots\dots(16)$$

ただし、水深 h および波数 K は $O(\varepsilon)$ とし、緩やかに変化するものと仮定すれば、次のように表される。

$$h = h(\xi_2, \zeta_2), \quad K = K(\xi_2, \zeta_2) \quad \dots\dots\dots(17)$$

さらに、搬送波が $e^{im\phi}$ で分離して表せるとして、速度ポテンシャル ϕ を次式で表す。

$$\phi_n = \sum e^{im\phi} \phi_{nm} \quad \dots\dots\dots(18)$$

式(15)~(18)を用いて、式(10), (13)および(14)を以下のように定式化する。

$$\left. \begin{aligned} (\phi_{nm})_{zz} - m^2 K^2 \phi_{nm} &= F_{nm} \\ g(\phi_{nm})_z - m^2 \omega^2 \cdot \phi_{nm} &= G_{nm} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$(\phi_{nm})_z = 0 \quad (n=1, 2) \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$(\phi_{nm})_z = ih_{\xi_2} m K \phi_{1m} \quad (n=3) \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{n-m} &= \phi_{nm}^* \\ \phi_{nm} &= \phi_{nm}(\xi_1, \xi_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots, z, t_1, t_2, \dots) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F_{nm} &= F_{nm}(\xi_1, \xi_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots, z, t_1, t_2, \dots) \\ G_{nm} &= G_{nm}(\xi_1, \xi_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots, z, t_1, t_2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

以上より、平面波の基礎式は座標変換を行なうことにより、基本的には一次元に帰着されることがわかる。このような摂動展開では永年項の処理が問題となるが、Fredholmの解の一意性に関する定理を用いれば、Laplace方程式を基礎とした非同次方程式の解の一意性が保証されるためには、非同次方程式の解が一意的に求まるか、またはしくは次式を満たす場合に限られる。

$$\int_{-h}^0 \phi_{nm} \cosh mk(h+z) dz = 0 \quad (n=1) \dots\dots\dots(23)$$

式(19)~(23)を用いて逐次求めた結果を以下に示す。

まず、各オーダーでの速度ポテンシャル ϕ および水位変動 η を表-1示す。

つぎに、式(23)より $O(\varepsilon)$ での解の一意性の条件より、次の式が得られる。

$$A_{t_1} + c_g A_{\xi_1} = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

また、 $O(\varepsilon)$ では、まず $m=0, 1$ により、それぞれ次式が得られる。

$$\begin{aligned} (\phi_{10})_{t_1 t_2} - g h \{ (\phi_{10})_{\xi_1 \xi_1} + (\phi_{10})_{\zeta_1 \zeta_1} \} \\ = \frac{w^2 \cosh^2 kh}{2k \sinh^2 kh} (AA^*)_{\xi_1} \quad \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_g A_{\xi_2} + A_{t_2} + \left(-\frac{i w h \cosh kh}{2k \sinh kh} + \frac{i c_g \sinh kh}{\cosh kh} \right. \\ \left. + \frac{i c_g^2}{2w} \right) A_{\xi_1 \xi_1} - \frac{i c_g}{2k} A_{\zeta_1 \zeta_1} + \left\{ \frac{-i k^2}{2w \cosh kh} (\phi_{10})_{t_1} \right. \\ \left. + i k (\phi_{10})_{\xi_1} \right\} A + \frac{i w k^2 A^2 A}{16 \sinh^4 kh} (\cosh 4kh + 8 \\ - 2 \tanh^2 kh) + \left[\frac{i w}{\sinh 2kh} h_{\xi_2} + \left\{ \frac{i c_g}{2k} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(c_g - \frac{\omega}{2k} \right) \frac{h \cosh kh}{\sinh kh} \right\} k_{\xi_2} \right] A = 0 \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

