

包絡ソリトンモードと不規則波浪の波群特性について

安田孝志*・中嶋規行**・土屋義人***

1. 緒 言

大水深海域の開発・利用の進展に伴って、波群の重要性が増し、海岸工学の側からも種々の手法^{1),2),3)}によってその特性の解明が試みられるようになって来た。しかしながら、従来のいずれの手法も波群を力学現象として捉える視点に欠けており、その力学的特性の評価に限界を抱えている。

一方、最近の非線形不規則波動に関する研究の進展に伴って、深海域から浅海域にかけての狭帯域非線形不規則波浪が非線形 Schrödinger 方程式によって統一的に扱われるようになり、現地波浪に見られる波群を包絡ソリトンとして理解する考え方が生まれて来た⁴⁾。しかしながら、一般に現地波浪は一定のスペクトル幅を持つ上、その搬送波の波形自体に明らかな非線形性の影響が認められ、非線形 Schrödinger 方程式を直接こうした現地波浪に適用することは出来ない。このため、Stiassnie ら⁵⁾によって Zakharov 方程式を用いてこうした限界を克服する試みがなされているが、現地波浪の波群現象を直接説明するには至っていない。

そこで本研究では、波群の形成は力学に基づいており、顕著な波群を伴う非線形不規則波浪においては包絡ソリトンを基準モードとする力学的秩序が存在するとの観点から、波群を伴う現地波浪の包絡ソリトンモード表示を試み、その可能性を示すと同時に、包絡ソリトンの支配パラメータを確率変数とした扱いによって従来の手法に代わる波群の統計的特性の評価が可能となることを示す。

2. 包絡ソリトンモードに基づく現地波浪の漸近表示

2.1 基本仮定

ここで基準モードとして考える包絡ソリトンは、狭帯域スペクトルの下に導かれる非線形 Schrödinger 方程式の漸近解として与えられ、最低次の搬送波の包絡波形を

表すに過ぎないため、緒言で述べたような問題点はあるが、表示が簡明である点に特色がある。

そこで、ここでは、基準モードとしての包絡ソリトンの安定性および簡潔性を極力生かす立場から、以下のような仮定の下に現地波浪の包絡ソリトンモード表示を試みる。

- i) 現地波浪の波群はすべて包絡ソリトンから成る。
- ii) 各包絡ソリトンはそれぞれ異なった代表周波数に基づく非線形 Schrödinger 方程式に支配されており、代表周波数は波群ごとに決定される。

仮定 i) および ii) に基づく立場は、現地波浪を互いに独立な非線形 Schrödinger 方程式に支配される包絡ソリトンの場の集合として捉え、そこに見られる波群をこれらの包絡ソリトンの連なりとして扱おうとするものである。この考え方に立てば、スペクトル帯域幅に関係なく、非線形不規則波の波群を包絡ソリトンとして表示することが可能となる。

iii) 波群形状に現れる非線形性の影響は、各包絡ソリトンの形状を支配する代表周波数の補正によって評価されるものとする。

2.2 包絡ソリトンモード表示

波群形状を時間軸上で捉えるため、空間発展型の包絡ソリトン解を基準モードとして導く必要がある。そこで、Mei の手法⁶⁾を基に、狭帯域スペクトルを持つ浅海波の無次元振幅 εA に関する空間発展型 Schrödinger 方程式を次式のように導く。

$$-i\partial A/\partial X + \alpha \partial^2 A/\partial \xi^2 + \beta |A|^2 A = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (1/2)[c_g/c - (gh/c^2) \operatorname{sech}^2 Kh(1 - Kh \tanh Kh)] \\ \beta &= (\cosh 4Kh + 8 - \tanh^2 Kh)/(16 \sinh^4 Kh) \\ &\quad - (2c \cosh^2 Kh + c_g)^2/[2 \sinh^2 2Kh(gh - c_g^2)] \\ c &= [(g/K) \tanh Kh]^{1/2} \\ c_g &= (c/2)[1 + 2Kh/\sinh 2Kh] \\ X &= \varepsilon^2 Kx, \quad \xi = \varepsilon 2\pi f(x/c_g - t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

