

双峯型方向分布関数の推定法について

広 瀬 宗 一*

1. ま え が き

海の波は、振幅、位相に関してばかりでなく、波向に関しても不規則である。このような不規則な海の波は、方向スペクトルによってほぼ完全に記述できる。方向スペクトルは、解析及び活用の便宜上、周波数スペクトルと方向分布関数の積によって表現されることが多い。

周波数スペクトルに関しては、これまで光易ら^{1),2)}による精力的な研究があって、これを活用するために必要な情報はかなりの程度まで蓄積されつつある。しかしながら、方向分布関数については、古くから研究がなされているものの、精度の高い実測値の蓄積が十分でないこともあってその特性は十分に解明されるにいたっていない。

港湾構造物等への波浪の影響、あるいは波浪の変形を論ずる場合には方向スペクトルに関する情報は必須であり、特に港湾構造物等の設計のためには、とりあえず適切な方向分布関数を与えること、次いで代表波向を定めることが重要な作業となる。したがって、観測された波が方向に関して unimodel (単峯型) なのか、あるいは bimodel (双峯型) なのかを知ること、さらに、もし双峯型であれば、混在する二つの波浪系を適確に分離することは、研究者にとってはもちろん、データ整理及び設計の実務担当者にとっても重要な課題であると考えられる。

本稿は、双峯型方向分布関数の一般的な表示として wrapped normal 分布の線型結合を考え、その特性、及び含まれるパラメータの推定法について議論するものである。

2. 方向分布関数

2.1 単峯型方向分布関数

一般に、方向スペクトル $E(f, \theta)$ は周波数スペクトル $S(f)$ と方向分布関数 $D_f(\theta)$ の積として表現される。

$$E(f, \theta) = S(f) \cdot D_f(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

これまでによく用いられている方向分布関数としては

以下に示す $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型³⁾がある。

$$D_f(\theta) = \alpha \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$\alpha = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2s} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta \right]^{-1} \dots\dots\dots (3)$$

$$s = \begin{cases} S_{\max} \cdot (f/f_m)^5 & : f \leq f_m \\ S_{\max} \cdot (f/f_m)^{-2.5} & : f \geq f_m \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

また、 θ_0 は波群の中心波向である。

したがって、

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_f(\theta) d\theta = 1 \dots\dots\dots (5)$$

の正規化条件は満足されている。

(2) 式に示す方向分布関数は、合田⁴⁾により光易型方向分布関数と呼ばれているものである。

ここでは、(2) 式に代り、次式に示す wrapped normal 分布を考える。

$$f(\theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu - 2\pi k)^2}{\sigma^2} \right] \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 μ 及び σ^2 は wrapped normal 分布のパラメータである。この分布は、関数形から明らかなように、たとえば θ の定義域を 0 から 2π とすると、平均値が 2π ずつ異なる正規分布の裾野を 0 から 2π の範囲で重ね合わせた形を有している。

一般に、方向分布関数は、周期 2π で周期的であると仮定すると、次式のように Fourier 級数に展開することができる。すなわち、

$$D_f(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \dots\dots (7)$$

Wrapped normal 分布を方向分布関数に用いると、

$$\left. \begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} e^{-n^2 \sigma^2 / 2} \cos n\mu \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi} e^{-n^2 \sigma^2 / 2} \sin n\mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。ただし、 $n \geq 1$ である。

このように、周期 2π の周期関数であるという仮定だけで Fourier 級数に展開できることは、wrapped normal

分布を方向分布関数として用いることのメリットの一つである。ちなみに、 $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型を Fourier 級数に展開するためにはパラメータの s が整数でなければならない。

図-1 には $\mu=0$ とした時の σ の変化による wrapped normal 分布の形状の変化を、図-2 には (2) 式の $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型と (6) 式の wrapped normal 分布の両者を数値計算により近似して得られた s と σ の関数を示す。数値計算結果によると、

$$\sigma = 1.208s^{-0.423} \dots\dots\dots(9)$$

また、Borgman⁵⁾ は解析的に上式に等価な関係を導いているが、これは次式のようにかなり単純な形で得られている。

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln \frac{s}{s+1}} \dots\dots\dots(10)$$