ここで、波のエネルギーの伝播方向について検討するため、波の進行方向とエネルギーの伝播方向 θ がずれているとすると、波の進行方向は次式のように表される。

表-1 速度ポテンシャルおよび水位変動の表示

$\phi_{10} = \phi_{10}(\xi_1, \xi_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots, t_1, t_2)$	$\eta_{10} = 0$
$\phi_{11} = -\frac{g \cosh(h+z)}{2\omega \cosh kh} i A e^{i\phi}$	$\eta_{11} = \frac{1}{2} A e^{i\phi}$
$\phi_{20} = \phi_{20}(\xi_1, \xi_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots, t_1, t_2)$	$\eta_{20} = -\left(\frac{k \sinh kh}{\omega^2 \cosh kh} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} + \frac{k A ^2}{2 \sinh 2kh} \right)$
$\phi_{21} = -\frac{\omega(h+z) \sinh k(h+z)}{2k \sinh kh} \frac{\partial A}{\partial t_1}$	$\eta_{21} = -\frac{i h \sinh kh}{2 \cosh kh} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial A}{\partial t_1}$
$\phi_{22} = -\frac{3i\omega \cosh 2k(h+z)}{16 \sinh^4 kh} A^2$	$\eta_{22} = \frac{(2 \cosh^2 kh + 1) \cosh kh}{8 \sinh^3 kh} k A^2$

$$\tau = 1/\varepsilon \int (\cos \theta / c_g) d\xi_2 + 1/\varepsilon \int (\sin \theta / c_g) d\xi_2 - t_1 \quad \dots\dots\dots (27)$$

式 (27) を式 (24) に代入すると $\theta=0$ となり, エネルギーの伝播方向と波の進行方向とが一致していることが確かめられ, 同様に, 式 (27) を式 (25) および (26) に代入すると, 結局傾斜海岸における波群の支配方程式は, 次の式で表される.

$$iA_{\xi_2} + \alpha A_{\tau\tau} + \beta |A|^2 A + \gamma A = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2c_g^3} w_{kk} = \frac{1}{2wc_g} + \frac{wh \cosh^2 kh}{c_g^3 k \sinh 2kh} - \frac{h \sinh kh}{c_g^3 \cosh kh} \\ \beta &= -\frac{wk^2 (\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh)}{16c_g \sinh^4 kh} \\ &\quad + \frac{w(2w \cosh^2 kh + kc_g)^2}{2c_g \sinh^2 2kh (gh - c_g^2)} \\ \gamma &= i \left\{ \frac{k(\sinh 2kh + 2kh) \sinh kh - 4k^3 h^2 \cosh kh}{(\sinh 2kh + 2kh)^2 \sinh kh} \right\} h \xi_2 \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

この式は傾斜海岸における平面波に対する非線形 Schrödinger 方程式であり, 波向きが変化しない場合には著者ら¹³⁾が先に導いたものと一致する.

4. 非線形 Schrödinger 方程式の特性

一様海岸における屈折角と波数を式 (8) および (9) によって求め, NLS 方程式の各係数の水深変化を図-2 に示す. α は式 (28) から分散性を示すが, これより $kh=2$ 付近までは増大し, その後急激に減少する. 同様に, β は線形性を示すが, 一様にその絶対値が小さくなり (いわゆる明るいソリトンの領域), $kh=1.36$ 付近でその符号を変え, いわゆる暗いソリトンの領域に入る. このことは Hasimoto ら¹⁴⁾も指摘しており, 数値的にも一致している. つぎに, $A=B \exp(i\gamma d\xi)$ とおくと式 (28) は B に関する方程式となり, 第4項は消失する.

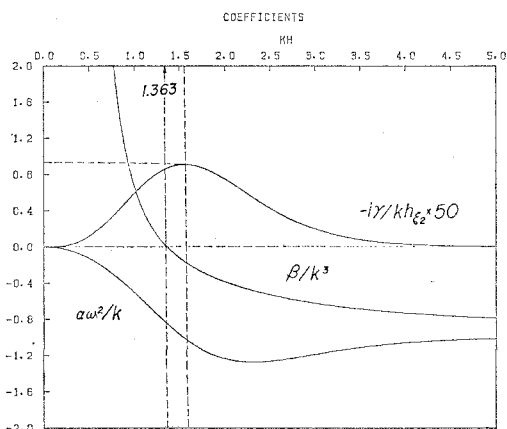


図-2 各係数の特性

これより γ は包絡波の shoaling 効果を示し, その水深変化は図より, $kh=1.5$ 付近までは急増し, それ以後では逆に急減する. すなわち, 包絡波は $kh=1.5$ 付近までは shoaling 効果を強く受けるが, それ以後では暗いソリトンとなってこの効果は小さくなる.