K : 狭帯域スペクトルのピーク周波数 f に対応した波数, h : 平均水深, c : 波速, c_g : 群速度, ε : 非線形性の程度を表わす微小パラメータ, x : 水平座標, g : 重力

* 正 会 員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

** 学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科

*** 正 会 員 工博 京都大学教授 防災研究所

の加速度および t ; 時間である。

式 (1) より N ソリトン解の漸近表示を導けば、次式のように与えられる。

$$\frac{\varepsilon A_l}{K_l} = \sum_{n=1}^{N_l} a_n \operatorname{sech} [\sqrt{\beta/2\alpha} \cdot a_n (2\pi K_l f / c_g) \times \{x - c_g(t - \delta_n)\}] \exp(-i\beta_l a_n^2 K_l x) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、添字 l は代表周波数を f_l とする場の諸量であることを示し、 δ_n ; 包絡ソリトンの波峰位置を与える時間軸上の座標、および a_n ; 包絡ソリトンの振幅である。

式 (3) は代表周波数 f_l を中心とした狭帯域スペクトルの不規則波において形成される波群を表し、広帯域スペクトルの現地波浪の波群を直接説明することは出来ない。しかしながら、各包絡ソリトンの間隔が一定以上あれば、相互に独立として扱えるため、各包絡ソリトンごとに異なった周波数を対応させて現地波浪を表示出来、前述の仮定 i) および ii) に基づく表示が可能となる。

以上より、波群を伴う不規則波の最低次の波形 η の包絡ソリトンモード表示が σ_l を搬送波の位相定数とすることによって次式のように導かれる。

$$\eta = \sum_{l=1}^L \frac{|\varepsilon A_l|}{K_l} \cos(K_l x - 2\pi f_l t + \sigma_l) \dots\dots\dots (4)$$

2.3 内部特性の表示

係留浮体の長周期動揺の原因として波群の影響が指摘され、波群を考慮した波漂流力の計算が試みられているが、前述の式 (4) の表示法を浮体に作用する波力や波圧の算定に直接必要となる水粒子速度や圧力に拡張すれば、係留浮体の長周期動揺の扱いは容易になろう。そこで、式 (4) で示される水面変動の下での水粒子速度 u および圧力 p をそれぞれ求めれば、次式のようになる。

$$u = \sum_{l=1}^L |\varepsilon A_l| c_l \left\{ \frac{\cosh K_l(h+z)}{\sinh K_l h} \right\} \times \cos(K_l x - 2\pi f_l t + \sigma_l) \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{p}{\rho g} = \sum_{l=1}^L \frac{|\varepsilon A_l|}{K_l} \left\{ \frac{\cosh K_l(h+z)}{\cosh K_l h} \right\} \times \cos(K_l x - 2\pi f_l t + \sigma_l) - z \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 z 軸は平均水面を原点として鉛直上向きを正とする。

2.4 波群の統計的取扱い

対象とする不規則波浪の包絡波形 $R(t)$ は、前述の式 (3) および (4) を基にすれば、次式のように M 回の包絡ソリトン R_m の連なりとして表示される。

$$R(t) = \sum_{m=1}^M R_m, \quad R_m = a_m \operatorname{sech} [\gamma_m(t - \delta_m)], \quad \gamma_m = 2\pi f_m K_m a_m (\sqrt{\beta/2\alpha})_m \dots\dots\dots (7)$$

これより、各包絡ソリトンの波形は振幅 a_m および搬送波の周波数 f_m によって、また、その時間軸上の座標は位相定数 δ_m によってそれぞれ決定され、包絡波形の不

