

双峯型方向分布関数の推定法について

廣瀬宗一*

1. まえがき

海の波は、振幅、位相に関してばかりでなく、波向に関する不規則である。このような不規則な海の波は、方向スペクトルによってほぼ完全に記述できる。方向スペクトルは、解析及び活用の便宜上、周波数スペクトルと方向分布関数の積によって表現されることが多い。

周波数スペクトルに関しては、これまで光易ら^{1),2)}による精力的な研究があって、これを活用するために必要な情報はかなりの程度まで蓄積されつつある。しかしながら、方向分布関数については、古くから研究がなされているものの、精度の高い実測値の蓄積が十分でないこともあってその特性は十分に解明されるにいたっていない。

港湾構造物等への波浪の影響、あるいは波浪の変形を論ずる場合には方向スペクトルに関する情報は必須であり、特に港湾構造物等の設計のためには、とりあえず適切な方向分布関数を与えること、次いで代表波向を定めることが重要な作業となる。したがって、観測された波が方向に関して unimodel (单峯型) なのか、あるいは bimodel (双峯型) なのかを知ること、さらに、もし双峯型であれば、混在する二つの波浪系を適確に分離することは、研究者にとってはもちろん、データ整理及び設計の実務担当者にとっても重要な課題であると考えられる。

本稿は、双峯型方向分布関数の一般的な表示として wrapped normal 分布の線型結合を考え、その特性、及び含まれるパラメータの推定法について議論するものである。

2. 方向分布関数

2.1 单峯型方向分布関数

一般に、方向スペクトル $E(f, \theta)$ は周波数スペクトル $S(f)$ と方向分布関数 $D_f(\theta)$ の積として表現される。

$$E(f, \theta) = S(f) \cdot D_f(\theta) \quad \dots(1)$$

これまでによく用いられている方向分布関数としては

以下に示す $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型³⁾がある。

$$D_f(\theta) = \alpha \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \quad \dots(2)$$

ここに、

$$\alpha = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2s} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta \right]^{-1} \quad \dots(3)$$

$$s = \begin{cases} S_{\max} \cdot (f/f_m)^5 & : f \leq f_m \\ S_{\max} \cdot (f/f_m)^{-2.5} & : f \geq f_m \end{cases} \quad \dots(4)$$

また、 θ_0 は波群の中心波向である。

したがって、

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_f(\theta) d\theta = 1 \quad \dots(5)$$

の正規化条件は満足されている。

(2) 式に示す方向分布関数は、合田⁴⁾により光易型方向分布関数と呼ばれているものである。

ここでは、(2) 式に代り、次式に示す wrapped normal 分布を考える。

$$f(\theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu - 2\pi k)^2}{\sigma^2} \right] \quad \dots(6)$$

ここに、 μ 及び σ^2 は wrapped normal 分布のパラメータである。この分布は、関数形から明らかなように、たとえば θ の定義域を 0 から 2π とすると、平均値が 2π ずつ異なる正規分布の裾野を 0 から 2π の範囲で重ね合せた形を有している。

一般に、方向分布関数は、周期 2π で周期的であると仮定すると、次式のように Fourier 級数に展開することができる。すなわち、

$$D_f(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad \dots(7)$$

Wrapped normal 分布を方向分布関数に用いると、

$$\left. \begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} e^{-n^2 \sigma^2 / 2} \cos n\mu \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi} e^{-n^2 \sigma^2 / 2} \sin n\mu \end{aligned} \right\} \quad \dots(8)$$

となる。ただし、 $n \geq 1$ である。

このように、周期 2π の周期関数であるという仮定だけで Fourier 級数に展開できることは、wrapped normal

* 正会員 工修 運輸省第三港湾建設局神戸調査設計事務所次長

分布を方向分布関数として用いることのメリットの一つである。ちなみに、 $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型を Fourier 級数に展開するためにはパラメータの s が整数でなければならない。

図-1 には $\mu=0$ とした時の σ の変化による wrapped normal 分布の形状の変化を、図-2 には(2)式の $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型と(6)式の wrapped normal 分布の両者を数値計算により近似して得られた s と σ の関数を示す。数値計算結果によると、

$$\sigma = 1.208s^{-0.423} \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

