

屈折・回折による方向スペクトルの変形計算法

泉 宮 尊 司*

1. 緒 論

海の波の不規則性を海岸構造物の設計に取り入れるためには、まず海の波を正確に表現できなければならない。その表示法の一つが方向スペクトルとよばれ、不規則波エネルギー密度を周波数と波向の関数として表わすものである。これは、波の屈折・回折、反射現象や漂砂の卓越方向を支配する重要な要素であり、したがって、護岸に働く波力や港内静穏度の問題および突堤周辺の汀線変化の評価に考慮されるべきものである。

ところで、方向スペクトルをもつ波の変形現象を取扱った研究としては、屈折による方向スペクトルの変形計算法を提案した Pierson・Neumann・James (1955)¹⁾ の研究や Longuet-Higgins (1957)²⁾ の研究がある。また、Karlsson (1969)³⁾ は、不規則波に対するエネルギー平衡方程式を導きその数値計算を行っている。防波堤による不規則波の回折を取扱ったものとしては、線形重ね合せ法により数値計算を行った永井 (1972)⁴⁾、合田・鈴木 (1975)⁵⁾、高山・神山 (1977)⁶⁾ らの研究が挙げられる。

これらの研究は、平行等深線海浜における屈折問題や一様水深部における半無限堤による回折問題など比較的限制された条件のもとで行われており、現地海浜のように屈折・回折現象が同時に生ずる場合には、これらの方法を適用することはできない。そこで本研究では、屈折・回折現象が同時に生ずる場合の不規則波の方向スペクトルおよび有義波高の変形計算法をあらたに提案する。

2. 屈折・回折による不規則波の変形の計算法

2.1 基礎方程式

ここでは、線形不規則波を取扱う。いま、不規則波の複素速度ポテンシャルを ϕ とすると、連続式、表面および底面の境界条件により、

$$\nabla^2 \phi + \phi_{zz} = 0 \quad -h \leq z \leq 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0 \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi_z + \nabla h \cdot \nabla \phi = 0 \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (3)$$

を得る。ここに、 h は静水深、 ∇ は水平 2 方向 (x, y) に関する方向微分を示し、 z 軸は静水面を原点にとった鉛直上向きの座標軸、 t は時間、 g は重力加速度であり、添字は偏微分を表わす。ここで、不規則変動量である複素速度ポテンシャル ϕ を、

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \int_{\tilde{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{x}, z, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) e^{-i\sigma t} dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \dots\dots (4)$$

と表わす。ここに、 $\mathbf{x}$ は平面位置ベクトル、 $\tilde{\mathbf{k}}$ は沖波の波数ベクトル、 σ は角周波数である。 $dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ は確率変数であり、 $\phi(\mathbf{x}, z, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ は、波数 $\tilde{\mathbf{k}} \sim \tilde{\mathbf{k}} + d\tilde{\mathbf{k}}$ および角周波数 $\sigma \sim \sigma + d\sigma$ の領域における複素振幅を表わす。

式 (4) を式 (1) に代入すると、

$$\int_{\tilde{\mathbf{k}}} \{ \nabla^2 \phi + \phi_{zz} \} e^{-i\sigma t} dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

を得るが、 $dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ が任意の不規則関数であるために、式 (5) の関係が恒等的に成立するためには、 $\{ \}$ の中が零とならなければならない。したがって、

$$\nabla^2 \phi + \phi_{zz} = 0 \quad -h \leq z \leq 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を得る。以下同様にして、式 (2) および (3) より

$$\phi_z - (\sigma^2/g)\phi = 0 \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\phi_z + \nabla h \cdot \nabla \phi = 0 \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (8)$$

が得られる。ここで、規則波に対して mild slope equation を導いた方法 [Smith・Sprinks (1975)⁷⁾、Mei (1983)⁸⁾] と同様に、 $f = \cosh k(h+z)/\cosh kh$ と ϕ に対して Green の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \left\{ \phi \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} f \right\} dz &= \int_{-h}^0 \{ k^2 f \phi + f \nabla^2 \phi \} dz \\ &= -f \nabla h \cdot \nabla \phi|_{z=-h} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