これらの特性をもとにして, 包絡波形の水深変化を考察する. 包絡波の理論解は α, β が同符号のとき, 次式で表される.

$$A = \text{sech} \{ (\beta/2\alpha)^{1/2} a_0 \tau \} \exp(i\beta a_0^2 \xi_2 / 2) \quad \dots\dots (30)$$

ただし, a_0 は水位変動より一意的に決定される定数である. これを $\xi=0$ における初期波形とし, 数値計算を行った結果の一例を図-3 に示す. これから包絡波形はほぼ一定で, 水深変化にほとんど影響されない. これは前述した係数 α, β の減少による効果と γ による効果, すなわち分散性と非線形性の減少が shoaling 効果と釣り合っているためと理解される. そこで, 包絡波形の位相 $(\beta/2\alpha)^{1/2}$ を2倍にして同様の解析を行ったものを図-4 に示す. これは理論解の1/2の巾をもつ包絡波を初期波形としたものであり, 包絡波形は水深変化とともに平坦になっていく. これは包絡波の位相を倍にし分散性の効果をより強めたため, 包絡波形の平滑化を引き起したことによると思われる. しかし, 波形勾配が小さな包絡波では, この変化はほとんど見られなかった. 逆に, 包絡波の位相を1/2にした場合の結果を図-5および6に示

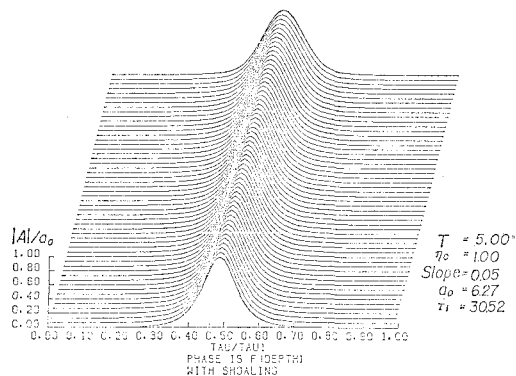


図-3 包絡波形の変形 (1)

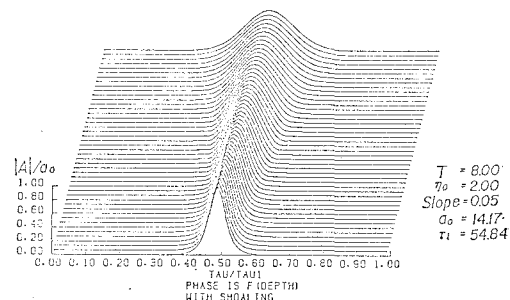


図-4 包絡波形の変形 (2)

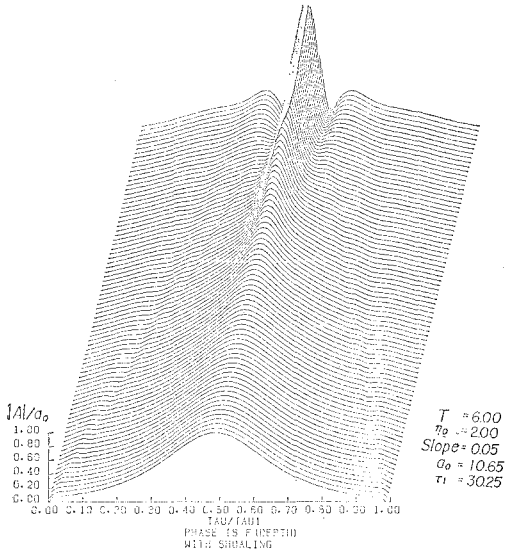


図-5 包絡波の変形 (3)