規則性はこれらのパラメータの不規則性に依っていることがわかる。したがって、これらを不規則変数とした統計的取扱いを行えば、包絡ソリトンと搬送波との一義的対応によって、波群を伴う不規則波浪の搬送波および包絡波形一貫した統計的記述と同時に、そのシミュレーションも可能となる。これは、狭帯域スペクトルを持つ線形不規則波の包絡波形が搬送波の振幅および位相定数の不規則性に支配されるとした Longuet-Higgins²⁾ や合田³⁾ の統計理論と逆の立場に立つものであるが、広帯域の非線形不規則波に対して適用可能という点に特色を有している。

そこで、著者らが海岸波浪のソリトンモード表示において用いた手法⁷⁾を基に、式 (7) によって表される包絡波形の統計的取扱いを試みる。

包絡波形 $R(t)$ の確率分布関数 $F(R_0)$ は、 $R(t)$ が設定値 R_0 よりも小なる確率で定義され、次式で表される。

$$F(R_0) = p[R \leq R_0] = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\gamma_m} \times \int_0^{R_0} \ln \{ [1 + \sqrt{1 - (R_m/a_m)^2} / (R_m/a_m)] \} \times dR_m \Big/ \sum_{m=1}^M (1/\gamma_m) \dots\dots\dots (8)$$

これを R_0 で微分すれば、確率密度関数 $f(R)$ が得られ、合田³⁾ によって展開されたと同様な波の連りの理論展開が可能となる。ところで、包絡ソリトンモードに基づく表示法においては、線形不規則波の包絡波形と異なり、不規則変数に直接支配される各包絡ソリトンが包絡波形を直接与える。このため、包絡波形が式 (7) のように互いに独立な包絡ソリトンの連なりとして表される場合には、各包絡ソリトンに着目した扱いが可能となり、 R_0 を設定値としたときの確率分布関数 $F^*(R_0)$ および連長 j_1 がそれぞれ次式のように導かれる。

$$F^*(R_0) = 1 - \left\{ \sum_{m=1}^M \frac{2}{\gamma_m} [\ln(1 + \sqrt{1 - Y_m^2}) - \ln Y_m] \right\} / T_0, \quad Y_m = R_0 / (2a_m) \dots\dots\dots (9)$$

$$j_1 = [(2f_m/\gamma_m) \{ \ln(1 + \sqrt{1 - Y_m^2}) - \ln Y_m \}] \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 T_0 ; 観測時間、および $[\]$; 整数化記号である。

3. 現地波浪の包絡ソリトンモード表示

3.1 観測波浪の波群特性

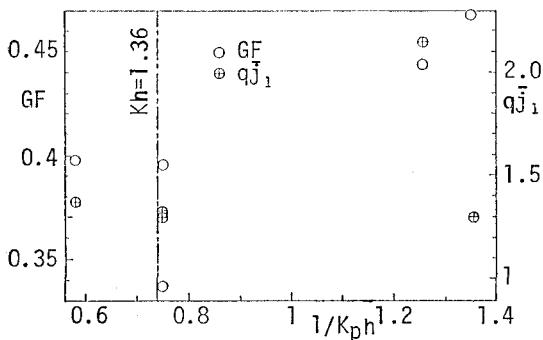
ここで用いる現地波浪の観測記録は、太平洋に面した和歌山県御坊沖合および琵琶湖東岸の彦根沖合においてそれぞれ取得されたものである。前者は水深 28 m の地点で観測された 1979 年 10 月の台風 7920 号に伴ううねりであり、15 分間の連続記録を標本集合とする。また、後者は水深 4 m の地点で観測された 1975 年 10 月の季