また、Borgman⁵⁾は解析的に上式に等価な関係を導いているが、これは次式のようにかなり単純な形で得られている。

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln \frac{s}{s+1}} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

(9)式、(10)式共図-2中に示されているが、両者の差は小さいと言える。

(2)式と(6)式の関数形を比較するために、 $s=5$ の時の(2)式の関数形と、(9)式から推定される σ の値をもつ(6)式の関数形を同時に示すと図-3 のようになる。図-3 によると両者はほぼ完全に一致しており、このことは、wrapped normal 分布と $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型分布は互いにほぼ等価な関数形を与えることを意味している。

2.2 双峯型方向分布関数

双峯型方向分布関数を表わすために、ここでは(6)式に示す wrapped normal 分布の線型結合を考える。すなわち、

$$D_f(\theta) = A \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu_1 - 2\pi k)^2}{\sigma_1^2}} + (1-A) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu_2 - 2\pi k)^2}{\sigma_2^2}} \dots \dots \dots \quad (11)$$

ここに、 μ_1 、 μ_2 、 σ_1^2 、及び σ_2^2 は分布パラメータであり、 A は mixing constant である。

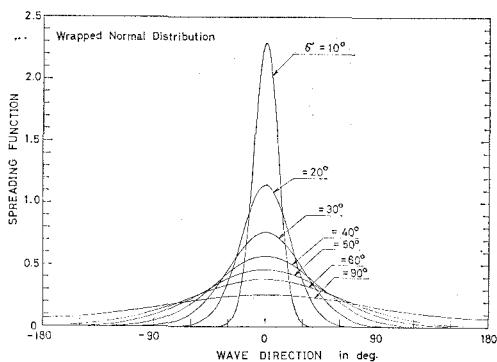


図-1 Example of wrapped normal spreading function

この関数は明らかに(5)式に示す正規化条件を満足するほか、以下に示す Fourier 係数を有する Fourier 級数に展開されることができる。

$$\left. \begin{aligned} a_n(f) &= \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_1^2 / 2} \cos n\mu_1 \\ &\quad + (1-A) \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_2^2 / 2} \cos n\mu_2 \\ b_n(f) &= \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_1^2 / 2} \sin n\mu_1 \\ &\quad + (1-A) \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_2^2 / 2} \sin n\mu_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (12)$$

3. パラメータの推定法

3.1 Single Frequency Analysis (SFA)

ここでは、(11)式に示す双峯型方向分布関数のパラメータの推定法を考える。

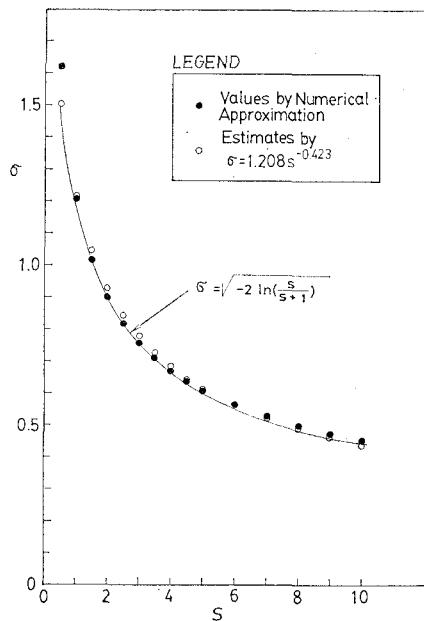


図-2 Relationship between parameters of the wrapped normal and the cosine-squared formula

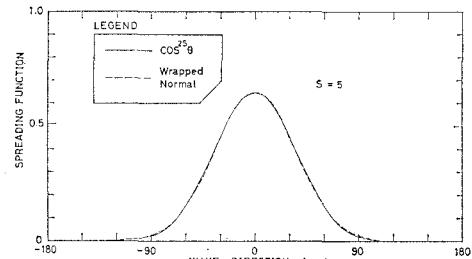


図-3 Example of the comparison of the distribution forms between the wrapped normal and the cosine-squared formula