なる関係を得る。上式において k は波数であり、添字 $(-h)$ は $z = -h$ すなわち底面の位置における値を示す。ここで、複素速度ポテンシャル振幅 $\phi(\mathbf{x}, z, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ を

$$\phi(\mathbf{x}, z, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) = -\frac{ig}{\sigma} \zeta(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とおき、これを式 (9) に代入し、微小項 [$\mu = 0 (Fh/kh)$ の 2 乗のオーダー] を無視すると、

$$F(CC_g \nabla^2 \zeta) + k^2 CC_g \zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

を得る。上式が mild slope equation と呼ばれている式である。式 (11) の ζ は水面変動の相対的複素振幅を示す量で、水面変動 $\eta(\mathbf{x}, t)$ とは

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int_{\tilde{\mathbf{k}}} \int_{\sigma} \zeta(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) e^{-i\sigma t} dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \quad (12)$$

なる関係にある。式 (12) は水面変動 $\eta(\mathbf{x}, t)$ を

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int_{\tilde{\mathbf{k}}} \int_{\sigma} \hat{\zeta}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) e^{-i\sigma t} dB(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \quad (13)$$

と表現し、線形な運動学的境界条件式

$$\eta_t = \varphi_z \quad z=0 \quad (14)$$

に式 (4) および式 (10) とともに代入すると得られる。

2.2 相互相関関数、パワースペクトルおよびクロスパワースペクトルの評価

不規則水面変動量が式 (12) で表わされるとき、相互相関数 $C(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau)$ は、

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau) &= \langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta^*(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle \\ &= \int_{\tilde{\mathbf{k}}} \int_{\sigma} \zeta(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \zeta^*(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) e^{i\sigma \tau} \\ &\quad \times \langle dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \cdot dA^*(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \rangle \quad (15) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $*$ は共役複素数を、 $\langle \rangle$ は期待値をとることを示す。ところで、 $dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ を

$$\langle dA(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \cdot dA^*(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \rangle = \tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) d\tilde{\mathbf{k}} d\sigma \quad (16)$$

となるように定義すると、

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau) &= \int_{\tilde{\mathbf{k}}} \int_{\sigma} \zeta(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \zeta^*(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) e^{i\sigma \tau} \\ &\quad \times \tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) d\tilde{\mathbf{k}} d\sigma \quad (17) \end{aligned}$$

となる。また全エネルギー E はその定義式より

$$\begin{aligned} E \equiv C(\mathbf{x}, 0, 0) &= \int_{\tilde{\mathbf{k}}} \int_{\sigma} |\zeta(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma)|^2 \tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) d\tilde{\mathbf{k}} d\sigma \\ &\quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

である。ここに、 $\tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ は深海域における多次元波数・周波数スペクトルである。位置 $\mathbf{x}_m$ における水面変動と $\mathbf{x}_n$ におけるそれとのクロスパワースペクトルは、

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\sigma) &= \int_{\tilde{\mathbf{k}}} \zeta(\mathbf{x}_m, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \zeta^*(\mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma) \tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) d\tilde{\mathbf{k}} \\ &\quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

で与えられる [磯部ら (1984)⁹⁾]。 $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ とすれば角周波数スペクトル

$$\phi(\mathbf{x}, \sigma) = \int_{\tilde{\mathbf{k}}} |\zeta(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}, \sigma)|^2 \tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) d\tilde{\mathbf{k}} \quad (20)$$

を得る。

式 (7) から式 (20) の積分は、深海域における多次元波数・周波数スペクトル $\tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ の重み付き積分となっているが、それらを方向スペクトルを用いた表現に直すことにする。線型不規則波を取扱っているので分散関係式が成立するために、 $\tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma)$ は波数スペクトル $S(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2)$ および方向スペクトル $D(\sigma, \bar{\theta})$ と次のような関係にある [たとえば、Phillips (1977)¹⁰⁾]。

$$\tilde{S}(\tilde{\mathbf{k}}, \sigma) = S(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2) \delta(\sigma - \sigma_k) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D(\sigma, \bar{\theta}) &= \frac{\partial(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2)}{\partial(\tilde{\mathbf{k}}, \bar{\theta})} \cdot \frac{\partial(\tilde{\mathbf{k}}, \bar{\theta})}{\partial(\sigma, \bar{\theta})} S(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2) \\ &= \tilde{k} S(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2) / \tilde{C}_g \quad (22) \end{aligned}$$