表—1 観測波浪の特性

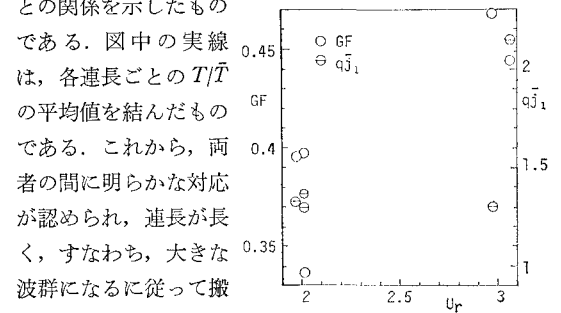
	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 5
f_p	0.068	0.064	0.269	0.269	0.317
$S(f_p)$	12.65	7.63	0.226	0.239	0.197
μ	0.723	0.772	0.991	0.989	0.990
$\bar{H}$ (m)	1.265	1.189	0.390	0.394	0.402
$\bar{T}$ (sec)	12.5	12.7	2.43	2.45	2.41
$K_p h$	0.796	0.743	1.34	1.34	1.73
U_r	3.122	2.972	2.028	1.943	2.011
Skewness	-0.020	-0.073	0.037	0.174	0.310
Kurtosis	2.835	3.462	3.064	3.000	3.454
GF	0.444	0.468	0.337	0.396	0.398
$p(H \geq \bar{H})$	0.478	0.456	0.463	0.506	0.481
$\bar{j}_1$	4.13	2.38	2.47	2.63	2.64
$\bar{j}_2$	8.29	5.41	5.29	5.27	5.38

節風によるうねりであり、10 分間の連続記録を標本集合としている。表—1 はこれらの波浪に関する諸量の一覧であり、No. 1 および 2 が御坊沖合におけるものである。表中の f_p はパワースペクトルのピーク周波数を示し、 K_p はこれを基に計算された波数を示している。 $\bar{H}$ および $\bar{T}$ はそれぞれゼロアップクロス法によって定義された個々波の平均波高および平均周期を示し、 U_r はこれらを基に計算された Ursell 数である。 $p(H \geq \bar{H})$ は個々波の波高が $\bar{H}$ を越える確率を示し、 $\bar{j}_1$ および $\bar{j}_2$ は $\bar{H}$ を設定値としたときの連長および繰り返し長さの平均値を 3 桁の実数で表示したものであり、 μ はスペクトル幅パラメータを示す。

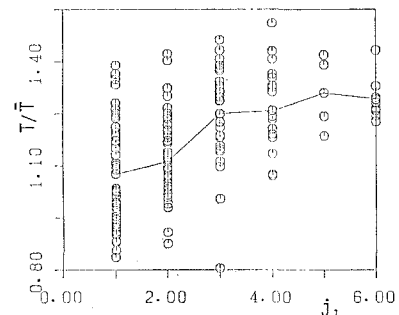
図—1 は、非線形 Schrödinger 方程式の変調不安定指標 $K_p h$ の逆数と波群指標 GF および $\bar{j}_1 q$ との関係を示したものである。ここに、 q は $1 - p(H \geq \bar{H})$ で定義される補数である。これから、データ数が少なく、かつバラツキも大きい、 GF によって波群を評価する限り、 $1/K_p h$ の増大に伴って波群も発達する傾向にあり、変調不安定の臨界値 $Kh=1.36$ 近傍において GF に特別な