まず、(7)式の a_n, b_n を係数としてもつ Fourier 級数を $n=2$ で打ち切り、観測値から得られる Fourier 係数と (12) 式の Fourier 係数を等しいとおく。次いで、両者の差の 2乗和を最小にするように未知パラメータの値を推定することを考えると、問題は次のように書くことができる。

$$Q = \sum_{n=1}^2 \{(a_n(f) - \hat{a}_n(f))^2 + (b_n(f) - \hat{b}_n(f))^2\} \\ \longrightarrow \min. \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

ここに、 $a_n(f), b_n(f)$ は観測値から得られる Fourier 係数、 $\hat{a}_n(f), \hat{b}_n(f)$ は (12) 式に示す wrapped normal 分布に対する Fourier 係数である。

上式に示す問題では、未知パラメータが 5 個あるのに 対して式の数は 4 しかない。したがって、解は不定である。そこで、(12) 式中の各式 ($n=1, 2$) は A に関する線型であることから、 $\partial Q / \partial A = 0$ を解いて (13) 式から A を消去するのに用い、次いで、 μ_1 と μ_2 の値を選んで残るパラメータ σ_1^2 と σ_2^2 に関する Q を最小にするのに非線型最小自乗法を用いると、式 (13) に示す問題に対する可能な解 ($0 \leq A \leq 1, 0 < \sigma_1^2, \sigma_2^2 < \infty, 0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 2\pi$ のすべての条件を満足し、かつ Q を収束させる解)を得ることができる。これらの解の内、もっとも小さい Q (最小自乗誤差) を有するものがもっとも可能な解であると考えることができる。

3.2 Multiple Frequency Analysis (MFA)

3.1 では、ある周波数成分に対する方向分布関数を推定するのに当該周波数成分に対する Fourier 係数だけを用いたが、ここではその周囲の周波数成分も同時に用いることとする。なお、以下においては用いる周波数成分の数は便宜上奇数としているが、実際には偶数であっても、あるいは方向分布関数を推定しようとしている周波数成分が必ずしも中心周波数の成分でなくても本質は変わらない。

今、用いる周波数成分の数を m とし、低周波側から順に f_1, f_2, \dots, f_m (この f_m はスペクトルのピーク周波数ではない) とすると、3.1 におけると同様最小自乗法の考え方を適用することにより、

$$Q = \sum_{i=1}^m (a_i(f_i) - \hat{a}_i(f_i))^2 + \sum_{i=1}^m (b_i(f_i) - \hat{b}_i(f_i))^2 \\ + \sum_{i=1}^m (a_2(f_i) - \hat{a}_2(f_i))^2 + \sum_{i=1}^m (b_2(f_i) - \hat{b}_2(f_i))^2 \\ \longrightarrow \min. \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

しかし、このままでは依然として解は不定である。そこで、次式に示すように各パラメータの推定値に対して各周波数成分間で線型関係を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} A(f_i) &= A_{00} + A_{01}(f_i - f_0) \\ \mu_1(f_i) &= \mu_{10} + \mu_{11}(f_i - f_0) \\ \mu_2(f_i) &= \mu_{20} + \mu_{21}(f_i - f_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2(f_i) &= \sigma_{10}^2 + \sigma_{11}^2(f_i - f_0) \\ \sigma_2^2(f_i) &= \sigma_{20}^2 + \sigma_{21}^2(f_i - f_0) \end{aligned} \right\}$$

ここに、 f_0 は方向分布関数を推定しようとしている周波数成分 ($= f_{(m+1)/2}$) である。

この仮定を用いることによって、(14) 式の問題は 10 個の未知数に対して $4m$ 個の式を有することとなり、 $m \geq 3$ であれば数学的には解は unique になる。MFA においては先の $\partial Q / \partial A = 0$ の代りに $\partial Q / \partial A_{00} = 0$ 及び $\partial Q / \partial A_{01} = 0$ を用いることになる。この他の基本的な手順は SFA におけると同様である。なお、以下の解析では、便宜上 $m=3$ と設定している。

4. 解析結果

4.1 現地観測データ

新潟西港では昭和 56 年 12 月以来超音波式流速計を用いて観測を継続している。この流速計は、二つの対向する超音波送受波器 (X 及び Y 成分) に水圧センサーを付加したものである。この流速計は、図-4.1 及び図-4.2 に示すように防波堤の西側の水深 -15 m の地点に設置された。流速計で測定されたデータは陸上局でカーリッジ磁気テープに記録されており、記録感度は水圧センサー、流速計のそれぞれに対して $0.005\text{ m/dig.}, 0.003\text{ m/s/dig.}$ である。