ここに、 σ_k は波数と分散関係式の成立する角周波数を示し、 δ は Dirac のデルタ関数である。なお、 $\sim$ は深海域における値を示す。式 (21) および式 (22) を式 (17) から式 (20) に代入すると、

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau) &= \int_{\sigma} \int_{\bar{\theta}} \zeta(\mathbf{x}, \sigma, \bar{\theta}) \zeta^*(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \sigma, \bar{\theta}) e^{i\sigma \tau} \\ &\quad \times D(\sigma, \bar{\theta}) d\bar{\theta} d\sigma \quad (23) \end{aligned}$$

$$E = \int_{\sigma} \int_{\bar{\theta}} |\zeta(\mathbf{x}, \sigma, \bar{\theta})|^2 D(\sigma, \bar{\theta}) d\bar{\theta} d\sigma \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\sigma) &= \int_{\bar{\theta}} \zeta(\mathbf{x}_m, \sigma, \bar{\theta}) \zeta^*(\mathbf{x}_n, \sigma, \bar{\theta}) D(\sigma, \bar{\theta}) d\bar{\theta} \\ &\quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\phi(\mathbf{x}, \sigma) = \int_{\bar{\theta}} |\zeta(\mathbf{x}, \sigma, \bar{\theta})|^2 D(\sigma, \bar{\theta}) d\bar{\theta} \quad (26)$$

を得る。式 (24) により有義波高を、式 (23) あるいは式 (25) を用いれば方向スペクトルを評価することができる。

2.3 平行等深線海浜における方向スペクトルの変形

まず、波向線が交差することのないような平行等深線海浜における方向スペクトルの変形を考える。定常状態において、浅海域における波数スペクトル $S(k_1, k_2)$ は、次式で求められる。

$$S(k_1, k_2) \frac{\partial(k_1, k_2)}{\partial(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2)} = |\zeta(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}})|^2 S(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2) \quad (27)$$

上式の関係は、波数スペクトル密度関数が波数空間 $(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2)$ から (k_1, k_2) へ 1 対 1 写像される場合に成立するものである。式 (27) を方向スペクトル $D(\sigma, \theta)$ を算定する式に書換える。まず、ヤコビアンは

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(k_1, k_2)}{\partial(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2)} = \frac{\partial(k_1, k_2)}{\partial(k, \theta)} \frac{\partial(k, \theta)}{\partial(\tilde{k}, \bar{\theta})} \frac{\partial(\tilde{k}, \bar{\theta})}{\partial(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2)} \\ &= \frac{k}{\tilde{k}} \frac{\partial(k, \theta)}{\partial(\tilde{k}, \bar{\theta})} = \frac{k}{\tilde{k}} \frac{dk}{d\tilde{k}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} \quad (28) \end{aligned}$$

となるが [たとえば Longuet-Higgins (1957)²⁾]、

$$\frac{dk}{d\tilde{k}} = \frac{d\sigma/C_g}{d\sigma/\tilde{C}_g} = \frac{\tilde{C}_g}{C_g} \quad (29)$$

なる関係式を用いてヤコビアン J を書換えると、

$$J = \frac{k}{\tilde{k}} \frac{\tilde{C}_g}{C_g} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} = \frac{\tilde{C}_g}{C_g} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} \quad (30)$$

となる。また、波数スペクトルと方向スペクトルとの関係は式 (22) を用いることにより、式 (27) は、

$$D(f, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} = |\zeta(\mathbf{x}, f, \bar{\theta})|^2 D(f, \bar{\theta}) \quad (31)$$

と書換えられる。この結果は、 $|\zeta(\mathbf{x}, f, \theta)|^2$ が

$$|\zeta(\mathbf{x}, f, \bar{\theta})|^2 = K_f^2 K_{\theta}^2 \quad (32)$$

となれば永井 (1972)⁴⁾ が用いた方法と一致する。ここ

3.2 突堤による方向スペクトルおよび有義波高の変形の計算結果

図-3 は、2.4 で述べた方法により求めた方向スペクトルを示す。突堤に近づくほど方向集中度が高くなっていることがわかる。また、突堤より十分はなれた位置のE点では回折の影響はほとんどなく、Longuet-Higginsの理論値とはほぼ一致する。図-4 は、回折領域の卓越波向の変化の様子を示したものである。この図より、波が突堤に沿って回り込んでいる様子がよくわかる。なお、注意深く見てみると、波向が一樣な割合で変化しているのではなく、変動している領域があることがわかる。