図—1 変調不安定指標 Kh と波群指標との関係

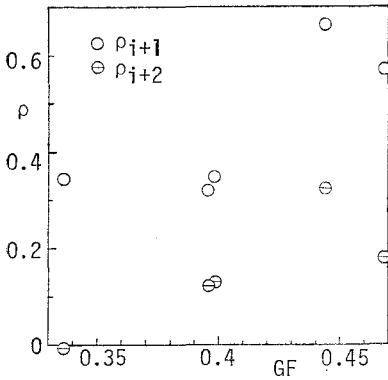
変化は見られず、このときの波群に対して $K_p h=1.36$ は何ら不安定指標としての意味を持たないことがわかる。これは、このときの波群が f_p を代表周波数とした非線形 Schrödinger 方程式の下での包絡ソリトンとは直接関係していないことを示している。したがって、一定のスペクトル幅と非線形性を併せ持つ現地波浪に対しては、1 々の非線形 Schrödinger 方程式の下での不規則波の変調としてすべての波群を捉えることは不可能であることがわかる。このように $K_p h < 1.36$ においてなお波群が発達する原因としては、非線形性の包絡波形に及ぼす影響および各波群ごとの搬送波の周波数の独立性が考えられる。この点を明らかにするため、まず、非線形性指標 U_r と波群指標 GF および $q\bar{j}_1$ との関係について考察する。図—2 は上述の観測記録を基にこの関係を示したものであり、ここで扱っている U_r 数の範囲では、 U_r 数が増すに従って GF および $q\bar{j}_1$ 共に増大し、このときの波群が $K_p h$ よりも非線形性により密接に関わっていることがわかる。このことは、波群が確率的でなく、非線形干渉の結果として力学的に形成されたものであることを示し、一定の非線形性を持つ現地波浪の波群形状の評価においては、非線形性の評価が不可欠となることを物語っている。ついで、各波群ごとに個々波の平均周期と連長との関係について考察する。図—3 は、上述の全観測記録を基に連長 j_1 と各記録単位ごとの平均周期 $\bar{T}$ に対する各連の個々波の平均周期 T の比 $T/\bar{T}$ との関係を示したものである。図中の実線は、各連長ごとの $T/\bar{T}$ の平均値を結んだものである。これから、両者の間に明らかな対応が認められ、連長が長く、すなわち、大きな波群になるに従って搬送波の周期も長くなる傾向にあり、各波群ご



図—2 Ursell 数と波群指標との関係



図—3 波群の連長と搬送波の周期との関係



図—4 波群指標 GF と隣接した個々波の相関係数との関係

とに異なった周波数の搬送波を持つという上述の仮定 ii) が現地波浪に対して妥当なものであることがわかる。

図—4 は、不規則変数である個々波の波高の相関が波群に支配されていることを示すために、上述の観測記録を基に、 j 番目と $j+1$ および $j+2$ 番目の個々波の波高の相関係数 ρ_{i+1} および ρ_{i+2} を縦軸に、 GF を横軸にしてこれらの関係を示したものである。これから、 GF が増すに従って、絶対値に差はあるものの ρ_{i+1} および ρ_{i+2} 共に増大する傾向が認められる。従来の波群に対する取扱いでは、波群の形成を確率現象として捉えて来たため、前後の個々波の相関が高くなることによって波群も強化されると説明されて来たが、前述の非線形性と波群との対応を基にすれば、波群が力学的に形成されて搬送波への束縛が生じた結果、相関係数が高くなったと説明される。

3.2 包絡波形の表示

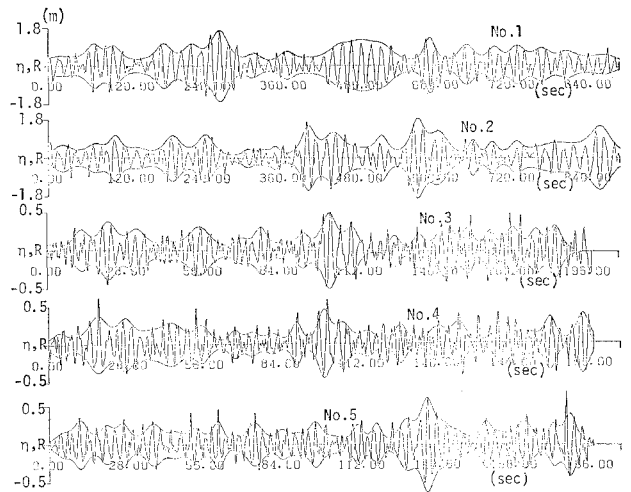
前述の式 (7) によって現地波浪の包絡波形の包絡ソリトンモード表示を行うには、各波群ごとに不規則変数 a_m , f_m および δ_m を決定する必要がある。ここでは、前述の仮定 ii) とは若干矛盾するが、Longuet-Higgins²⁾ にならって観測波形に $0.5f_p \sim 1.5f_p$ の帯域通過フィルタ処理を施し、これの包絡関数 $R_0(t)$ と式 (7) による包絡波形 $R(t)$ との誤差