一般に日本海では双峯型の方向分布は現われ難いが、新潟西港のデータには防波堤による反射波の影響及び佐渡ヶ島の遮蔽効果のために当該地点では比較的現われ易いと考えられる。

スペクトル解析は 2 048 個のデータを用いて FFT により行った。方向分布関数の Fourier 係数の推定には Longuet-Higgins ら⁶⁾による方法を用いている。

4.2 方向分布関数の推定結果

対象としたデータは昭和 56 年 12 月 14 日 14 時に観測されたものであり、 $H_{1/3}, T_{1/3}$ はそれぞれ $5.09\text{ m}, 10.9\text{ s}$ であった。卓越風向は新潟～佐渡では W 系であった。

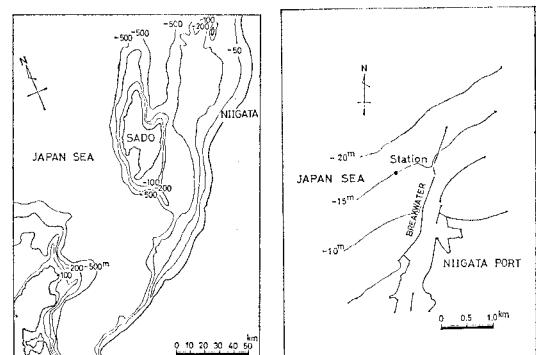


図-4.1 Location of Niigata Port

図-4.2 Location of the observation station at Niigata Port

f_0 としてはスペクトルのピーク周波数をとり, μ_1 と μ_2 はそれぞれ $120^\circ \sim 280^\circ$ (E から反時針回り), $30^\circ \sim 220^\circ$ の範囲で 10° きざみに変化させ, それぞれのペアに対してもシングレックス法⁷⁾で Q の最小化をおこなった。

図-5, 6, 及び 7 には, それぞれ周波数成分 $f_0 - 4f$ ($4f = 0.0078125$ Hz, $f_0 = 0.08594$ Hz), f_0 , $f_0 + 4f$ において SFA によって得られた誤差 (Q の代りに, 分布形を 5° きざみに与えた時の最小自乗誤差により表現している.) の分布図を示している。これらによると, いずれの周波数成分においても, μ_1 は 240° で最適となる傾向が強くみられ, 一方 μ_2 にはそれほど強い傾向はみられない。このことは, たとえ双峯型という結果が出たとしても, 二次ピークは一次ピークに比べてエネルギーはかなり小さいことを示唆している。いずれにせよ, 上述の三成分の内, f_0 及び $f_0 - 4f$ では 240° と 40° が, $f_0 + 4f$ では 240° と 60° がもっとも可能性の高い解として得られており, 240° はほぼ卓越風向と一致している。なお, 誤差が最小の点での A の値はいずれの成分においてもほぼ $0.88 \sim 0.09$, σ_1^2 , σ_2^2 の値は少しばらつくが ($f=f_0$ でもっとも小さい), それぞれ $0.15 \sim 0.185$, $0.027 \sim 0.033$ である。

図-8, 9, 10 には, 誤差が最小となる各パラメータの組合せに対して推定される分布関数と, 観測値から得られる Fourier 係数をもとに直接得られる方向分布関数の比較図を示す。図中, wrapped normal とあるのは得ら

れたパラメータの推定値を用いて (11) 式により得られる分布関数を意味している。図によると, Fourier 級数から直接得られる方向分布関数は観測値に対するものと近似結果に対するものでほとんど一致しており, 近似の精度は極めて高いと考えられる。wrapped normal で表わした分布関数は, Fourier 級数で表わされる分布関数に比べてかなり尖鋭である。また, いずれの図にもみられる二次ピークはおそらく防波堤からの反射波によるものであろうと考えられる。