図-5 は、回折領域と反射領域における有義波高比 $H_{1/3}/H_{i1/3}$ の分布を示したものである。その有義波高比は、狭帯域スペクトル（本計算では周波数スペクトルにはデルタ関数を採用している）を仮定すれば、

$$H_{1/3}/H_{i1/3} = \sqrt{E/E_i} \dots\dots\dots(42)$$

で求めることができる。ここに添字 i は入射位置における値を示す。図-5 より、規則波では回折係数の等値線が突堤先端に集中するのに対し、この場合には不規則性のためにそれほど集中していない。

図-6 は、方向集中度を示す l の値による有義波高比の分布の変化を示したものである。 l の値が小さいほどすなわち方向集中度が低いほど、有義波高比の沿岸方向の変動が若干ではあるが小さくなっている。

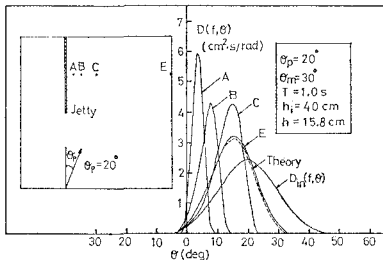


図-3 突堤による方向スペクトルの変形

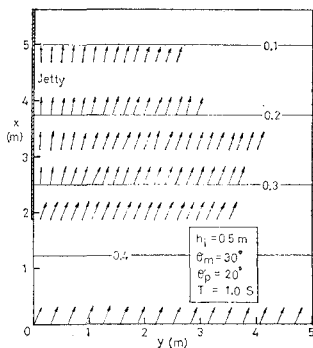
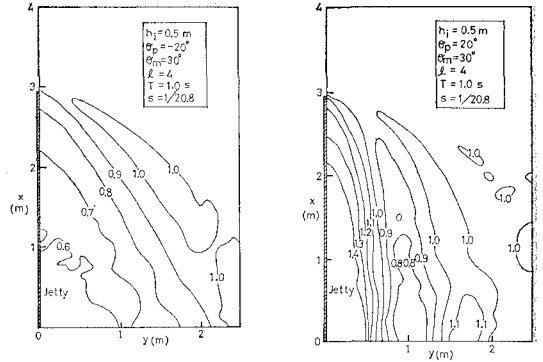


図-4 回折領域の卓越波向の変化



(a) 回折領域 (b) 反射領域

図-5 有義波高比 $H_{1/3}/H_{i1/3}$ の分布

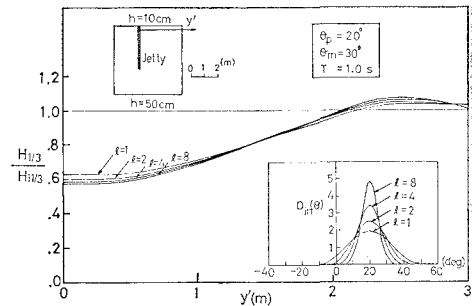


図-6 l の値による有義波高比分布の変化

3.3 球面浅瀬による有義波高の変化

合田・鈴木 (1975)⁵⁾ は、Karlsson によるエネルギー平衡方程式を用いて球面浅瀬における屈折計算を行い、規則波の波向線が交差するような複雑な海浜に対して、その方法が有効であると述べている。しかしながら、このような地形の海浜では屈折と同時に回折も生じているので Karlsson のエネルギー方程式を解く方法では不正確である。

図-8 は、回折効果も同時に考慮された本計算法によって得られた結果である。断面 A-A' および B-B' の位置は図-7 に示されている。 l の値が大きくなるにつれて有義波高比の変化が大きくなり、規則波の波高分布と類似してくることがわかる。図-9 は、 l の値による有義波高比の分布の違いを示したものである。 l の値が小さくなるほどなめらかな分布となり、一様化される傾向が見られる。