$$E = \int_0^T \{R(t) - R_0(t)\}^2 dt \quad \dots\dots\dots (11)$$

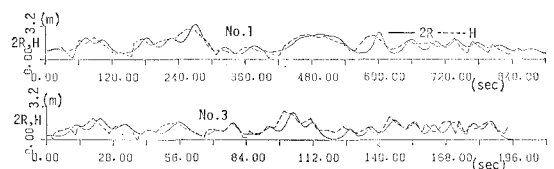
を最小にするように a_m , f_m および δ_m を決定することにした。具体的には、まず、各包絡波形の峯の数より包絡ソリトンの個数 M および各峯の位相より δ_m をそれぞれ決定した。ついで、次式の $2M$ 次元の連立方程式を解くことによって a_m および f_m を決定した。

$$\frac{\partial E}{\partial a_m} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial f_m} = 0, \quad m=1, \dots, M \quad \dots\dots\dots (12)$$

図—5 は、こうして上述の観測記録から決定された



図—5 観測波形と包絡ソリトンモード表示波形との比較



図—6 個々波の波高の連なりと包絡ソリトンモード波形との比較

a_m , f_m および δ_m を基に式 (7) によって計算した包絡ソリトンモード表示波形と観測波形との比較を示す。これから、両者の対応は、細部において若干の相違はあるものの、いずれの観測記録に対しても全体的に良好であり、現地波浪の波群を包絡ソリトンとして捉え、その包絡ソリトンモード表示を試みる手法が有効であることがわかる。

図—6 は、No. 1 および 3 の観測記録に関して個々波の波高の時間軸の分布と式 (7) より計算される波高 $2R(t)$ の分布との比較を示したものである。これから、この場合も細部において相違は認められるものの、両者はほぼ対応しており、式 (7) を基にして波高の時系列や連特性の評価が容易に行えることがわかる。

3.3 包絡ソリトンと搬送波の比較

前節において示したように、各包絡ソリトンの振幅 a_m に加えて搬送波の周波数 f_m も自由に選べば、ほぼ満足すべき精度で包絡波形の表示が可能となるが、 f_m は観測波浪のパワースペクトルと無関係であり得ず、 f_p に対して一定の比を有しているものと考えられる。また、 a_m と f_m/f_p の間に何らかの関係を見い出すことが出来れば、未知量は a_m のみとなり、包絡ソリトンモード表示における計算労力は半減されることになる。

図—7 は、各観測記録ごとのピーク周波数 f_p に対する f_m の比 f_m/f_p と $\bar{a}/K_p h a_m$ の関係を示し、図中の

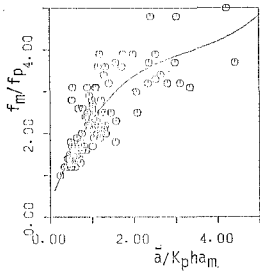


図-7 包絡波形より決定された搬送波の周波数

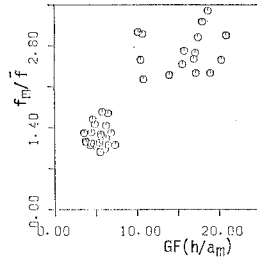


図-8 包絡波形より決定された搬送波の周波数と個々波の周波数との関係

実線は次式の回帰式によるものである。

$$\left. \begin{aligned} f_m/f_p &= 0.38 + 2.55x - 0.67x^2 + 0.07x^3 \\ x &= \bar{a}/K_p h a_m \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