一方, 図-11 には MFA によって得られた誤差の $\mu_1 - \mu_2$ 平面での分布を示す。この結果は図-5~7 に示す SFA による結果とかなり異なっており, 可能な解はおおむね 3 つのグループに分けられるほか, $\mu_1 = 240^\circ$ 集中する傾向は先ほど顕著にみられない。最初のグループでは $\mu_1 = 230^\circ$, $\mu_2 = 30 \sim 40^\circ$, 2 番目のグループでは $\mu_1 = 240^\circ$, $\mu_2 = 70 \sim 90^\circ$, 3 番目のグループでは $\mu_1 = 240^\circ$, $\mu_2 = 130^\circ$ で最適解が得られる傾向がある。すなわち, 一次ピークはほぼ $230 \sim 240^\circ$ にあるといえるが, 二次ピークはグループによりかなり異なっている。この結果が正しいとすれば, 大きく三つの要因が考えられる。すなわち, 130° にみられる二次ピークは佐渡の北側からの波, $70 \sim 90^\circ$ の波は防波堤に沿う波, $30 \sim 40^\circ$ の波は防波堤からの反射波となる。しかしながら, このように波向の異なるいくつかの要因が考えられるのは, 二次ピークが一次ピークに比べて格段に小さいことによるものと

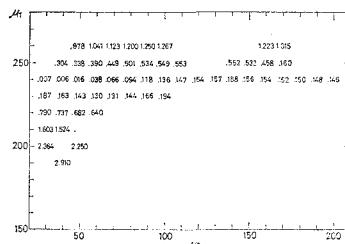


図-5 Distribution of the least squares errors at frequency $f=f_m-4f$

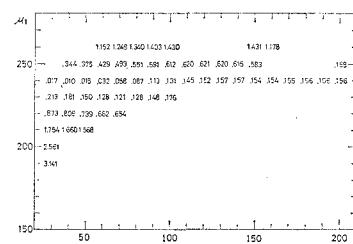


図-6 Distribution of the least squares errors at frequency $f=f_m$

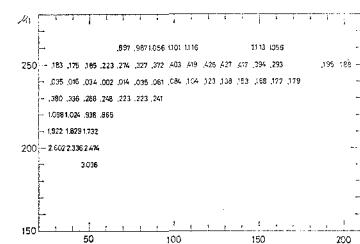


図-7 Distribution of the least squares errors at frequency $f=f_m+4f$

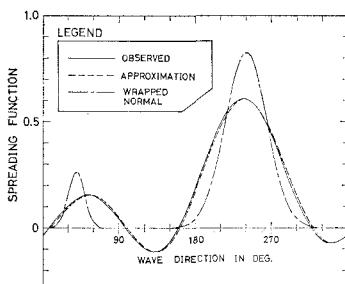


図-8 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m-4f$

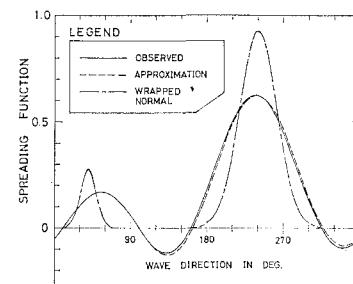


図-9 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m$

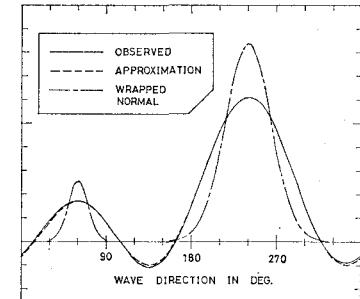


図-10 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m+4f$

思われる。

誤差のもっとも小さい2番目のグループに対して A , σ_1^2 , σ_2^2 の推定値を求めるとき, $f=f_0$ に対してはそれぞれ $0.78 \sim 0.74$, $0.033 \sim 0.007$, $2.36 \sim 3.62$ となる。ここで、先に示した数字は $\mu_2=70^\circ$ での推定値、後に示した数字は $\mu_2=90^\circ$ に対する推定値である。これを SFA による結果と比べると、 A , σ_1^2 については小さめ、 σ_2^2 については大きめとなっている。

図-12~14 には各周波数成分に対して得られた分布関数の比較図を示す。これらを図-8~10 の結果と比べると、いずれの成分においても一次ピークはかなり尖鋭であり、二次ピークについてはかなりなだらかな形状となっている。