(9) 式、(10) 式共 図-2 中に示されているが、両者の差は小さいと言える。

(2) 式と (6) 式の関数形を比較するために、 $s=5$ の時の (2) 式の関数形と、(9) 式から推定される σ の値をもつ (6) 式の関数形を同時に示すと 図-3 のようになる。図-3 によると両者はほぼ完全に一致しており、このことは、wrapped normal 分布と $\cos^{2s} \frac{\theta}{2}$ 型分布は互いにはほぼ等価な関数形を与えることを意味している。

2.2 双峯型方向分布関数

双峯型方向分布関数を表すために、ここでは (6) 式に示す wrapped normal 分布の線型結合を考えを。すなわち、

$$D_f(\theta) = A \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu_1 - 2\pi k)^2}{\sigma_1^2}} + (1-A) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu_2 - 2\pi k)^2}{\sigma_2^2}} \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 μ_1 、 μ_2 、 σ_1^2 、及び σ_2^2 は分布パラメータであり、 A は mixing constant である。

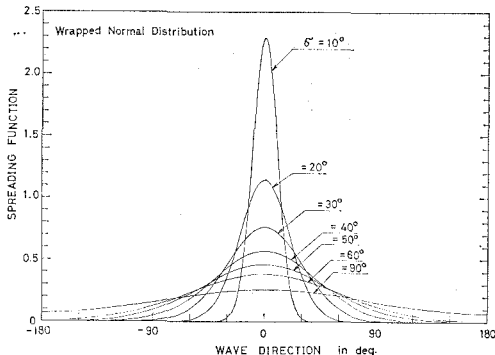


図-1 Example of wrapped normal spreading function

この関数は明らかに (5) 式に示す正規化条件を満足するほか、以下に示す Fourier 係数を有する Fourier 級数に展開されることができる。

$$\left. \begin{aligned} a_n(f) &= \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_1^2 / 2} \cos n \mu_1 \\ &\quad + (1-A) \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_2^2 / 2} \cos n \mu_2 \\ b_n(f) &= \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_1^2 / 2} \sin n \mu_1 \\ &\quad + (1-A) \left(\frac{1}{\pi} \right) e^{-n^2 \sigma_2^2 / 2} \sin n \mu_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

3. パラメータの推定法

3.1 Single Frequency Analysis (SFA)

ここでは、(11) 式に示す双峯型方向分布関数のパラメータの推定法を考える。

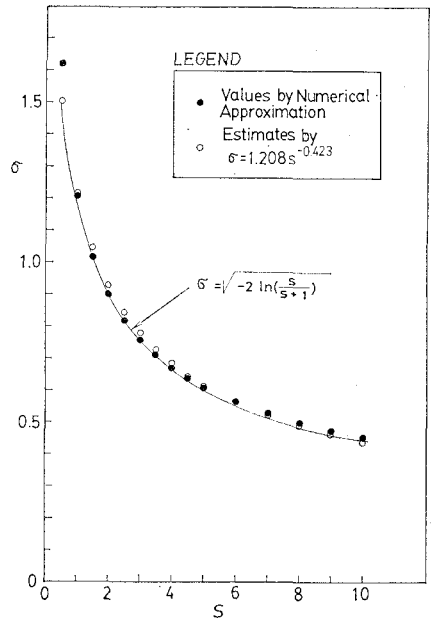


図-2 Relationship between parameters of the wrapped normal and the cosine-squared formula

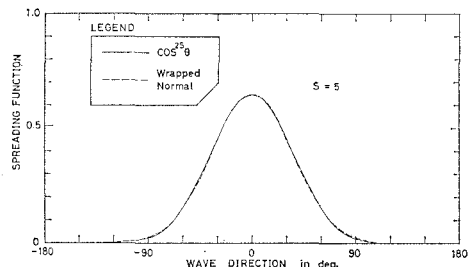


図-3 Example of the comparison of the distribution forms between the wrapped normal and the cosine-squared formula

思われる。

誤差のもっとも小さい2番目のグループに対して A , σ_1^2 , σ_2^2 の推定値を求めると, $f=f_0$ に対してはそれぞれ 0.78~0.74, 0.033~0.007, 2.36~3.62 となる。ここで, 先に示した数字は $\mu_2=70^\circ$ での推定値, 後に示した数字は $\mu_2=90^\circ$ に対する推定値である。これを SFA による結果と比べると, A , σ_1^2 については小さめ, σ_2^2 については大きめとなっている。

図-12~14 には各周波数成分に対して得られた分布関数の比較図を示す。これらを 図-8~10 の結果と比べると, いずれの成分においても一次ピークはかなり尖鋭であり, 二次ピークについてはかなりなだらかな形状となっている。