ここに、 $\bar{a}$ は各観測記録ごとの包絡ソリトンの振幅の平均値である。これから、観測波形に現れている波群をすべて包絡ソリトンとみなし、包絡波形の一致のみを条件として不規則変数 a_m および f_m を決定したにも拘わらず、 f_m/f_p と $a_m/\bar{a}$ および $K_p h$ との間に図中の回帰曲線に対応した一定の関係が存在していることがわかる。このことは、現地波浪の波群が包絡ソリトンに対応した一定の力学的秩序を有していることを示すものと考えられる。

図-8 は、各波群を包絡ソリトンとしたときの搬送波の周波数 f_m と各波群ごとの個々波の平均周波数 $\bar{f}$ の関係を明らかにするため、 $f_m/\bar{f}$ を縦軸に、 $GF(h/a_m)$ を横軸にしてこれらの関係を示したものである。両者の間には相関係数が 0.88 に及ぶ対応があり、 $f_m/\bar{f}$ の値も 1 から 3 前後の範囲にわたって分布しており、 $GF(h/a_m)$ の値によって大きく変化することがわかる。しかしながら、包絡波形を与える周波数 f_m と実際の搬送波の周波数に近い $\bar{f}$ とのこうした差異については、横軸のパラメータが必ずしも非線形性に対応したものではないため、前述の仮定 iii) に従って説明することは出来ないが、図-8 の関係を基にすれば、 GF 、 a_m/h および f_m を知ることによって、各波群ごとに実際の搬送波の周波数 $\bar{f}$ を知ることは可能である。

4. 結 語

以上、顕著な波群を伴う非線形不規則波浪は、包絡ソ

リトンを基準モードとする力学的秩序を持つとの仮定の下に、狭帯域仮定に依らない包絡ソリトンモードに基づく波形の表示式を導き、これを基に、係留浮体に作用する波力の計算に必要な水粒子速度などの内部特性表示が可能となるだけでなく、包絡波形の確率分布関数を基にした統計的取扱いが容易となることを示した。ついで、現地波浪の波群特性について検討を行い、このときの波群をパワースペクトルのピーク周波数から計算される変調不安定指標 Kh とその臨界値 1.36 との関係で捉えることは出来ず、むしろ非線形性との関係で捉えられるべきであることを示した。また、各波群ごとの個々波の平均周期と連長の間に有意な相関のあることを示し、現地波浪の波群が互いに独立な非線形 Schrödinger 方程式の下に形成される包絡ソリトンから成っているとの著者らの仮定の妥当性を明らかにした。

さらに、現地波浪の包絡波形の包絡ソリトンモード表示を試み、良好な精度が得られることを示し、包絡ソリトンの振幅および位相定数を不規則変数とした扱いによって、搬送波と波群を一貫させた統一的記述が可能となることを示した。

最後に、貴重な観測資料を提供頂いた関西電力御坊発電所の関係者および有益な討議を頂いた日立造船磯芝野真二氏に深謝の意を表明する。

参 考 文 献

- 1) Funke, E. R. and E. P. O. Mansard: On the synthesis of realistic sea states in a laboratory flume, Report LTR-HY-66, Hydr. Lab.
- 2) Longuet-Higgins, M. S.: Statistical properties of wave groups in a random sea state, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A 312, pp. 219~250, 1984.
- 3) 合田良実: 波の連なりの統計的性質について、港湾技術研究所報告, 第 15 卷, 第 3 号, pp. 3~19, 1976.
- 4) Sobey, R. J. and E. J. Colman: Natural wave trains and scattering transform, Proc. ASCE, Vol. 108, No. WW3, pp. 272~290, 1982.
- 5) Stiassnie, M. and L. Shemer: On modifications of the Zakharov equation for surface gravity wave, Jour. Fluid Mech., Vol. 143, pp. 47~67, 1984.
- 6) Mei, C. C.: The applied dynamics of ocean surface waves, Wiley-Interscience Pub., 740 p., 1983.
- 7) 安田孝志・篠田成郎: ソリトンモードに基づく不規則波浪の統計的取扱い, 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, pp. 98~99, 1984.