なお、誤差の大きさは SFA と MFA でほとんど同程度といえるほか、(15) 式で与えた各パラメータの勾配は、いずれも非常に小さい。

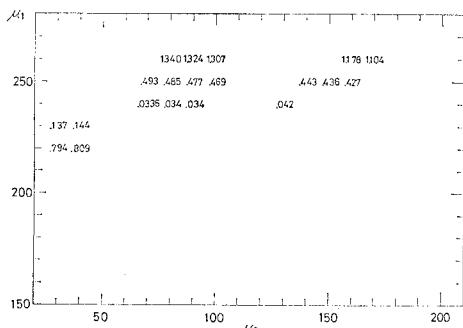


図-11 Distribution of the least squares errors at frequency $f=f_m$ in Multiple Frequency Analysis

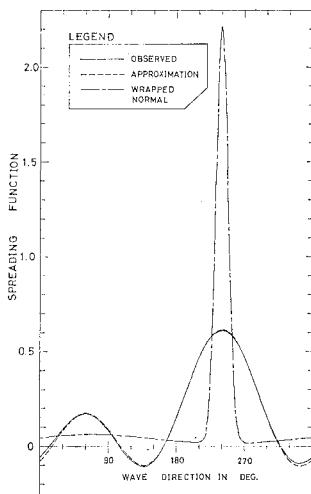


図-12 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m+df$ in Multiple Frequency Analysis

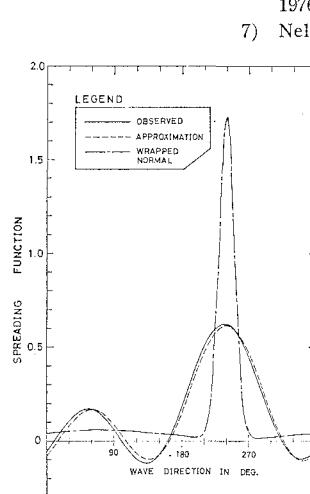


図-13 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m$ in Multiple Frequency Analysis

5. 結 語

僅か 1 ケースしか解析結果を示さなかったけれども、得られた結果を要約すると以下のようになる。

- 1) 本稿で提案した方向分布関数は $\cos^{2\theta} \frac{\theta}{2}$ とほぼ同じ形状を有すると共に、実測の分布に対して高い適合性を有している。
- 2) 双峯型の方向分布関数は wrapped normal の線型結合によりうまく表現できる。
- 3) SFA と MFA ではほとんど同程度の推定誤差を与えるが、SFA による解はやや不安定である。
- 4) 本稿で提案した近似手法を採用する場合、 μ_1 , μ_2 のきざみとしては実用的には 10° 程度を目安にできる。
- 5) MSA は SFA に比べて一次ピークはやや尖鋭に、二次ピークはなだらかに推定される傾向がある。
- 6) パラメータの値の周波数間での変化は、直線で近似しても実用上さしつかえない。

などである。

なお、本稿は、筆者が昭和 58 年からワイオミング大学に留学中に得た成果の一部をとりまとめたものであり、留学中に御指導を受けたボルグマン教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 光易 恒: 第 17 回海岸工学講演会論文集, 1970.
- 2) Mitsuyasu, H. et al.: J. Phy. Oceanogr., 10, 1980.
- 3) Mitsuyasu, H. et al.: J. Phy. Oceanogr., 5, 1975.
- 4) 合田良実・鈴木康正: 港研資料, No. 230, 1975.
- 5) Borgman, L. E.: Personal Communication.
- 6) Longuet-Higgins, M. S. et al.: Ocean Wave Spectra, 1976.
- 7) Nelder, J. A. and Mead, R.: Comput. J., 7, 1965.

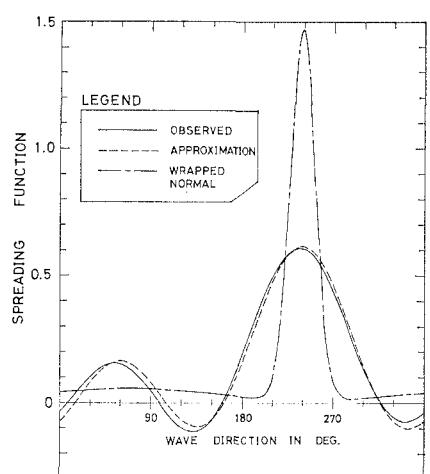


図-14 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m-df$ in Multiple Frequency Analysis