図-6 包絡波の変形 (4)

す。これらの場合は、いずれも包絡波形の巾が理論解よりも広く相対的に非線形性を強めた場合に相当し、水深変化にともない非線形性の影響で包絡波は急になり、ついには3個の包絡ソリトンに分裂することがわかる。図-6はさらに波形勾配を大きくした場合であり、強い非線形効果によって、包絡ソリトンの分裂と再帰現象がみられる。

5. 水位変動の特性

つぎに、搬送波の水位変動を示したものが図-7~9である。図-7は図-3に対応しており、包絡波が安定

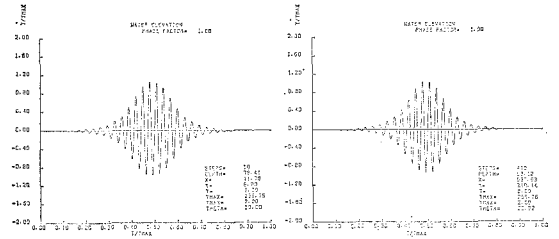


図-7 搬送波の変形 (1)

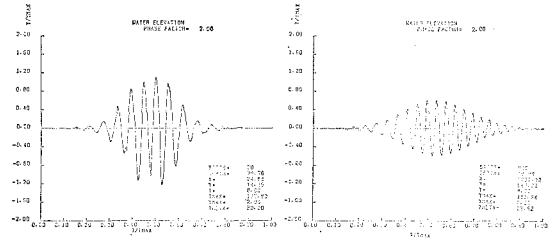


図-8 搬送波の変形 (2)

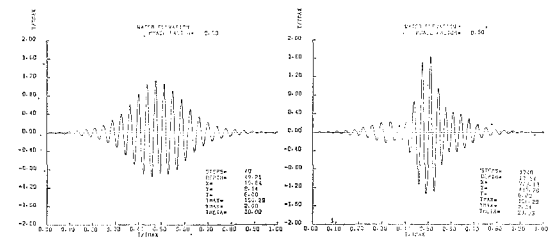


図-9 搬送波の変形 (3)

な場合は、水位変動もやはり安定で、水深による変化をほとんど受けないことがわかる。これに対して図-4に対応した図-8では、初期波形からすでに倍周波数成分の影響が現われ、水位変動はしだいに平坦になり、ついに包絡波の幅を広げていき前方に微小な擾乱を含んだ波形に変化していく状態がわかる。しかし、前述したように波形勾配が小さい場合には、水位変動に顕著な変化は現われなかった。また、図-5に対応した図-9では、水深変化とともにその中心部の振幅が増大し、包絡波が縮小しようとするのがわかる。さらに、搬送波は2組の波群に分裂し、振幅の大きい搬送波の列の入れ替わりがみられる。

6. $kh < 1.36$ に対する数値計算と考察

前述したように $kh < 1.36$ では方程式の係数 α, β が異符号となって式 (29) のような明るいソリトン解は存在せず、理論解は暗いソリトンとなる。この領域での包絡波の変形を数値計算によって考察する。図-10はその一例であるが、これから前述した安定な理論解も、この領域ではしだいに不安定になり、平坦になってその特

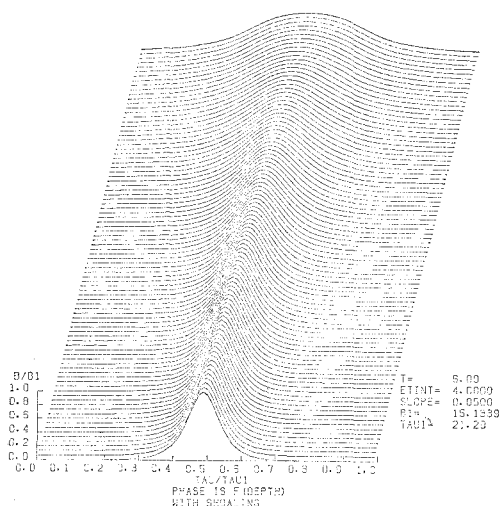


図-10 包絡波の変形 (5)