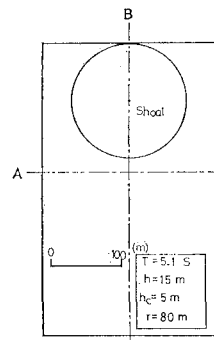
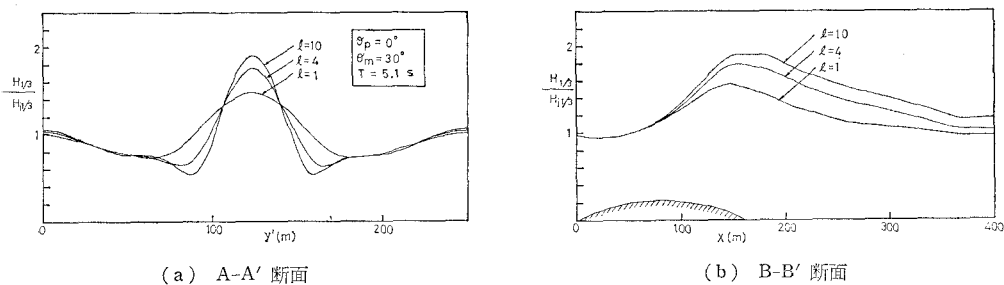
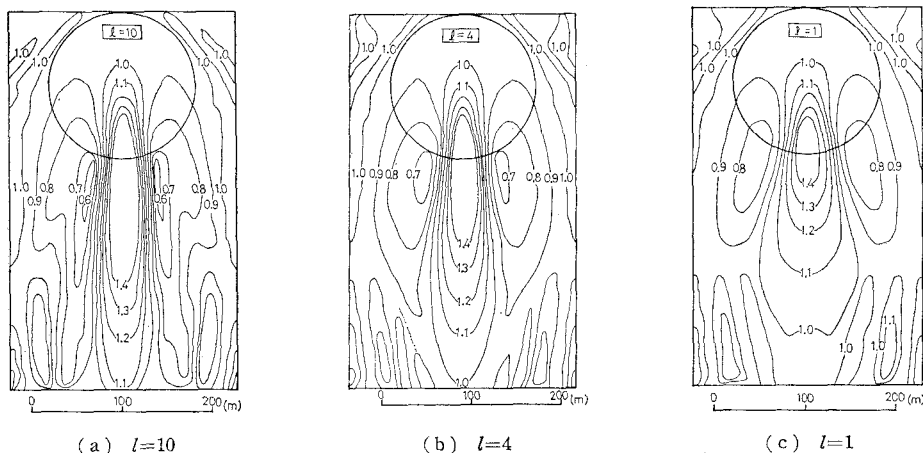


図-7 球面浅瀬と比較断面

図-8 l の値による有義波高比分布の変化 (1)図-9 l の値による有義波高比分布の変化 (2)

4. 結 論

屈折・回折による方向スペクトルおよび有義波高の変形計算法を提案し、突堤や球面浅瀬がある海浜に対して数値計算を行った。その結果、方向集中度の高い不規則波に対しても本手法では数値粘性による方向分散の影響がほとんどなく精度よく評価できることがわかった。また、方向集中度の低下にともなう有義波高分布の一樣化傾向も数値実験により確かめられた。最後に、本研究を行うにあたり助言をいただいた磯部雅彦助教授に感謝致します。

参 考 文 献

- Pierson, W. J., Jr, G. Neuman and R. W. James: Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics, U.S. Navy H.O., Pub. No. 603, 284 pp., 1955.
- Longuet-Higgins, M. S.: On the transformation of a continuous spectrum by refraction, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 53, pp. 226~229, 1957.
- Karlsson, T.: Refraction of continuous ocean wave spectra, J. Waterways Harbors Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. WW4, pp. 437~448, 1969.
- 永井康平: 不規則な海の波の屈折および回折計算, 港湾技術研究所報告, 第11巻, 第2号, pp. 47~119, 1972.
- 合田良実・鈴木康正: 光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No. 230, 45 p., 1975.
- 高山知司・神山 豊: 不規則波の回折計算, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 112~116, 1977.
- Smith, R. and T. Sprinks: Scattering of surface waves by a conical island, J. Fluid Mech., Vol. 72, pp. 373~384, 1975.
- Mei, C. C.: The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, John Wiley-Interscience, p. 87, 1983.
- 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司: 方向スペクトルの推定における MLM の拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 173~177, 1984.
- Phillips, O. M.: The Dynamics of the Upper Ocean, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2nd ed., p. 105, 1977.
- Radder, A. C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 159~204, 1978.
- Tsay, T.K. and P., L-F. Liu: Numerical solution of water wave refraction and diffraction Problems in the parabolic approximation, J. Geophys. Res., Vol. 87, No. C10, pp. 7932~7940, 1982.