なお, 誤差の大きさは SFA と MFA でほとんど同程度といえるほか, (15) 式で与えた各パラメータの勾配はいずれも非常に小さい。

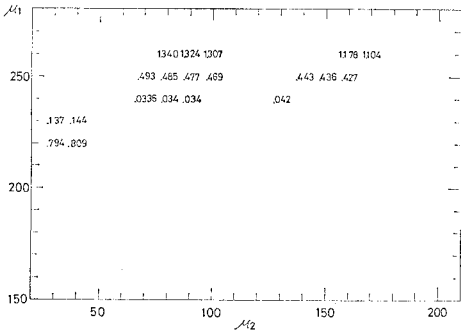


図-11 Distribution of the least squares errors at frequency $f=f_m$ in Multiple Frequency Analysis

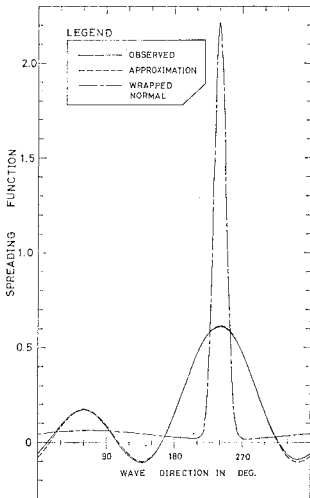


図-12 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m+df$ in Multiple Frequency Analysis

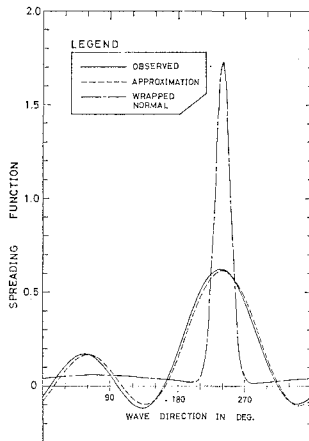


図-13 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m$ in Multiple Frequency Analysis

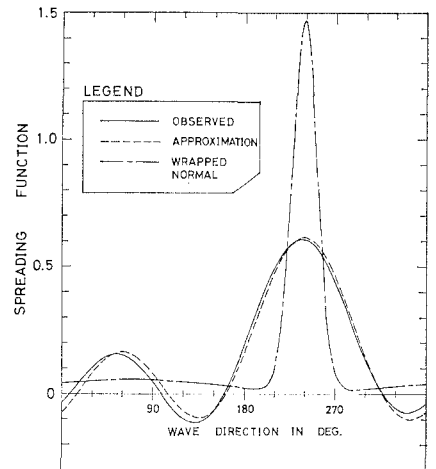


図-14 Comparison between the observed and the estimated spreading functions at frequency $f=f_m-df$ in Multiple Frequency Analysis

5. 結 語

僅か1ケースしか解析結果を示さなかったけれども, 得られた結果を要約すると以下ようになる。

- 1) 本稿で提案した方向分布関数は $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ とほぼ同じ形状を有すると共に, 実測の分布に対して高い適合性を有している。
- 2) 双峯型の方向分布関数は wrapped normal の線型結合によりうまく表現できる。
- 3) SFA と MFA ではほとんど同程度の推定誤差を与えるが, SFA による解はやや不安定である。
- 4) 本稿で提案した近似手法を採用する場合, μ_1 , μ_2 のきざみとしては実用的には 10° 程度を目安にできる。
- 5) MSA は SFA に比べて一次ピークはやや尖鋭に, 二次ピークはなだらかに推定される傾向がある。
- 6) パラメータの値の周波数間での変化は, 直線で近似しても実用上さしつかえない。

などである。

なお, 本稿は, 筆者が昭和58年からワイオミング大学に留学中に得た成果の一部をとりまとめたものであり, 留学中に御指導を受けたボルグマン教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 光易 恒: 第17回海岸工学講演会論文集, 1970.
- 2) Mitsuyasu, H. et al.: J. Phy. Oceanogr., 10, 1980.
- 3) Mitsuyasu, H. et al.: J. Phy. Oceanogr., 5, 1975.
- 4) 合田良実・鈴木康正: 港研資料, No. 230, 1975.
- 5) Borgman, L. E.: Personal Communication.
- 6) Longuet-Higgins, M. S. et al.: Ocean Wave Spectra, 1976.
- 7) Nelder, J. A. and Mead, R.: Comput. J., 7, 1965.