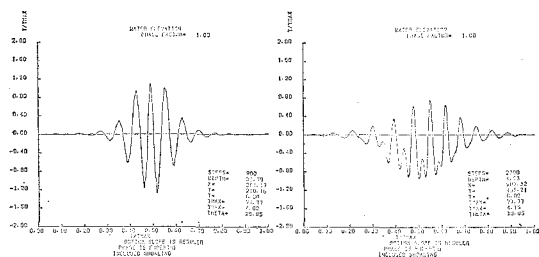


図-11 搬送波の変形 (4)

性を変化させることがわかる。しかし、図-10に対応した水位変動は、高次項の影響により図-11に示すようになりかなり安定である。このことより、一次のオーダーでは変調不安定な領域においても、二次のオーダーによって安定な包絡波が形成される可能性がうかがえる。一般的に、現地で観測される波群は浅海では $kh < 1.36$ となる領域にあり、このような高次項の影響が無視できないのではないかと考えられる。

7. 結 語

以上、本研究によって得られた結果は、次のように要約される。まず、明るいソリトンが存在する領域では、包絡波の理論解は分散性および非線形性の減少が shoaling 効果と釣り合うため、水深変化に対して安定である

が理論解よりも巾の狭いソリトンは水深変化によって平滑化し、巾の広いソリトンは分裂し、再帰現象を起こすものもある。これに対して、暗いソリトンが存在する領域になると、包絡波はしだいに平坦化するようになる。しかし、この領域でも、水位変動は高次項の影響で見掛け上安定な包絡波を形成している。これらのことを考え合わせると、浅海における不規則波の波群変形には、このような高次項の影響が無視できないと思われる。

参 考 文 献

- 1) Berkhoff, J. C. W.: Refraction and diffraction of water waves, Wave deformation by a shoal, Delft Hyd. Lab., Rep., W154, Part VIII, p. 19, 1982.
- 2) Lighthill, M. J.: Some special cases treated by Whitham theory, Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 299, pp. 28~53, 1967.
- 3) Whitham, G. B.: Non-linear dispersion of water waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 399~412, 1967.
- 4) Benjamin, T. B. and J. E. Feir: The disintegration of wave trains on deep water, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 417~430, 1967.
- 5) Benjamin, T. B.: Instability of periodic wave trains in nonlinear dispersive systems, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 59~75, 1967.
- 6) Chu, V. H. and C. C. Mei: On slowly-varying Stokes waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 41, pp. 873~887, 1980.
- 7) Chu, V. H. and C. C. Mei: The non-linear evolution of Stokes waves in deep water, Jour. Fluid Mech., Vol. 47, pp. 337~357, 1971.
- 8) Zakharov, V. E.: Jour. Appl. Mech. Tech. Phys., Vol. 2, pp. 191, 1968.
- 9) Saffman, P. G. and H. C. Yuen: Stability of a plane soliton to infinitesimal two-dimensional perturbation, Phys. Fluid, Vol. 21, No. 8, pp. 1450~1451, 1978.
- 10) Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple: A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly varying topography, Jour. Fluid Mech., Vol. 136, pp. 453~466, 1983.
- 11) Berkhoff, J. C. W.: Mathematical models for simple harmonic linear water waves —wave diffraction and refraction—, doctoral dissertation at the Delft University of Technology, 1976.
- 12) Verner, J. H.: Explicit Runge-Kutta methods with estimate of local truncation error, SIAM, Jour. Numer. Anal., Vol. 15, pp. 427~434, 1978.
- 13) 土屋義人・安田孝志・山下隆男・平本高志: 傾斜海岸上の非線形 Schrödinger 方程式, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 83~87, 1984.
- 14) Hasimoto, H. and H. Ono: Nonlinear modulation of gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 33, pp. 805~811, 1972.